УДК 517.928.1

ТЕОРЕМА УСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

© 2012 О.П. Филатов[1]

Доказано, что предел максимального среднего не зависит от начальных условий, если существует вектор из выпуклой оболочки компактного множества конечномерного пространства, координаты которого независимы относительно спектра почти периодической функции. Компактное множество — правая часть дифференциального включения. Предел вычисляется по всем решениям задачи Коши для дифференциального включения.

Ключевые слова: предел максимального среднего, теорема усреднения, дифференциальное включение, компактная правая часть, почти периодическая функция, независимые частоты относительно спектра.

1. Краткие предварительные сведения

Для непрерывной почти периодической функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и дифференциального включения

$$\dot{x} \in G, \quad x(0) = x_0, \tag{1.1}$$

где компактное множество $G \subset \mathbb{R}^n$, предел максимального среднего $M(f)$ определяется соотношением

$$M(f) = \lim_{\Delta\to\infty} \sup_{x\in X(x_0)} \frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta f(x(t))\,dt. \tag{1.2}$$

Здесь $X(x_0)$ — множество всех решений задачи Коши (1.1). Под решением понимается функция $x : [0,\infty) \to \mathbb{R}^n, x(0) = x_0$, абсолютно непрерывная на любом отрезке $[0,\Delta], \Delta > 0$, производная которой $\dot{x}(t) = dx(t)/dt \in G$ почти всюду по $t \in [0,\infty)$.

Вычисление пределов максимальных средних связано с построением правых частей усредненных дифференциальных включений в задачах с быстрыми и медленными переменными [1; 2]. В таких задачах указанные пределы определяют значение опорной функции множества допустимых скоростей вектора медленных переменных усредненного дифференциального включения в направлении данного орта из пространства медленных переменных.

В задаче (1.1), (1.2) начальный вектор x_0 соответствует начальным условиям по быстрым переменным исходной задачи. Поэтому достаточные условия независимости пределов от начальных условий существенны при построении правых частей усредненных дифференциальных включений.

[1]Филатов Олег Павлович (filatov_oleg@samaradom.ru), кафедра уравнений математической физики Самарского государственного университета, 443011, Российская Федерация, г. Самара, ул. Акад. Павлова, 1.

Если множество G не принадлежит подпространству из $\mathbb{R}^n$ размерности $(n-1)$, то компакт G называется *невырожденным.* В противном случае, если минимальная размерность подпространства, содержащего множество G, равна $s = 0, 1, \ldots, (n-1)$, то будем говорить о вырождении порядка $s = s(G)$, а компакт G называть *вырожденным.*

В [3, теорема 1] доказано, что для невырожденного компакта G предел максимального среднего $M(f)$ существует равномерно по начальному вектору x_0 : для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\Delta_0 > 0$ такое, что для всех $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $\Delta \geqslant \Delta_0$

$$|M(f) - \sup_{x \in X(x_0)} \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta f(x(t))\,dt| \leqslant \varepsilon,$$

при этом $M(f)$ не зависит от x_0.

Для любого вырожденного компакта G предел максимального среднего также существует, но, вообще говоря, зависит от начального вектора x_0. Действительно, пусть $G \subset L$, где подпространство $L \subset \mathbb{R}^n$ имеет размерность s, равную степени вырождения компакта. Пусть $e_1, \ldots, e_s$ — базис подпространства L, $e_1, \ldots, e_s, e_{s+1}, \ldots, e_n$ — базис в $\mathbb{R}^n$. Компакт G по отношению к подпространству L оказывается невырожденным. Если $\xi_1, \ldots, \xi_n$ — координаты разложения вектора x по указанному базису, то последние $n-s$ координат при вычислении предела максимального среднего будут неизменными параметрами, определяемыми начальным вектором. С другой стороны, согласно [3, теорема 1], предел максимального среднего существует. Следовательно, он может зависеть от начального вектора, как показывают простые примеры.

Если множество $G = \{\omega\}$ содержит единственный вектор ω, координаты которого называются *частотами*, то задача Коши (1.1) имеет единственное решение $x = x_0 + t\omega$. Предел максимального среднего сводится к временному среднему функции

$$m^*(f) = \lim_{\Delta \to \infty} \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta f(x_0 + t\omega)\,dt.$$

По классической теореме усреднения (см. [4; 5]), в случае независимости частот и 2π-периодичности функции f по каждой переменной $x_1, \ldots, x_n$, временное среднее совпадает с пространственным средним

$$m(f) = \lim_{\Delta \to \infty} \frac{1}{\Delta^n} \int_{K(\Delta)} f(x)\,dx, \quad x = (x_1, \ldots, x_n),$$

где $K(\Delta) = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \leqslant x_j \leqslant \Delta, j = 1, \ldots, n\}$. Дополнительно требуется хотя бы интегрируемость по Риману функции f на $K(\Delta)$ и локальная интегрируемость $f(x_0 + t\omega)$ на оси t. Более того, в условиях теоремы усреднения предел временного среднего существует равномерно по начальному вектору x_0.

Независимость частот означает: если $\langle k, \omega \rangle = k_1\omega_1 + \cdots + k_n\omega_n = 0$ для $k = (k_1, \ldots, k_n) \in Z^n$, то целочисленный вектор $k = 0$.

Теорема усреднения строго доказана в 1909 году П. Болем, В. Серпинским и Г. Вейлем.

В [6; 7] рассматривался одномерный случай вырождения правой части дифференциального включения (1.1.) $G = \{\alpha\omega, \omega\}$. Здесь два вектора допустимых скоростей $\alpha\omega$ и ω из $\mathbb{R}^n$. Постоянная $\alpha \in (0, 1], \omega \neq 0$. В условиях классической теоремы усреднения и естественных дополнительных условий доказано, что предел максимального среднего не зависит от начального вектора $x_0 \in \mathbb{R}^n$, и получено обобщение классического равенства $m(f) = m^*(f)$ с использованием теорем из [8]. Заметим, что в одномерном случае результаты не изменятся, если множество допустимых скоростей $G \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет следующему условию: выпуклая оболочка $co(G) = co(\{\alpha\omega, \omega\})$.

В данной работе рассматривается дифференциальное включение (1.1) с произвольной компактной правой частью G. Функция f предполагается непрерывной почти периодической. Для вектора $\omega \in co(G)$ вводится условие *независимости частот относительно спектра* функции f.

Доказано, что при условии независимости частот относительно спектра предел максимального среднего $M(f)$ существует равномерно по начальному вектору и не зависит от него. Основной результат — теорема 5.1.

2. Независимость частот относительно спектра

Напомним, непрерывная функция $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ называется почти периодической, если из любой последовательности $f(x + h_k), k = 1, 2 \ldots,$ где $h_k \in \mathbb{R}^n$, можно выделить равномерно сходящуюся подпоследовательность функций. Для такой функции справедлива теорема аппроксимации [5], согласно которой для любого $\varepsilon > 0$ существует тригонометрический многочлен u такой, что

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x) - u(x)| \leqslant \varepsilon, \tag{2.1}$$

где

$$u(x) = \sum_{\lambda\in\Lambda} c(\lambda) \exp(i\langle\lambda, x\rangle). \tag{2.2}$$

Здесь конечное множество векторов $\Lambda = \Lambda(u) \subset \mathbb{R}^n, i^2 = -1$, комплексная постоянная $c(\lambda) \neq 0$ для любого $\lambda \in \Lambda$. Спектром тригонометрического многочлена $u \neq 0$ называется множество $\Lambda(u)$. В случае $u = 0$ спектр $\Lambda(u) = \emptyset$. В общем случае спектр $\Lambda(f)$ почти периодической функции f состоит из тех $\lambda \in \mathbb{R}^n$, для которых пространственное среднее функции $f(x) \exp(-i\langle\lambda, x\rangle)$ по $x \in \mathbb{R}^n$ отлично от 0. Самое большее — спектр $\Lambda(f)$ содержит счетный набор векторов.

Базисом спектра $\Lambda(f)$ будем называть подмножество $\Lambda_b(f) \subset \Lambda(f)$, обладающее свойством: любой вектор из $\Lambda(f)$ единственным способом представляется в виде конечной линейной комбинации векторов базиса с *рациональными* коэффициентами.

Для дальнейшего изложения существенно, что в теореме аппроксимации можно считать $\Lambda(u) \subset \Lambda(f)$. Кроме того, из (2.1) следует

$$|M(f) - M(u)| \leqslant \varepsilon. \tag{2.3}$$

Пусть $\Lambda_{\mathbb{Q}}(f)$ — линейная оболочка спектра $\Lambda(f)$ над полем $\mathbb{Q}$ рациональных чисел.

Сформулируем условие *независимости частот относительно спектра* функции f: если $\lambda \in \Lambda_{\mathbb{Q}}(f)$ и $\langle\lambda, \omega\rangle = 0$, то $\lambda = 0$.

Отметим, в случае 2π-периодической функции спектр f состоит из целочисленных векторов, поэтому из независимости частот (если $\langle k, \omega\rangle = 0$ для $k \in Z^n$, то $k = 0$) следует независимость частот относительно спектра функции. В этом смысле для 2π-периодической функции условие независимости частот относительно спектра является более слабым требованием, так как сформулировано для конкретной функции, а не для всего семейства периодических функций.

3. Леммы о существовании

Рассмотрим тригонометрический многочлен (2.2), отличный от постоянной, который будем называть *нетривиальным.* Базис спектра

$$\Lambda_b(u) = \{\lambda_j \in \mathbb{R}^n : j = 1, \ldots, N\}$$

такой функции имеет мощность $N \geqslant 1$. Введем переменные $z_j = \langle \lambda_j, x\rangle, j = 1, \ldots, N$ и соответствующий вектор $z = (z_1, \ldots, z_N)$. Так как любой вектор $\lambda \in \Lambda(u)$ выражается в виде рациональной линейной комбинации базисных векторов, то любая переменная $z_\lambda = \langle \lambda, x\rangle, \lambda \in \Lambda(u) \setminus \Lambda_b(u)$ представима в виде рациональной линейной комбинации переменных $z_1, \ldots, z_N$. Пусть q — наименьшее общее кратное всех знаменателей соответствующих коэффициентов указанных линейных комбинаций. Тогда, если перейти к *базисным* переменным $y_j = q^{-1} z_j$, то тригонометрический многочлен u можно записать в виде функции $u = U(y)$ переменных $y = (y_1, \ldots, y_N)$ в следующем виде:

$$U(y) = \sum_{\lambda \in \Lambda(u)} c(\lambda) \exp(i\langle k(\lambda), y\rangle).$$

Здесь $k(\lambda) \in Z^N$ для любого $\lambda \in \Lambda(u)$. Таким образом, функция $U(y)$ оказывается 2π-периодической по каждой переменной $y_j, j = 1, \ldots, N$. Если ввести линейное отображение

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^N, \quad F(x) = q^{-1}(\langle \lambda_1, x\rangle, \ldots, \langle \lambda_N, x\rangle),$$

то $u(x) = U(F(x))$.

Далее будем использовать краткую запись "$(y) \bmod 2\pi$", которая означает, что вектор $y = (y_1, \ldots, y_N)$ рассматривается с точностью до прибавления к каждой координате y_j числа $k_j 2\pi$, где k_j — целое, $j = 1, \ldots, N$.

Лемма 3.1. Пусть существует вектор $\omega \in co(G)$, частоты которого независимы относительно спектра тригонометрического многочлена (2.2). Тогда предел максимального среднего $M(u)$ существует равномерно по начальному вектору $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и не зависит от x_0.

Доказательство. Для тривиального тригонометрического многочлена лемма очевидна. Поэтому далее $u \neq \mathrm{const}$. Введем среднее

$$S(\Delta, x, x_0) = \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta u(x(t))\, dt$$

на отрезке $[0, \Delta]$ вдоль решения $x \in X(x_0)$ задачи Коши (1.1). Воспользуемся критерием существования предела максимального среднего равномерно по начальному вектору x_0, не зависящего от последнего [2, теорема 5.2]. С учетом автономности дифференциального включения (1.1) критерий формулируется в следующем виде: для любого $\varepsilon > 0$ существует $\Delta_0 > 0$ такое, что для любых начальных векторов $a, b \in \mathbb{R}^n$ и произвольного решения $x_a \in X(a)$ найдется решение $x_b \in X(b)$, для которого

$$S(\Delta, x_a, a) \leqslant S(\Delta, x_b, b) + \varepsilon. \tag{3.1}$$

Решение $x_b \in X(b)$ по данному $x_a \in X(a)$ строим по следующей схеме. Для параметра $\varkappa > 0$ рассмотрим частное решение $x_c(t) = b + t\omega$ задачи

$$\dot{x} \in co(G), \quad x(0) = b$$

на отрезке $[0, t_*]$, где в качестве t_* возьмем наименьшее $t \geqslant 0$, для которого

$$\|(F(x_c(t_*)) - F(x_a)) \bmod 2\pi\| \leqslant \varkappa/2, \tag{3.2}$$

где $\|y\|^2 = y_1^2 + \cdots + y_N^2$. Такое t_* существует, так как координаты вектора $\Omega = F(\omega) \in \mathbb{R}^N$ независимы. Действительно, пусть

$$\sum_{j=1}^{N} k_j \Omega_j = q^{-1}\langle \sum_{j=1}^{N} k_j \lambda_j, \omega\rangle = 0, \quad k_j \in Z,\, j = 1, \ldots, N.$$

Так как $\lambda = \sum_{j=1}^{N} k_j \lambda_j \in \Lambda_{\mathbb{Q}}(f)$, то из условия независимости частот вектора ω относительно спектра функции f следует $\lambda = 0$. Отсюда $k_1 = \cdots = k_N = 0$, так как $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ — базис спектра. Поэтому по следствию из теоремы усреднения [4, следствие 2, с. 252] в некоторый момент времени $t = t_*$ выполняется (3.2), при этом $t_* \in [0, t_0(\varkappa)]$. Число $t_0(\varkappa)$ — общее для всех начальных векторов $b \in \mathbb{R}^n$. Согласно [9, теорема 9, с. 219] существует решение x_* задачи

$$\dot{x} \in G, \quad x(0) = b, \tag{3.3}$$

которое аппроксимирует решение x_c на отрезке $[0, t_*]$ в равномерной метрике с любой заданной точностью. Поэтому можно потребовать, чтобы $\|F(x_*(t)) - F(x_c(t)\| \leqslant \varkappa/2$ для любого $t \in [0, t_*]$. Отсюда и (3.2) получим

$$\|(F(x_*(t_*)) - F(x_a)) \bmod 2\pi\| \leqslant \varkappa. \tag{3.4}$$

Покажем теперь, что решение задачи (3.3)

$$x_b(t) = \begin{cases} x_*(t), & \text{если} \quad t \in [0, t_*], \\ x_*(t_*) + \int_{t_*}^{t} \dot{x}_a(\tau)\, d\tau, & \text{если} \quad t \in [t_*, \infty) \end{cases}$$

удовлетворяет оценке (3.1) при определенном выборе $\varkappa$ и Δ_0. Действительно, пусть $y_a(t) = F(x_a(t))$, $y_b(t) = F(x_b(t))$. Тогда

$$y_b(t) - y_a(t) = (F(x_*(t_*)) - F(x_a)) \bmod 2\pi \quad \forall\, t \geqslant t_*. \tag{3.5}$$

Имеем

$$S(\Delta, x_b, b) - S(\Delta, x_a, a) = \frac{1}{\Delta}\int_0^{t_*} (U(y_b(t)) - U(y_a(t)))\, dt +$$
$$+ \frac{1}{\Delta}\int_{t_*}^{\Delta} (U(y_b(t)) - U(y_a(t)))\, dt.$$

Отсюда и из (3.4) с учетом 2π-периодичности функции U получим

$$|S(\Delta, x_b, b) - S(\Delta, x_a, a)| \leqslant \frac{2r_0 t_0(\varkappa)}{\Delta} + \sup_{\|y-z\| \leqslant \varkappa} |U(y) - U(z)|, \tag{3.6}$$

где $r_0 = \sup\{|u(x)| : x \in \mathbb{R}^n\}, \Delta \geqslant t_0(\varkappa)$. В силу равномерной непрерывности функции U для данного $\varepsilon > 0$ существует такое $\varkappa_0 > 0$, что если $0 < \varkappa \leqslant \varkappa_0$, то $\sup_{\|y-z\| \leqslant \varkappa} |U(y) - U(z)| \leqslant \varepsilon/2$. Примем $\Delta_0 = \max\{t_0(\varkappa), 4r_0 t_0(\varkappa)/\varepsilon\}$. Тогда из (3.6) следует

$$|S(\Delta, x_b, b) - S(\Delta, x_a, a)| \leqslant \varepsilon, \quad \text{если } \Delta \geqslant \Delta_0,$$

а параметр $\varkappa \in (0, \varkappa_0]$. Таким образом, условие (3.1) выполнено. Лемма доказана.

Напомним, размерностью $dim(G)$ множества $G \subset \mathbb{R}^n$ называется размерность минимального аффинного многообразия, содержащего это множество. Пространство $\mathbb{R}^n$ снабжено скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Лемма 3.2. *Для невырожденного компакта $G \subset \mathbb{R}^n$ и почти периодической функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ существует вектор $\omega \in co(G)$ с независимыми частотами относительно спектра функции f.*

Доказательство. Так как G — невырожденное множество, то $dim(G) \geqslant n-1$. Если $dim(G) = n-1$, то существует гиперплоскость Π, содержащая G, при этом $0 \notin \Pi$. Следовательно, $co(G) \subset \Pi$. Пусть ν — мера Лебега на Π, тогда $\nu(co(G)) > 0$. С другой стороны, для любого $\lambda \in \Lambda(f), \lambda \neq 0$, его ортогональное дополнение пересекается с гиперплоскостью Π по множеству Π_λ, для которого $\nu(\Pi_\lambda) = 0$. Пусть H_0 — объединение всех Π_λ по всем $\lambda \in \Lambda(f)$. Так как $\Lambda(f)$ — счетное множество, то $\nu(H_0) = 0$. Следовательно, любой вектор $\omega \in co(G) \setminus H_0$ удовлетворяет условию независимости частот относительно спектра функции f. Если $dim(G) = n$, то внутренность $co(G) \neq \emptyset$ в пространстве $\mathbb{R}^n$. Поэтому в предыдущих рассуждениях гиперплоскость Π заменяется на $\mathbb{R}^n$. Лемма доказана.

4. Леммы для тригонометрического многочлена

Пусть $K(a, \Delta) = K(\Delta) + a, a \in \mathbb{R}^n$. Во всех леммах этого раздела речь идет о тригонометрическом многочлене (2.2) и связанных с ним следующих обозначениях: постоянная $r \geqslant \sup\{|u(x)| : x \in \mathbb{R}^n\}$;

$$G(a, \rho, c) = \{x \in K(a, 1) : c - \rho \leqslant u(x) \leqslant c + \rho\}, \quad \rho > 0, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Характеристическая функция множества $\{x \in \mathbb{R}^n : u(x) \geqslant c\}$ обозначается символом χ_c. Далее $\mu(\cdot)$ — мера Лебега в $\mathbb{R}^n$, все интегралы понимаются в смысле Лебега.

Лемма 4.1. Если тригонометрический многочлен u — нетривиальный, то для любого $\varepsilon > 0$ существует $\rho_0 > 0$ такое, что для любого вектора $a \in \mathbb{R}^n$ и любых $c \in \mathbb{R}, \rho \in (0, \rho_0]$ справедлива оценка $\mu(G(a, \rho, c)) < \varepsilon$.

Доказательство. Предположим противное. Тогда существуют $\varepsilon_0 > 0$, монотонно убывающая положительная последовательность $\rho_k \to 0$ при $k \to \infty, \rho_k < 1$, и последовательности $c_k \in [-r-1, r+1], a_k \in \mathbb{R}^n$ такие, что

$$\mu(G(a_k, \rho_k, c_k)) \geqslant \varepsilon_0, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

при этом можно считать, что последовательность c_k сходится к некоторому $c \in [-r-1, r+1]$ при $k \to \infty$. Функция $g_k(x) = u(a_k + x)$ на множестве

$$G_k = G(a_k, \rho_k, c_k) - a_k$$

из бруса $K(1)$ удовлетворяет неравенствам $c_k - \rho_k \leqslant g_k(x) \leqslant c_k + \rho_k$. Верхний предел $G_0 = \cap_{j=1}^{\infty} \cup_{s=j}^{\infty} G_k$ семейства множеств G_k имеет меру не менее ε_0. Чтобы не переходить к подпоследовательностям, можно считать, что последовательность функций g_k при $k \to \infty$ равномерно сходится к тригонометрическому многочлену $g \neq const$. Так как $c_k \to c$ при $k \to \infty$, то на множестве G_0 функция $g = c$. Поскольку $\mu(G_0) \geqslant \varepsilon_0$, то отсюда следует $g(x) = c$ для любого $x \in \mathbb{R}^n$. Получили противоречие. Лемма доказана.

В следующей лемме, напомним, χ_c — характеристическая функция множества $\{x \in \mathbb{R}^n : u(x) \geqslant c\}$.

Лемма 4.2. Для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $c \in [-r, r]$ существуют непрерывные почти периодические функции $p_c, q_c, P_c, Q_c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ такие, что для любых $\Delta \geqslant 1, c \in [-r, r]$ имеют место соотношения

$$p_c \leqslant \chi_c \leqslant q_c, \quad \frac{1}{\Delta^n} \int_{K(\Delta)} (q_c(x) - p_c(x))\, dx \leqslant \varepsilon. \tag{4.1}$$

$$P_c \leqslant \chi_c u \leqslant Q_c, \quad \frac{1}{\Delta^n} \int_{K(\Delta)} (Q_c(x) - P_c(x))\, dx \leqslant \varepsilon. \tag{4.2}$$

Более того, равномерно по $c \in [-r, r]$ существуют пространственные средние $m(\chi_c)$ и $m(\chi_c u)$, а для функций p_c, q_c, P_c, Q_c равномерно по $c \in [-r, r]$ и начальному вектору $x_0 \in \mathbb{R}^n$ существуют временные средние $m^*(p_c), m^*(q_c), m^*(P_c), m^*(Q_c)$.

Доказательство. Зафиксируем параметр $\delta \in (0, 1]$. Пусть $h_c = u - c$ и

$$p_c = \frac{h_c + |h_c|}{h_c + |h_c| + 2\delta^2}.$$

Брус $K(\Delta)$ разобьем на непересекающиеся множества

$$A_\Delta = \{x \in K(\Delta) : h_c(x) \geqslant \delta\}, \quad B_\Delta = \{x \in K(\Delta) : 0 \leqslant h_c(x) < \delta\},$$
$$C_\Delta = \{x \in K(\Delta) : h_c(x) < 0\}.$$

На множестве A_Δ имеем $\chi_c(x) - p_c(x) = 2\delta^2/(2h_c(x) + 2\delta^2) < \delta$. Так как $\chi_c(x) - p_c(x) = 0$ для любого $x \in C_\Delta$, то

$$\frac{1}{\Delta^n} \int_{K(\Delta)} (\chi_c(x) - p_c(x))\, dx \leqslant \frac{1}{\Delta^n} \int_{A_\Delta} \delta\, dx + \frac{1}{\Delta^n} \int_{B_\Delta} dx \leqslant \delta + \mu(B_\Delta)/\Delta^n.$$

Для данного $\varepsilon > 0$ по лемме 4.1 выберем $\delta_1 \in (0, 1]$ так, чтобы для любых $\delta \in (0, \delta_1]$ и $\Delta \geqslant 1$ выполнялось неравенство $\mu(B_\Delta)/\Delta^n \leqslant \varepsilon/4$. Тогда, если $\delta \leqslant \min\{\varepsilon/4, \delta_1\}, \Delta \geqslant 1$, то для любого $c \in [-r, r]$ получим

$$\frac{1}{\Delta^n} \int_{K(\Delta)} (\chi_c(x) - p_c(x))\, dx \leqslant \varepsilon/2. \tag{4.3}$$

Далее, пусть

$$q_c = \frac{(1 + 2\delta)(h_{c-\delta} + |h_{c-\delta}|)}{h_{c-\delta} + |h_{c-\delta}| + 2\delta^2}.$$

Покажем, что $q_c - \chi_c \geqslant 0$. Действительно, если $h_c(x) \geqslant 0$, то $\chi_c(x) = 1$, $h_{c-\delta}(x) \geqslant \delta$ и

$$q_c(x) - \chi_c(x) = \frac{2\delta h_{c-\delta}(x) - \delta^2}{h_{c-\delta}(x) + \delta^2} \geqslant \frac{\delta^2}{h_{c-\delta}(x) + \delta^2} > 0.$$

Если $h_c(x) < 0$, то $\chi_c(x) = 0$, поэтому $q_c(x) - \chi_c(x) = q_c(x) \geqslant 0$. Теперь получим оценки сверху для $q_c - \chi_c$. Брус $K(\Delta)$ разобьем на непересекающиеся множества

$$D_\Delta = \{x \in K(\Delta) : h_c(x) \geqslant \sqrt{\delta}\}, \quad E_\Delta = \{x \in K(\Delta) : -\delta \leqslant h_c(x) < \sqrt{\delta}\},$$
$$F_\Delta = \{x \in K(\Delta) : h_c(x) < -\delta\}.$$

Если $x \in D_\Delta$, то

$$q_c(x) - \chi_c(x) = \frac{2\delta h_{c-\delta}(x) - \delta^2}{h_{c-\delta}(x) + \delta^2} \leqslant 2|h_{c-\delta}(x)|\sqrt{\delta} \leqslant r_1\sqrt{\delta},$$

где $r_1 = 2(2r + 1)$. Если $x \in E_\Delta$, то $q_c(x) - \chi_c(x) \leqslant (1 + 2\delta) \leqslant 3$. Если $x \in F_\Delta$, то $q_c(x) - \chi_c(x) = 0$. Отсюда следует, что

$$\frac{1}{\Delta^n} \int_{K(\Delta)} (q_c(x) - \chi_c(x))\, dx \leqslant r_1\sqrt{\delta} + \frac{3\mu(E_\Delta)}{\Delta^n}.$$

Для данного $\varepsilon > 0$ по лемме 4.1 выберем $\delta_2 \in (0, 1]$ так, чтобы для любых $\delta \in (0, \delta_2]$ и $\Delta \geqslant 1$ выполнялось неравенство $\mu(E_\Delta)/\Delta^n \leqslant \varepsilon/12$. Тогда если $\delta \leqslant \min\{\varepsilon^2/16r_1^2, \delta_2\}$ и $\Delta \geqslant 1$, то для любого $c \in [-r, r]$ имеем

$$\frac{1}{\Delta^n} \int_{K(\Delta)} (q_c(x) - \chi_c(x))\, dx \leqslant \varepsilon/2. \tag{4.4}$$

Из (4.3), (4.4) следует, что если $\delta \leqslant \min\{\varepsilon/4, \varepsilon^2/(16r_1^2), \delta_1, \delta_2\}$, то для любого $c \in [-r, r]$ выполняется оценка

$$\frac{1}{\Delta^n}\int_{K(\Delta)}(q_c(x) - p_c(x))\,dx \leqslant \varepsilon. \tag{4.5}$$

Соотношения (4.1) доказаны. Для доказательства (4.2) умножим неравенства $p_c \leqslant \chi_c \leqslant q_c$ на $|h_c|$ и учтем, что $\chi_c h_c = \chi_c|h_c|, 0 \leqslant p_c \leqslant q_c$. После простых преобразований получим $P_c \leqslant \chi_c u \leqslant Q_c$, где $P_c = p_c|h_c| + \min\{cp_c, cq_c\}$, $Q_c = q_c|h_c| + \max\{cp_c, cq_c\}$. Нетрудно видеть, что функции P_c, Q_c почти периодические, при этом

$$Q_c - P_c \leqslant (|c| + 2r)(q_c - p_c) \leqslant 3r(q_c - p_c).$$

Отсюда следуют соотношения (4.2) при соответствующем выборе функций p_c и q_c.

Так как пространственные средние для почти периодических функций p_c, q_c, P_c, Q_c существуют, то в силу произвольности $\varepsilon > 0$ из (4.1), (4.2) следует существование пространственных средних $m(\chi_c), m(u\chi_c)$ для любого $c \in [-r, r]$.

Докажем теперь равномерную по $c \in [-r, r]$ сходимость пространственного среднего $m(\chi_c)$. Заметим, что функции p_c, q_c непрерывно зависят от параметра c равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ существует $\Delta_0 > 0$ такое, что для любых $\Delta \geqslant \Delta_0$ и $c \in [-r, r]$ выполняются неравенства

$$|m(p_c) - \frac{1}{\Delta^n}\int_{K(\Delta)} p_c(x)\,dx| \leqslant \varepsilon/2, \quad |m(q_c) - \frac{1}{\Delta^n}\int_{K(\Delta)} q_c(x)\,dx| \leqslant \varepsilon/2.$$

Так как $p_c \leqslant \chi_c \leqslant q_c$, то отсюда при $\Delta \geqslant \Delta_0$ и любом $c \in [-r, r]$ получим

$$m(p_c) - \varepsilon/2 - m(\chi_c) \leqslant \frac{1}{\Delta^n}\int_{K(\Delta)} \chi_c(x)\,dx - m(\chi_c) \leqslant m(q_c) + \varepsilon/2 - m(\chi_c). \tag{4.6}$$

Из (4.3) и (4.4) имеем $m(p_c) - m(\chi_c) \geqslant -\varepsilon/2, m(q_c) - m(\chi_c) \leqslant \varepsilon/2$. Отсюда и из (4.6) для всех $c \in [-r, r]$ и $\Delta \geqslant \Delta_0$ следует

$$|m(\chi_c) - \frac{1}{\Delta^n}\int_{K(\Delta)} \chi_c(x)\,dx| \leqslant \varepsilon.$$

Аналогично доказывается равномерная по $c \in [-r, r]$ сходимость пространственного среднего $m(u\chi_c)$.

Далее, существование временного среднего $m^*(p_c)$ следует из почти периодичности функции $p_c(x_0 + t\omega)$ по $t \in \mathbb{R}$. Аналогичный результат получим и для временных средних $m^*(q_c), m^*(P_c), m^*(Q_c)$.

Для доказательства равномерной сходимости временных средних заметим, что указанные функции зависят от начального вектора x_0 через $\exp(i\langle\lambda, x_0\rangle)$, $\lambda \in \Lambda(f)$. Поэтому, как следует из определения функций p_c, q_c, P_c, Q_c, они непрерывно зависят от параметра $(c, \zeta) \in [-r, r] \times S$ равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$, где $S = S_1 \times \cdots \times S_1$ (число элементов произведения равно мощности множества $\Lambda(u)$, $S_1 = \{\exp(i\varphi) : \varphi \in \mathbb{R}\}$. Так как множество $[-r, r] \times S$ из соответствующего конечномерного пространства является компактным, то для любого $\varepsilon > 0$ существует Δ_0 такое, что для любых $c \in [-r, r], x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $\Delta \geqslant \Delta_0$, например, для функции p_c, выполняется неравенство

$$|\frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta p_c(x_0 + t\omega)\,dt - m^*(p_c)| \leqslant \varepsilon.$$

Аналогичные соотношения имеют место и для временных средних $m^*(q_c), m^*(P_c), m^*(Q_c)$. Лемма доказана.

Лемма 4.3. Пространственные средние $m(\chi_c), m(u\chi_c)$ для тригонометрического многочлена u непрерывно зависят от параметра $c \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Докажем, например, непрерывность по c среднего $m(\chi_c)$. Пусть для определенности $c < s$. Брус $K(\Delta)$ разобьем на множества

$$A_\Delta = \{x \in K(\Delta) : f(x) < c\}, \quad B_\Delta = \{x \in K(\Delta) : c \leqslant f(x) < s\}$$

и множество

$$C_\Delta = \{x \in K(\Delta : f(x) \geqslant s\}.$$

Если $x \in A_\Delta$, то $\chi_c(x) = \chi_s(x) = 0$. Если $x \in C_\Delta$, то $\chi_c(x) = \chi_s(x) = 1$. Следовательно,

$$\frac{1}{\Delta^n} \int_{K(\Delta)} (\chi_s(x) - \chi_c(x))\, dx = \frac{1}{\Delta^n} \int_{B(\Delta)} (\chi_s(x) - \chi_c(x))\, dx.$$

Отсюда

$$|\frac{1}{\Delta^n} \int_{K(\Delta)} (\chi_s(x) - \chi_c(x))\, dx| \leqslant \frac{\mu(B_\Delta)}{\Delta^n}. \tag{4.7}$$

По лемме 4.1 для $\varepsilon > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $0 \leqslant s - c \leqslant \delta$, то $\mu(B_\Delta)/\Delta^n \leqslant \varepsilon$ при любом $\Delta \geqslant 1$. С учетом этого неравенства, после перехода к пределу в (4.7) при $\Delta \to \infty$, получим $|m(\chi_s) - m(\chi_c)| \leqslant \varepsilon$, если $0 \leqslant s - c \leqslant \delta$. Аналогично доказывается непрерывность пространственного среднего $m(u\chi_c)$. Лемма доказана.

Лемма 4.4. Для любого $\varepsilon > 0$ и для любого $c \in [-r, r]$ существуют тригонометрические многочлены u_c, v_c, U_c, V_c, спектры которых принадлежат множеству $\Lambda_{\mathbb{Q}}(u)$, такие, что для любых $\Delta \geqslant 1, c \in [-r, r]$ имеют место соотношения

$$u_c \leqslant \chi_c \leqslant v_c, \quad \frac{1}{\Delta^n} \int_{K(\Delta)} (v_c(x) - u_c(x))\, dx \leqslant \varepsilon, \tag{4.8}$$

$$U_c \leqslant \chi_c u \leqslant V_c, \quad \frac{1}{\Delta^n} \int_{K(\Delta)} (V_c(x) - U_c(x))\, dx \leqslant \varepsilon. \tag{4.9}$$

Доказательство. Докажем, например, соотношения (4.8). По лемме 4.2 существуют непрерывные почти периодические функции p_c, q_c такие, что при $\Delta \geqslant 1$ выполняются неравенства

$$p_c \leqslant \chi_c \leqslant q_c, \quad \frac{1}{\Delta^n} \int_{K(\Delta)} (q_c(x) - p_c(x))\, dx \leqslant \varepsilon/3.$$

По построению функции p_c, q_c получаются из некоторых непрерывных 2π-периодических функций, зависящих от переменных $y = (y_1, \ldots, y_N)$, заменой $y = F(x)$ (см. п. 4). Спектр 2π-периодической функции — счетное (или конечное) множество целочисленных векторов из Z^N. Поэтому по теореме аппроксимации (см. (2.1)) можно подобрать соответствующие тригонометрические многочлены, спектры которых также принадлежат Z^N, а затем выполнить замену $y = F(x)$. В результате получим тригонометрические многочлены u_c, v_c вида (2.2), для которых выполняются требуемые включения $\Lambda(u_c), \Lambda(v_c) \subset \Lambda_{\mathbb{Q}}(u)$ и оценки

$$0 \leqslant p_c - u_c \leqslant \varepsilon/3, \quad 0 \leqslant v_c - q_c \leqslant \varepsilon/3.$$

Отсюда при $\Delta \geqslant 1$ получим

$$\frac{1}{\Delta^n} \int_{K(\Delta)} (v_c(x) - u_c(x))\, dx =$$

$$= \frac{1}{\Delta^n}\int_{K(\Delta)} (p_c(x) - u_c(x) + q_c(x) - p_c(x) + v_c(x) - q_c(x))\,dx \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon.$$

Аналогично доказываются соотношения (4.9). Лемма доказана.

Лемма 4.5. Пусть частоты вектора $\omega \in \mathbb{R}^n$ независимы относительно спектра тригонометрического многочлена u. Тогда a) $m(u) = m^*(u)$; b) существуют временные средние $m^*(\chi_c), m^*(u\chi_c)$ равномерно по $c \in [-r,r]$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$, которые совпадают с соответствующими пространственными средними: $m^*(\chi_c) = m(\chi_c)$, $\quad m^*(u\chi_c) = m(u\chi_c)$.

Доказательство. (a $\Leftarrow$). В силу линейности операций вычисления средних достаточно обосновать для частного случая $u(x) = \exp(i\langle\lambda, x\rangle)$. Так как частоты вектора $\omega \in \mathbb{R}^n$ независимы относительно спектра тригонометрического многочлена u, то для любого $\lambda \in \Lambda(u), \lambda \neq 0$ скалярное произведение $\langle\lambda,\omega\rangle \neq 0$. Поэтому непосредственные вычисления приводят к равенствам $m(u) = m^*(u) = 0$. Если $\lambda = 0$, то $m(1) = m^*(1) = 1$.

(b $\Leftarrow$). Доказательство проведем, например, для функции χ_c. По лемме 4.4 для данного $\varepsilon > 0$ найдутся тригонометрические многочлены u_c, v_c и число $\Delta_0 = \Delta_0(\varepsilon) > 0$ такие, что для любого $\Delta \geqslant \Delta_0$ и любых $c \in [-r,r]$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ выполняются соотношения

$$|\frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta u_c(x_0+t\omega)\,dt - m^*(u_c)| \leqslant \varepsilon, \quad |\frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta v_c(x_0+t\omega)\,dt - m^*(v_c)| \leqslant \varepsilon, \tag{4.10}$$

$$\frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta u_c(x_0+t\omega)\,dt \leqslant \frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta \chi_c(x_0+t\omega)\,dt \leqslant \frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta v_c(x_0+t\omega)\,dt.$$

Отсюда для любых $c \in [-r,r], x_0 \in \mathbb{R}^n$ при $\Delta \geqslant \Delta_0$ получим

$$m^*(u_c) - \varepsilon \leqslant \frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta \chi_c(x_0+t\omega)\,dt \leqslant m^*(v_c) + \varepsilon. \tag{4.11}$$

Так как $\Lambda(u_c), \Lambda(v_c) \subset \Lambda_{\mathbb{Q}}(u)$, то к тригонометрическим многочленам u_c и v_c можно применить заключение a), поэтому $m^*(u_c) = m(u_c), m^*(v_c) = m(v_c)$. Далее, по лемме 4.4

$$m(u_c) \leqslant m(\chi_c) \leqslant m(v_c), \quad 0 \leqslant m(v_c) - m(u_c) \leqslant \varepsilon. \tag{4.12}$$

Из (4.11), (4.12) следует, что для любых $c \in [-r,r], x_0 \in \mathbb{R}^n$ при $\Delta \geqslant \Delta_0$

$$|\frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta \chi_c(x_0+t\omega)\,dt - m(\chi_c)| \leqslant 3\varepsilon.$$

Отсюда, в силу произвольности ε, получим $m^*(\chi_c) = m(\chi_c)$. Аналогично доказывается существование временного среднего для функции $u\chi_c$. Лемма доказана.

Для тригонометрического многочлена (2.2) введем обозначения: $u_0 = u - m(u)$, χ_c^0 — характеристическая функция множества $\{x \in \mathbb{R}^n : u_0(x) \geqslant c\}$,

$$M_1^*(u_0) = \varliminf_{\Delta\to\infty} \sup_{c\geqslant 0} \frac{(k-1)I^*(c,\Delta)}{1+(k-1)\mu^*(c,\Delta)}, \quad k = 1/\alpha, \tag{4.13}$$

$$M_1(u_0) = \sup_{c\geqslant 0} \frac{(k-1)m(u_0\chi_c^0)}{1+(k-1)m(\chi_c^0)}.$$

Здесь

$$I^*(c,\Delta) = \frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta \chi_c^0(t\omega)u_0(t\omega)\,dt, \quad \mu^*(c,\Delta) = \frac{1}{\Delta}\int_0^\Delta \chi_c^0(t\omega)\,dt.$$

Лемма 4.6. Пусть 1) компакт $G \subset \mathbb{R}^n$; 2) $s(G) = 1$ и $co(G) = co(\{\alpha\omega, \omega\})$, где $\alpha \in (0, 1]$; 3) частоты вектора ω независимы относительно спектра тригонометрического многочлена u. Тогда

$$M(u) = m(u) + M_1(u_0). \tag{4.14}$$

Доказательство. Для вычисления предела максимального среднего существенны только экстремальные скорости $\alpha\omega$ и ω [8]. Следовательно, дифференциальное включение (1.1) принимает вид

$$\dot{x} \in \{\alpha\omega, \omega\}, \quad x(0) = x_0,$$

где можно принять $x_0 = 0$ по лемме 3.1. По лемме 4.5 $m(u_0) = 0 = m^*(u_0)$. Следовательно, функция $g_0(\tau) = u_0(\tau\omega)$ имеет нулевое пространственное (одномерное) среднее на оси τ. Заметим, что

$$M(u) = m(u) + M(u_0), \tag{4.15}$$

где

$$M(u_0) = \lim_{\Delta\to\infty} \sup_{\tau\in T} \frac{1}{\Delta} \int_0^\Delta g_0(\tau(t))\, dt.$$

Здесь точная верхняя граница вычисляется по всем решениям T дифференциального включения

$$\dot{\tau} \in \{\alpha, 1\}, \quad \tau(0) = 0.$$

Согласно [8], выполняется соотношение $M(u_0) = M_1^*(u_0)$, которое в [8] доказано для локально интегрируемой по Лебегу функции g_0 с нулевым средним. По лемме 4.5, в силу равномерности существования временных средних $m^*(\chi_c^0), m^*(u_0\chi_c^0)$ по параметру c, в правой части (4.13) можно изменить порядок операций вычисления точной верхней границы и предельного перехода по Δ. В результате получим $M(u_0) = M_1^*(u_0) = M_1(u_0)$. Отсюда и (4.15) получим соотношение (4.14). Лемма доказана.

5. Теорема усреднения

По теореме аппроксимации (см. (2.1)) для непрерывной почти периодической функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется тригонометрический многочлен u_ε вида (2.2) такой, что

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^n} |f(x) - u^\varepsilon(x)| \leqslant \varepsilon, \quad \Lambda(u^\varepsilon) \subset \Lambda(f).$$

Введем следующие обозначения: $u_0^\varepsilon = u^\varepsilon - m(u^\varepsilon)$; χ_c^ε — характеристическая функция множества $\{x \in \mathbb{R}^n : u_0^\varepsilon(x) \geqslant c\}$.

Теорема 5.1. Пусть 1) функция f — непрерывная почти периодическая; 2) компакт $G \subset \mathbb{R}^n$; 3) существует вектор $\omega \in co(G)$ с независимыми частотами относительно спектра $\Lambda(f)$. Тогда a) предел максимального среднего $M(f)$ существует равномерно по начальному вектору $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и не зависит от него; b) если $S(G) = 1$ и компакт $G = \{\omega\}$, то $m(f) = m^*(f)$; c) если $s(G) = 1$ и $co(G) = co(\{\alpha\omega, \omega\})$, где $\alpha \in (0, 1]$, то

$$M(f) = m(f) + \lim_{\varepsilon\to+0} \sup_{c\geqslant 0} \frac{(k-1)m(u_0^\varepsilon\chi_c^\varepsilon)}{1 + (k-1)m(\chi_c^\varepsilon)}, \quad k = 1/\alpha. \tag{5.1}$$

Доказательство. (a $\Leftarrow$). Существование $M(f)$, как отмечалось в п. 2, следует из работы [3] для произвольного компакта $G \subset \mathbb{R}^n$. Но этот результат можно получить и независимо от [3]. Для этого достаточно воспользоваться критерием существования предела максимального среднего из доказательства леммы 3.1 и теоремой аппроксимации для почти периодической функции, выражаемой соотношением (2.1), где для тригонометрического многочлена u выполняется включение $\Lambda(u) \subset \Lambda(f)$.

Допустим теперь, что предел максимального среднего зависит от начального вектора x_0. В таком случае существуют начальные векторы a и b и соответствующие максимальные средние $M(f)_a$ и $M(f)_b$, для которых $|M(f)_b - M(f)_a| \geqslant \varepsilon_0$, где $\varepsilon_0 > 0$. Примем $\varepsilon = \varepsilon_0/3$. По теореме аппроксимации существует тригонометрический многочлен u такой, что выполняются соотношения (2.1), (2.3) и, более того, спектр $\Lambda(u) \subset \Lambda(f)$. Следовательно, частоты вектора ω независимы и относительно спектра $\Lambda(u)$. Поэтому по лемме 1 предел максимального среднего $M(u)$ не зависит от $x_0 \in \mathbb{R}^n$. Из (2.3) и неравенства треугольника получим $|M(f)_b - M(f)_a| \leqslant 2\varepsilon < \varepsilon_0$, что противоречит предположению $|M(f)_b - M(f)_a| \geqslant \varepsilon_0$. Равномерность предела $M(f)$ по начальному вектору x_0 следует из равномерности предела максимального среднего $M(u)$ (см. лемму 3.1) и соотношения (2.1).

(b $\Leftarrow$). Если $G = \{\omega\}$, то для любого тригонометрического многочлена u, для которого $\Lambda(u) \subset \Lambda(f)$, равенство $m(u) = m^*(u)$ проверяется непосредственно. Поэтому для функции f утверждение b) следует из теоремы аппроксимации, так как соотношение (2.1) можно подчинить включению $\Lambda(u) \subset \Lambda(f)$.

(c $\Leftarrow$). По лемме 4.6 выполняется соотношение $M(u^\varepsilon) = m(u^\varepsilon) + M_1(u_0^\varepsilon)$. Перейдем к пределу при $\varepsilon \to +0$ в этом равенстве и учтем, что

$$\lim_{\varepsilon \to +0} M(u^\varepsilon) = M(f), \quad \lim_{\varepsilon \to +0} m(u^\varepsilon) = m(f),$$

получим (5.1). Теорема доказана.

Из леммы 3.2 следует, что для невырожденного компакта G условие 3) теоремы выполняется, поэтому предел максимального среднего $M(f)$ существует равномерно по начальному вектору $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и не зависит от него, как и положено в невырожденном случае [3, теорема 1]. Заметим, что для 2π-периодической функции $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ соотношение (5.1) упрощается и принимает вид

$$M(f) = m(f) + \sup_{c \geqslant 0} \frac{(k-1)I_c}{(2\pi)^n + (k-1)\lambda_c},$$

где $f_0 = f - m(f)$, $I_c = \int_{A_c} f_0(x)\,dx$, $A_c = \{x \in K(2\pi) : f_0(x) \geqslant c\}$, а λ_c — жорданова мера множества A_c. Этот результат для интегрируемой по Жордану периодической функции получен в [6].

Литература

[1] Филатов О.П., Хапаев М.М. Усреднение систем дифференциальных включений. М.: Изд-во МГУ, 1998. 160 с.

[2] Филатов О.П. Усреднение дифференциальных включений и пределы максимальных средних. Самара: Изд-во "Универс групп", 2009. 176 с.

[3] Филатов О.П. Существование пределов максимальных средних // Математические заметки. 2000. Т. 67. Вып. 3. С. 433–440.

[4] Арнольд В.И. Математические методы классической механики М.: Наука, 1989. 472 с.

[5] Левитан Б.М. Почти периодические функции. М.: Гостехтеоретиздат, 1953. 396 с.

[6] Филатов О.П. Теорема об усреднении для неопределенных условно-периодических движений // Математические заметки. 2011. Т. 90. Вып. 2. С. 318–320.

[7] Филатов О.П. Теорема усреднения и неопределенные условно-периодические движения // Вестник Самарского госуниверситета. Естественнонаучная серия. 2010. № 6(80). С. 87–92.

[8] Филатов О.П. Вычисление пределов максимальных средних // Математические заметки. 1996. Т. 59. Вып. 5. С. 759–767.

[9] Благодатских В.И., Филиппов А.Ф. Дифференциальные включения и оптимальное управление. Труды математического института АН СССР. 1985. С. 194–252.

Поступила в редакцию 10/*II*/2012;
в окончательном варианте — 10/*II*/2012.

THE THEOREM OF AVERAGING FOR THE ALMOST-PERIODIC FUNCTIONS

 O.P. Filatov[2]

It is proved that the limit of maximal mean is an independent variable of initial conditions if a vector exists from the convex hull of a compact set out of a finite-dimensional space and the components of vector are independent variables with respect to the spectrum of almost-periodic function. The compact set is the right hand of differential inclusion. The limit of maximal mean is taken over all solutions of the Couchy problem for the differential inclusion.

Key words: limit of maximal mean, theorem of averaging, differential inclusion, compact right hand, almost-periodic function, independent frequencies with respect to spectrum.

Paper received 10/*II*/2012.
Paper accepted 10/*II*/2012.

[2]Filatov Oleg Pavlovich (`filatov_oleg@samaradom.ru`), the Dept. of Equations of Mathematical Physics, Samara State University, Samara, 443011, Russian Federation.