

Федеральное агентство по образованию  
Государственное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
«Челябинский государственный университет»

Е.А. Постников

# МОДЕЛИРОВАНИЕ И АНАЛИЗ ФИНАНСОВЫХ РЫНКОВ

*Лекции*

Челябинск  
2011

## Тема 1. ВВЕДЕНИЕ В ФИНАНСОВЫЕ РЫНКИ

### 1. Основные понятия

Все участники финансового рынка выбирают среди широкого спектра финансовых инструментов различные классы активов, к которым относятся акции, облигации, драгоценные металлы, произведения искусства и т.д.

Под *активом* понимается любой вид собственности, имеющий цену (стоимость), реализуемую при рыночном обмене. Активы делятся на материальные и нематериальные.

*Материальные активы* обладают физическими свойствами, в значительной мере определяющими их стоимость (здания, оборудование, земля).

*Нематериальные активы* представляют собой законные права на некоторую будущую прибыль. *Финансовые активы (финансовые инструменты или ценные бумаги)* являются примером нематериальных активов. В этом случае под будущей прибылью обычно понимается право получить определенные наличные денежные средства в перспективе. Примером финансовых активов являются: облигация, выпущенная Казначейством государства; корпоративная облигация; обыкновенные акции предприятия.

В дальнейшем будем рассматривать только инвестиции в финансовые активы.

Учреждение, берущее на себя обязательство осуществить в будущем поток платежей, называют *эмитентом* финансового актива. Владельца финансового актива называют *инвестором*.

Под *финансовым рынком* понимается институциональная структура или механизм, обеспечивающий создание и обмен финансовыми активами. В развитых экономически странах финансовые рынки обеспечивают определенную инфраструктуру для торговли ценными бумагами.

Существует много различных классификаций финансовых рынков. Одной из таких является:

- 1) *Денежный рынок* – оптовый рынок краткосрочных долговых инструментов, то есть финансовых активов, дающих право на получение фиксированного дохода в будущем, со сроком погашения менее 1 года. Включают следующие инструменты: казначейские векселя, банковские акцепты, краткосрочные ценные бумаги федеральных агентств, краткосрочные муниципальные долговые обязательства, депозитные сертификаты, соглашения РЕПО, коммерческие бумаги и федеральные фонды.
- 2) *Рынок облигаций* – рынок для торговли облигациями со сроком погашения более 1 года. Включают следующие инструменты: ценные бумаги Казначейства страны; ценные бумаги федеральных агентств; корпоративные облигации; муниципальные ценные бумаги; ипотечные облигации и облигации, обеспеченные закладной; ценные бумаги, обеспеченные активами; еврооблигации.
- 3) *Валютный рынок* – рынок обмена валют.
- 4) *Фондовый рынок*, или рынок акций – рынок для торговли долевыми инструментами, то есть финансовыми активами, дающими право на получение определенной суммы в зависимости от доходов, получаемых после оплаты

всех долговых обязательств эмитента.

Инструменты финансового рынка делятся на два класса: основные и производные ценные бумаги. К *основным бумагам* относятся акции и прочие долевыe ценные бумаги, бонь. *Производными финансовыми инструментами* являются контракты, цены которых являются производными от цен базисного финансового актива. И основными типами производных контрактов являются опционные и фьючерсные контракты.

Финансовые рынки выполняют три важные экономические функции:

1. Формирование цены актива в процессе взаимодействия продавцов и покупателей.
2. Предложение инвестору механизма для осуществления сделок (купли/продажи) с финансовыми активами. Благодаря этому свойству говорят, что рынок обеспечивает *ликвидность*, то есть возможность обменивать актив на наличные деньги. Это особенно важно в тех случаях, когда инвестору необходимо быстро продать актив. Без вторичного рынка инвестору, владеющему долговым обязательством, пришлось бы дожидаться его погашения, а владельцу акции – принудительной или добровольной ликвидации компании.
3. Уменьшение издержек или накладных расходов. Благодаря финансовым рынкам снижаются расходы на рекламу актива, поиск второй стороны в сделке, получение информации и оценку достоинств (инвестиционных качеств) финансовых активов.

Одновременно с процессом глобализации экономики в целом происходит и *глобализация финансовых рынков*. Следствием этого является то, что потенциальные инвесторы и эмитенты в любой стране могут выйти за пределы собственных внутренних рынков.

## **2. Системы рыночных торгов**

Вторичные торги происходят в так называемых системах рыночных торгов, к которым относятся: *биржи, внебиржевой рынок, независимые системы электронных торгов*. Системы рыночной торговли основаны на работе брокеров и дилеров.

*Биржа* – финансовый институт, организующий и проводящий торги различными активами и обязательствами. Для получения права на торговлю ценными бумагами в зале биржи фирмы или физические лица должны купить место на бирже, становясь ее членами. Члены биржи для совершения сделок используют общие средства.

Акции, которые обращаются на бирже, называются *котируемыми акциями*. Для того чтобы акции стали котируемыми, компания должна подать заявку и обеспечить выполнение всех требований, установленных на той бирже, где планируется торговля. Акции могут котироваться сразу на нескольких биржах.

Фондовая биржа выполняет следующие функции:

- мобилизацию и концентрацию временно свободных денежных накоплений и сбережений путем продажи ценных бумаг биржевым посредникам на первичном и вторичном фондовых рынках;

- кредитование и финансирование государства и частного сектора путем покупки их ценных бумаг на первичном рынке и перепродажи на вторичном, а также кредитование и финансирование биржевых спекулянтов путем осуществления сделок на вторичном рынке;
- концентрацию операций с ценными бумагами, установление на них цен, отражающих уровень и соотношение спроса и предложения.

Помимо официальной фондовой биржи, в ряде городов, являющихся центрами биржевой торговли, существуют еще полуофициальные или неофициальные биржи.

Ведущая роль в мировом биржевом обороте принадлежит сегодня именно фондовым биржам.

В настоящее время в мире действует около 200 фондовых бирж.

### Крупнейшие фондовые биржи мира

Биржи	Рейтинг по обороту
Нью-Йоркская (NYSE)	1
Лондонская	2
Токийская	3
Средне-Западная (США)	4
Осакская	5
Тихоокеанская (США)	6
Торонтская	7
Американская	8
Амстердамская	9
Парижская	10

В США 13 бирж. В Великобритании 22 фондовые биржи. Лондонская фондовая биржа является одним из ведущих мировых финансовых центров. Более половины обращающихся на ней ценных бумаг иностранного происхождения. Во Франции 8 фондовых бирж, крупнейшая – Парижская фондовая биржа. В Германии – 7 фондовых бирж, крупнейшая – во Франкфурте-на-Майне. В Японии 9 фондовых бирж, крупнейшая – Токийская фондовая биржа.

*Внебиржевой рынок* – система торгов, на которой обращаются котируемые и некотируемые акции, а также облигации. Торги ведутся многими маркет-мейкерами, которые связываются между собой посредством сетевых дисплеев и телефонов. Дилеры таких рынков не являются членами биржи и, следовательно, могут снижать свои комиссионные.

NASDAQ (National Association of Securities Dealers Automated Quotation – Автоматизированные котировки Национальной ассоциации дилеров по ценным бумагам) – американский внебиржевой рынок, специализирующийся на акциях высокотехнологичных компаний (производство электроники, программного обеспечения и т. п.). Одна из трёх основных фондовых бирж США (наряду с NYSE и AMEX).

*Независимые электронные торговые системы* – специальные компьютеризированные системы, которые позволяют инвесторам осуществлять перекрестные торги (т.е. подыскивать покупателей и продавцов) напрямую. Двумя наиболее известными такими системами являются INSTINET и POSIT.

Использование таких систем позволяет снизить затраты на проведение сделки.

Отличие биржевого рынка от внебиржевого показано в таблице.

### Биржевой и внебиржевой рынки

Критерии сравнения	Внебиржевой рынок	Биржевой рынок
Инструменты	Форвардные контракты	Фьючерсные контракты
	Опционы	Опционы
Характеристики контрактов	Любые, зависят от соглашений между покупателем и продавцом.	Стандартизованные. Биржа сама определяет основные характеристики контрактов. Характеристики всех обращающихся на бирже контрактов определяются в специальных биржевых документах (спецификации контрактов).
Участники сделки	Покупатель и продавец.	Покупатель, продавец, биржа.
Гарантии исполнения контракта	Нет. Ни покупатель ни продавец не застрахованы от неисполнения контракта.	Биржа

### 3. Фондовые индексы

*Фондовый индекс* – это математически вычисляемая характеристика относительного уровня рынка ценных бумаг в произвольный момент времени. Является показателем состояния и динамики рынка ценных бумаг. Через сопоставление текущего значения индекса с его предыдущими значениями можно оценить поведение рынка, его реакцию на те или иные изменения макроэкономической ситуации, различные корпоративные события (слияния, поглощения, дробления акций, отставки и назначения ведущих менеджеров), спекулятивные процессы. Индексы и входящие в него акции торгуются в национальной валюте. Рост индекса указывает на хорошее состояние экономики страны, что влечет укрепление валюты, привлекает иностранных инвесторов.

В зависимости от ценных бумаг, используемых при расчете, индекс может характеризовать:

- рынок в целом;
- рынок определенного класса ценных бумаг (государственные обязательства, корпоративные облигации, акции и т. п.);
- отраслевой рынок (ценные бумаги компаний одной отрасли: нефтяной, электроэнергетики, металлургии, машиностроения, телекоммуникации, транспорта, страхования и другие).

Сравнение динамики различных индексов может показать, какие сектора экономики развиваются самыми быстрыми темпами. Индекс может представлять национальный фондовый рынок в целом или определенную торговую площадку на этом рынке (например, индекс фондовой биржи). Фондовые индексы рассчитываются и публикуются различными организациями, чаще всего информационными или рейтинговыми агентствами и фондовыми биржа-

ми.

#### 4. Российский финансовый рынок

Финансовый рынок в России существует с 1991 года. Первым этапом его формирования (1991 – весна 1992 г.) было появление акционерных обществ, всех возможных видов ценных бумаг со всеми возможными сроками действия, эмитированными в основном корпорациями и государством.

Второй этап (1992-1994 гг.): приватизация и развитие рынка государственных ценных бумаг.

Третий этап (1994-1998 гг.): появление качественно новой нормативной базы для РЦБ, создание и развитие РТС, развитие ликвидности и капитализации рынка, международное признание.

Крупнейшая биржа России – Московская межбанковская валютная биржа (ММВБ, [www.micex.ru](http://www.micex.ru)) организует торги валютой, валютными фьючерсами, акциями, ГКО, корпоративными и еврооблигациями.

Одна из крупнейших фондовых бирж в России и Восточной Европе – Российская торговая система (РТС, [www.rts.ru](http://www.rts.ru)) организует торги акциями, облигациями, паями, фьючерсами и опционами.

Другие биржи:

- Санкт-Петербургская валютная биржа (СПВБ), [www.spccx.ru](http://www.spccx.ru)
- Фондовая биржа Санкт-Петербург (ФБ СПб), [www.spbex.ru](http://www.spbex.ru)
- Московская фондовая биржа (МФБ), [www.mse.ru](http://www.mse.ru)
- Екатеринбургская фондовая биржа (ЕФБ), [www.esex.ru](http://www.esex.ru), а также еще 7 бирж.

Основные особенности современного российского фондового рынка.

*Первая и основная особенность фондового рынка в России*, его основу, составляют государственные монополии, затем следует нефтегазовый сектор, металлургия и связь. Список компаний по роли в формировании российского фондового рынка возглавляют «Сбербанк России», ОАО «Газпром», АО «Полюс Золото», «ЛУКОЙЛ», ЗАО Банк «ВТБ», АО «Татнефть им. В.Д. Шашина», ГМК «Норильский Никель», НК «Роснефть», ОАО «Сургутнефтегаз», ОАО «Новолипецкий металлургический комбинат», ОАО «Уралсвязьинформ», ОАО «Северсталь», ОАО «Сургутнефтегаз».

*Вторая особенность*: высокие риски, свойственные развивающимся рынкам.

*Третья особенность* относится не только к фондовому рынку, но и в целом к нормативно-правовой системе России. Это недоработанное законодательство. Как следствие, неразвитость рынка производных ценных бумаг.

*Четвертая особенность*: рынок живо реагирует лишь на корпоративные новости и политиков.

*Пятая особенность*: перспективы роста.

## Тема 2. ФОРВАРД

### 1. Форвардный контракт

*Форвардный контракт* – это договор купли-продажи актива по определенной цене исполнения  $k$  в определенный момент времени в будущем  $T$ .

*Покупатель форвардного контракта* должен в момент времени  $T$  оплатить определенное количество денег  $k$  за передаваемый ему другой стороной контракта актив.

*Продавец форвардного контракта* должен в момент времени  $T$  передать актив другой стороне контракта и получить за него определенное количество денег  $k$ .

*Особенности форвардного контракта.*

- Это не биржевой продукт.
- Активом могут быть любые товары, ценные бумаги, валюта.
- Срок может быть любой: от нескольких дней до нескольких лет. Из-за быстро меняющейся конъюнктуры рынка, преобладают краткосрочные форвардные контракты. Долгосрочные контракты заключаются при наличии длительных отношений между продавцами и покупателями.

- Нет ограничений на варианты условий. Стороны могут договариваться о виде, количестве и качестве актива, его цене, времени поставки, времени и формах расчетов, гарантиях, санкциях за неисполнение обязательств и т.п. С одной стороны, индивидуальность форвардного контракта является его достоинством, т.к. он может быть приспособлен практически к любым требованиям участников сделки. С другой стороны, на практике не удобно каждый раз составлять новый вариант форвардного контракта.

- Нет платы за заключение контракта, отношения сторон основываются на доверии. Поэтому форвард отражает устойчивость рыночных отношений.

- Каждая сторона непосредственно несет ответственность перед другой стороной. Поэтому имеет значение репутация партнеров.

- Ни одна из сторон не вправе отказаться от исполнения принятых на себя обязательств. Досрочное прекращение обязательств возможно только с согласия противоположной стороны. Теоретически, можно отказаться от обязательств, если найти эквивалентную замену. Но из-за индивидуального характера контракта это маловероятно.

- Недостатком является то, что банкам необходимо резервировать капитал на весь период контракта  $T$ , чтобы застраховаться от риска невыполнения обязательств. Это уменьшает прибыль банков, т.к. капитал является ограниченным и дорогим ресурсом.

*Форвардная цена актива* – это цена исполнения (страйк)  $k$  по форвардным контрактам, заключаемым в настоящий момент времени.

Ясно, что покупатель форварда окажется в выигрыше, если на момент исполнения контракта  $T$  рыночная цена актива  $S_T$  будет выше цены исполнения  $k$ . Его прибыль в этом случае составит  $S_T - k$ . Если  $S_T < k$ , то покупатель терпит убытки, а у продавца форварда будет прибыль. Игра с форвардным контрактом оказывается азартной, т.к. может выиграть и продавец, и покупатель. Причем выигрыши и проигрыши могут быть сколь угодно большими.

Главным для участников сделки является следующее. Какой должна быть эта цена исполнения  $k$ , чтобы с одной стороны, контракт был привлекательным для покупателя, а с другой стороны, выплаты по нему могли быть обеспечены независимо от изменяющейся цены актива? И как обеспечить эти выплаты?

Рассмотрим один из подходов решения этих вопросов. Пусть в начальный момент времени  $t=0$  рыночная цена актива равна  $S_0$ . Для исполнения контракта, продавец форварда занимает под непрерывные проценты  $r$  сумму  $S_0$  и покупает актив. В момент времени  $T$  продавец передает покупателю актив и получает сумму  $k$ , записанную в контракте. Чтобы вернуть долг вместе с процентами, ему необходимо, чтобы цена исполнения была равна  $k = S_0 e^{rT}$ . Такая цена исполнения не только разумна, но и единственно возможна. Отклонение от нее приводят к арбитражной ситуации, когда одна из сторон имеет возможность получить неограниченную прибыль без всякого риска.

Предположим, что кто-то продает и покупает контракты по цене дешевле, чем на рынке  $k_1 < k$ . Тогда любой участник рынка может занять актив, продать его по цене  $S_0$ , вырученные деньги вложить на банковский счет под непрерывные проценты. Одновременно купить форвардный контракт по цене  $k_1 < k = S_0 e^{rT}$ . При наступлении срока исполнения, со счета снять сумму с процентами  $S_0 e^{rT}$ , по форварду купить актив по цене  $k_1$  и вернуть актив. Чистая безрисковая прибыль от такой операции составляет  $S_0 e^{rT} - k_1 > 0$ . Все будут стремиться купить такие контракты. Тогда или контракты (активы) кончатся, или цена на них повысится и равновесие на рынке восстановится.

С другой стороны, кто-то заключает форвардные контракты по цене дороже, чем рыночная  $k_2 > k$ . Любой участник рынка может занять под непрерывные проценты сумму  $S_0$ , купить актив. Одновременно продать форвардный контракт по цене  $k_2 > k = S_0 e^{rT}$ . При наступлении срока исполнения, по форварду продать актив по цене  $k_2$  и вернуть долг с процентами  $S_0 e^{rT}$ . Прибыль будет равна  $k_2 - S_0 e^{rT} > 0$ . Все будут стремиться продать такие контракты. Или у покупателя кончатся деньги, или цена на них снизится и равновесие на рынке восстановится.

Рассмотренный подход к определению справедливой цены исполнения предполагал выполнение следующих аксиом.

#### **Аксиомы идеального равновесного рынка.**

*Полнота*: все фигурирующие на рынке активы доступны, продаются и покупаются мгновенно в неограниченном количестве, цена покупки и продажи совпадает.

*Отсутствие «трения»*: операционные издержки, налоги, дивиденды и другие накладные расходы отсутствуют, либо ими можно пренебречь ввиду их незначительной величины по сравнению с объемами сделок.

*Отсутствие риска*: например, невыполнения условий и других рисков.

*Делимость активов*: активы могут неограниченно дробиться (например, возможны операции с  $1/3$ ,  $1/10$  или  $1/1000$  долями акции).

*Безарбитражность*: ни один субъект рынка не имеет возможности для

извлечения неограниченной прибыли без риска.

## 2. FRA

### Основные понятия

*Forward Rate Agreement, FRA (Соглашение о форвардной ставке)* – соглашение между двумя сторонами о фиксировании процентной ставки в будущем. Позволяет защититься от возможных колебаний уровня процентных ставок или спекулировать на этих колебаниях.

Этот инструмент появился на рынке в 1983 году и позволил просто, надежно хеджировать условия краткосрочных кредитов. Это внебиржевой продукт, предлагается банками-дилерами. Участниками сделки могут быть два банка, или клиент и банк. Банк-дилер, заключая контракты FRA и как продавец, и как покупатель, балансирует общие размеры своих обязательств по всем имеющимся у него контрактам так, чтобы в результате иметь стабильную прибыль. Одновременно такой механизм позволяет истинному покупателю или продавцу не утруждать себя поисками подходящей противоположной стороны для сделки. В результате нестандартный характер FRA перестает быть недостатком. Рынок FRA, как любой другой не биржевой рынок, имеет большие риски. Поэтому банки-дилеры предпочитают сотрудничать с клиентами, имеющими высокий рейтинг надежности. Рассмотрим этот инструмент подробно.

Условия FRA:

- покупатель FRA (заёмщик) согласен условно занять,
- продавец FRA (кредитор) согласен условно дать займы:
  - 1) определенную сумму в оговоренной валюте;
  - 2) по фиксированной процентной ставке;
  - 3) на точно определенный период;
  - 4) начинающийся с согласованного дня в будущем.

*Покупатель FRA* является условным заемщиком и защищен от увеличения процентной ставки, однако должен платить в случае ее падения. Покупатель может иметь реальные долговые обязательства и использовать FRA для хеджирования. Или он не имеет риска, связанного с процентной ставкой, а использует FRA для спекуляции на ее подъеме.

*Продавец FRA* является условным кредитором и фиксирует ставку для кредитования или инвестирования. Защищен от падения процентных ставок, но должен платить, если ставки поднимутся. Он может быть инвестором, который рискует пострадать в случае падения ставок, или он может спекулировать на падении ставок.

Слово «условно» означает, что никаких реальных кредитов и ссуд не дается. Одна или обе стороны FRA могут иметь долговые или инвестиционные обязательства, но они должны быть оформлены отдельными соглашениями. Защита от изменения процентных ставок проявляется в виде выплаты наличными *расчетной суммой*, которая компенсирует каждой стороне разницу между процентной ставкой, установленной условиями FRA, и ставкой, складывающейся на рынке.

Все реально заключаемые FRA удовлетворяют стандартным условиям,

разработанным Ассоциацией британских банкиров (ВВА). Перечислим основные даты и термины из этого стандарта.

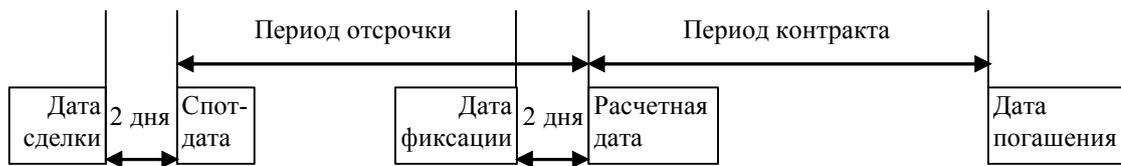


Рис. 1. Временная диаграмма FRA

В дату сделки заключается контракт FRA и согласовывается контрактная ставка.

*Контрактная ставка* ( $i_F$ ) – зафиксированная условиями FRA процентная ставка, под которую дается условный кредит или депозит.

*Спот-дата* – отстоит на 2 рабочих дня от даты сделки, чтобы сделка успела пройти во всех временных поясах.

*Расчетная дата* – начальный день условного кредита или депозита. В этот день выплачивается расчетная сумма.

*Дата фиксации* – день определения ставки-ориентира (за 2 рабочих дня до расчетной даты).

*Ставка-ориентир* ( $i_r$ ) – рыночная процентная ставка, используемая для определения расчетной суммы. Определяется котировками основных банков. В Англии это ставка LIBOR (London Interbank Offered Rate – Лондонская межбанковская ставка размещения денежных средств, всегда годовая).

*Дата погашения* – день погашения условного кредита или депозита.

В контракте FRA присутствуют две временные даты: срок, через который должен быть исполнен контракт, и срок, на который кладется депозит. Поэтому для обозначения FRA используется комбинация из двух цифр. Первая цифра показывает, когда наступит срок исполнения (расчетная дата). Разница между второй и первой цифрами – это срок, на который кладется условный депозит.

**Пример 1.** 3x9 FRA (три на девять) означает, что между спот-датой и расчетной датой – 3 месяца, а между спот-датой и датой закрытия условного депозита – 9 месяцев. Или, через 3 месяца после заключения контракта будет произведен расчет по шестимесячному депозиту ( $9-3=6$ ), который должен был бы быть открыт через 3 месяца после заключения контракта, а закрыт – через 9 месяцев после заключения контракта.

**Пример 2.** Для защиты от риска повышения процентных ставок компания покупает 14.04.2006 1x4 FRA на сумму \$1 млн. под 6,25%. Определить расчетную сумму, если на дату фиксации рыночная ставка по кредитам составила 7%.

Для лучшего понимания, составим временную диаграмму.

1x4 FRA означает, что компания планирует занять через 1 месяц на 3 месяца \$1 млн. Контрактная сумма  $PV = \$1000000$ .

Дата заключения сделки 14.04.2006 – это пятница.

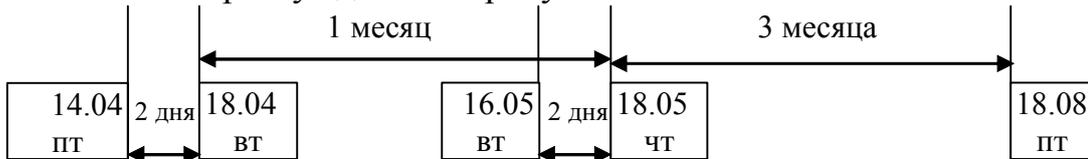
Спот-дата отстоит на два рабочих дня – 18.04.2006.

Период отсрочки 1 месяц, поэтому расчетная дата будет 18.05.2006.

Дата фиксации 16.05.2006 (на два дня раньше расчетной даты).

Период контракта три месяца, значит дата погашения 18.08.2006.

Покажем эти рассуждения на рисунке.



Рассчитаем период контракта

$t = (31 - 18)$  в мае + 30 в июне + 31 в июле + 18 в августе = 92 дня.

Контрактная ставка равна  $i_F = 0,0625$ .

При наступлении даты фиксации рыночная ставка-ориентир оказалась равна  $i_r = 0,07$ . Независимо от FRA компания берет кредит по существующей ставке 7%, тогда на дату погашения незапланированные процентные начисления по кредиту равны:

$$(i_r - i_F) \cdot PV \cdot \frac{t}{y} = (0,07 - 0,0625) \cdot 1000000 \cdot \frac{92}{360} = \$1916,67 ,$$

где  $y = 360$  – продолжительность года.

Если бы расчетная сумма по FRA выплачивалась в момент погашения кредита, то она бы тоже составила \$1916,67, чтобы компенсировать более высокую ставку по кредиту.

На практике расчетная сумма выплачивается в расчетную дату. Чтобы учесть возможность получения дохода на расчетную сумму (с расчетной даты до даты погашения), ее нужно дисконтировать по рыночной ставке. Т.о. расчетная сумма определяется по формуле:

$$PC = \frac{(i_r - i_F) \cdot PV \cdot \frac{t}{y}}{1 + i_r \cdot \frac{t}{y}} = \frac{1916,67}{1 + 0,07 \cdot \frac{92}{360}} = \$1882,99.$$

Вывод: в расчетную дату покупатель FRA получает расчетную сумму в размере \$1882,99.

Важно понимать, что FRA – это инструмент позволяющий сменить риск, связанный с изменением процентной ставки, на определенность.

Если рыночные ставки оказались выше контрактной ставки ( $i_r > i_F$ , расчетная сумма  $> 0$ ), то продавец FRA платит покупателю компенсацию за увеличение цены займа.

Если рыночные ставки оказались ниже контрактной ( $i_r < i_F$ , расчетная сумма  $< 0$ ), то покупатель FRA должен платить продавцу как условному кредитору компенсацию за более низкий уровень ставок.

### Применение FRA

При покупке или продаже FRA не существует премий, обычно банки берут с клиентов комиссионные в виде маржи. Здесь *маржа* – это разница между рыночной ставкой и реальной ставкой по кредиту или депозиту.

Поэтому на практике существует два небольших отклонения от рассмотренного примера 2.

1. Заемщик, как правило, берет кредит по ставке на маржу выше, чем ры-

ночная ставка. Значит реально, кредит будет стоить дороже, чем предполагали условия FRA.

2. Инвестировать можно по ставке на маржу меньше, чем рыночная ставка. Хотя дисконтирование при вычислении расчетной суммы предполагало, что можно инвестировать по рыночной ставке. Значит проценты, полученные от инвестирования расчетной суммы, реально будут меньше, чем предполагали условия FRA.

**Пример 3.** Продолжим пример 2. Пусть маржа равна 1%. Расчетная сумма остается та же, т.к. условия FRA не изменились.

Расчетную сумму можно инвестировать под  $7\% - 1\% = 6\%$ , значит, на дату погашения, через 92 дня будем иметь:

$$1882,99 \cdot (1 + (0,07 - 0,01) \cdot 92/360) = \$1911,86. \text{ Это прибыль от FRA.}$$

Кредит стоит  $7\% + 1\% = 8\%$ . За пользование кредитом 92 дня надо заплатить:

$$1000000 \cdot (0,07 + 0,01) \cdot 92/360 = \$20444,44.$$

Чистая цена займа с учетом доходов от FRA:

$$20444,44 - 1911,86 = \$18532,58.$$

Получается, что расчетная сумма с начисленными процентами, доводит ставку по кредиту до уровня:

$$r = \frac{18532,58}{1000000 \cdot \frac{92}{360}} = 0,0725.$$

7,25% – это реальная стоимость кредита, что на 1% больше обещанной в контракте FRA ставки. Маржа в 1% дает прибыль банку-дилеру по контракту FRA.

Покупатель FRA теряет из-за маржи:

- при размещении расчетной суммы:  $1882,99 \cdot 0,01 \cdot 92/360 = \$4,81$ ;
- при выплате процентов по кредиту:  $1000000 \cdot 0,01 \cdot 92/360 = \$2555,56$ .

Общие потери равны  $\$2560,37$  – это цена контракта FRA или прибыль банка-дилера. Покупатели FRA согласны платить столько за определенность в будущем.

### 3. Цена FRA

Рассмотрим FRA как способ «заполнения промежутков» между разными датами погашения на рынке наличности.

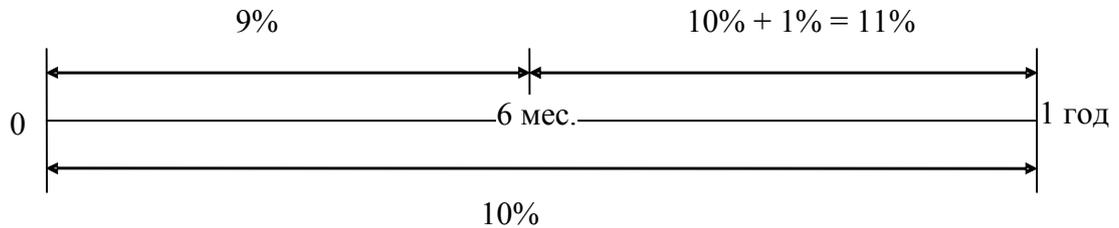
Пусть имеется капитал для инвестирования сроком на 1 год. Известно, что ставка по депозитам на 1 год равна 10% годовых, а на 6 месяцев – 9% годовых. У инвестора имеются две возможности:

1. Инвестировать капитал на 1 год и получить 10% годовых.
2. Инвестировать на 6 месяцев и получить 9% годовых. Одновременно продать  $6 \times 12$  FRA, чтобы зафиксировать гарантированный доход на следующие 6 месяцев.

Возникает вопрос: какая ставка должна гарантироваться FRA? Эффективность финансовых рынков должна обеспечивать независимость конечного результата от выбираемого способа.

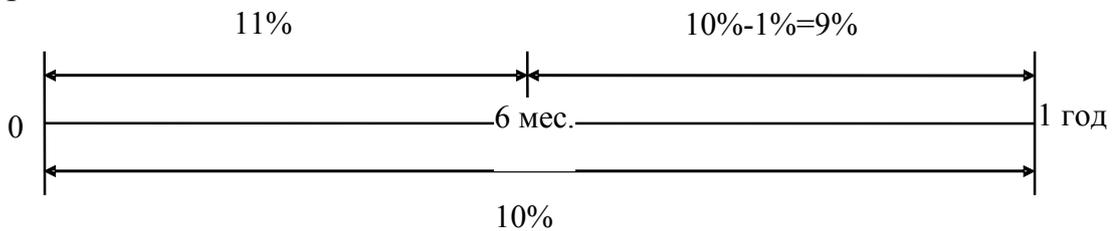
Рассмотрим, как ставка по FRA определяется интуитивно.

Обе возможности за год должны давать одинаковый доход, иначе возможностью с меньшим доходом никто пользоваться не будет. Если инвестор вкладывает на 1 год, то за первые 6 месяцев он выигрывает 1% по сравнению со второй возможностью. Значит, за вторые 6 месяцев должен быть дополнительный доход в 1% у инвестора, выбравшего вторую возможность. Примерно, 6х12 FRA должно гарантировать  $10\%+1\%=11\%$ . Покажем рассуждения на рисунке 3.3.

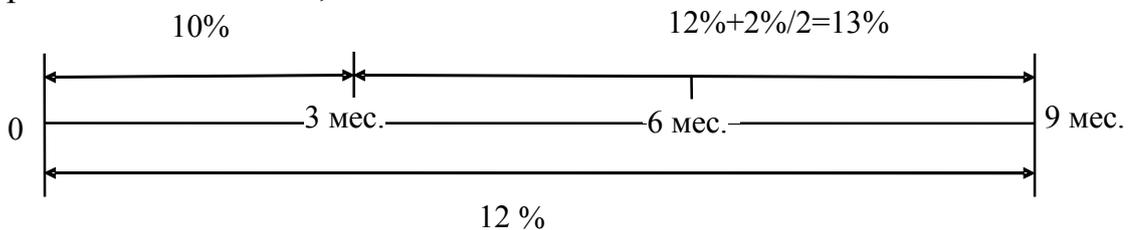


Рассмотрим еще несколько примеров.

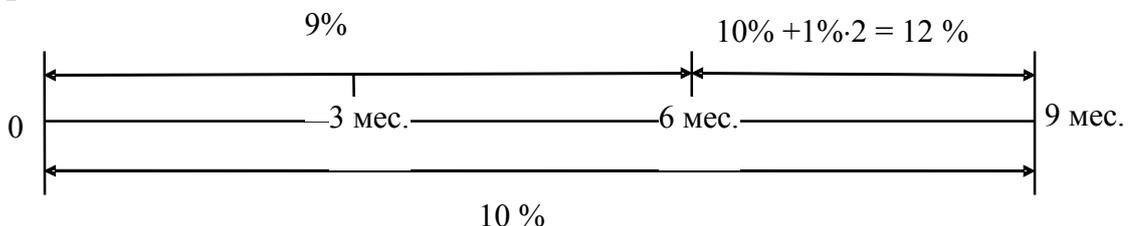
**Пример 4.** Определить ставку 6х12 FRA, если по депозитам на 1 год ставка равна 10% годовых, на 6 месяцев – 11% годовых.



**Пример 5.** Определить ставку 3х9 FRA, если по депозитам на 9 месяцев ставка равна 12% годовых, на 3 месяца – 10% годовых.



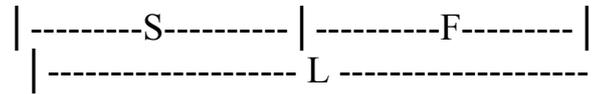
**Пример 6.** Определить ставку 6х9 FRA, если по депозитам на 9 месяцев ставка равна 10% годовых, на 6 месяцев – 9% годовых.



Приближенный способ дает завышенную ставку по FRA, т.к. инвестор, выбирающий краткосрочную инвестицию, на второй срок может инвестировать не только основной капитал, но и полученные от первого вклада проценты.

Выведем точную формулу для определения ставки FRA.

Обозначим индексами S – краткосрочное инвестирование; F – период, защищаемый FRA, L – долгосрочное инвестирование.



Приравняем доходы по двум возможностям инвестирования.

$$\left(1 + i_S \cdot \frac{t_S}{y}\right) \left(1 + i_F \cdot \frac{t_F}{y}\right) = \left(1 + i_L \cdot \frac{t_L}{y}\right), \quad (3.1)$$

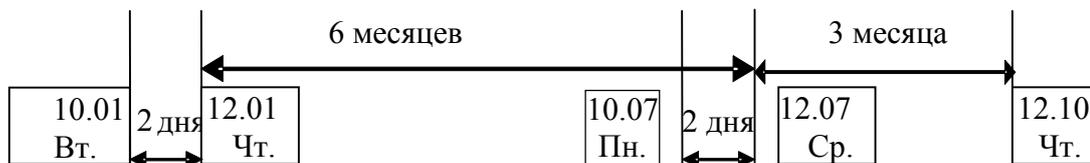
где  $i_S$  – рыночная процентная ставка при инвестициях до расчетной даты;  $i_L$  – рыночная процентная ставка при инвестициях до даты погашения;  $t_S$  – время от спот-даты до расчетной даты в днях,  $t_F$  – период FRA в днях,  $t_L$  – время от спот-даты до даты погашения в днях.

Из равенства (3.1) выводится формулу для определения ставки по FRA:

$$i_F = \frac{i_L \cdot t_L - i_S \cdot t_S}{t_F \cdot \left(1 + i_S \cdot \frac{t_S}{y}\right)}. \quad (3.2)$$

**Пример 7.** Ставка по депозитам на 9 месяцев равна 10% годовых, на 6 месяцев – 9% годовых. Определить ставку 6х9 FRA, если дата сделки 10.01.2006.

Распишем даты на рисунке 3.8.



Рассчитаем периоды.

Период отсрочки  $t_S = (31-12)$  в январе + 28 в феврале + 31 в марте + 30 в апреле + 31 в мае + 30 в июне + 12 в июле = 181 день

Период контракта  $t_F = (31-12)$  в июле + 31 в августе + 30 в сентябре + 12 в октябре = 92 дня.

Время от спот-даты до даты погашения  $t_L = t_S + t_F = 181 + 92 = 273$  дня.

Ставки  $i_S = 0,09$ ;  $i_L = 0,1$ .

По формуле (3.2) определим ставку по FRA:

$$i_F = \frac{0,1 \cdot 273 - 0,09 \cdot 181}{92 \left(1 + 0,09 \frac{181}{360}\right)} = 0,1145.$$

Точная ставка 6х9 FRA равна 11,45%. В примере 3.6 для тех же условий ставка была оценена приближенно в 12%. Утверждение о том, что точное значение ставки FRA меньше, чем приближенное подтвердилось.

#### 4. Изменение цены FRA

Для покупателей и продавцов FRA важен вопрос чувствительности цены или ставок FRA к изменениям процентных ставок на рынке. Проанализируем

результаты изменения рыночных ставок на примере.

**Пример 8.** Ставка по депозитам на 1 год равна 11% годовых, на 6 месяцев – 10% годовых. Определить, как меняется ставка 6x12 FRA при изменении рыночных ставок.

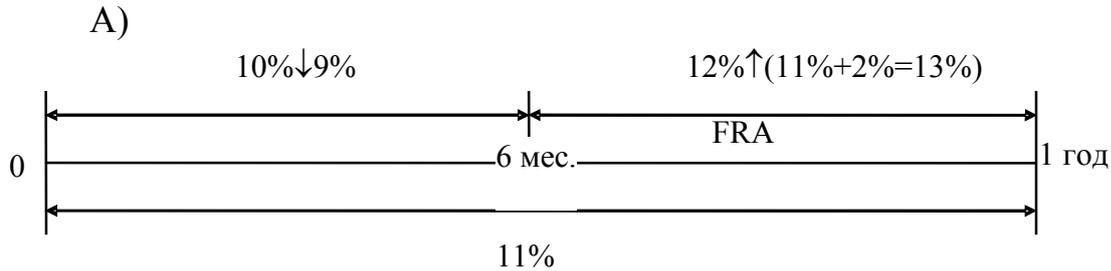


Рис. 9. Изменение цены 6x12 FRA при уменьшении 6-месячной ставки

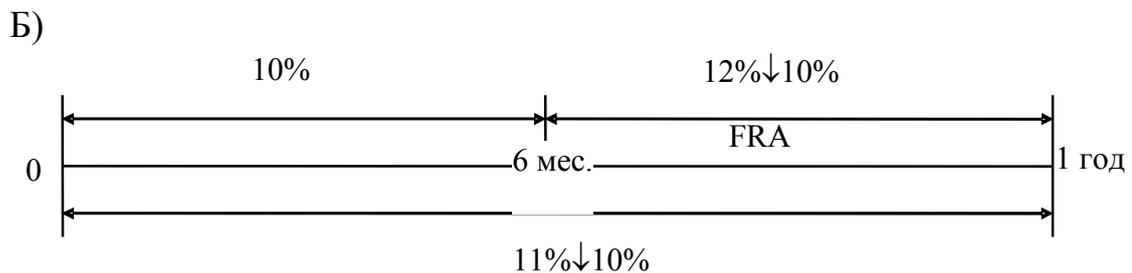


Рис. 10. Изменение цены 6x12 FRA при уменьшении годовой ставки

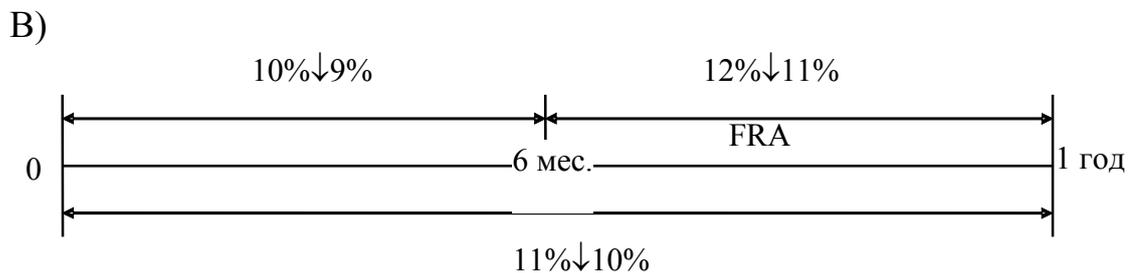


Рис. 11. Изменение цены 6x12 FRA при уменьшении двух ставок

В заключение скажем еще несколько слов о FRA. Это производный финансовый инструмент, который возник и используется на денежных рынках. Поскольку по условиям FRA сумма кредита не перечисляется, этот инструмент не отражается в балансовых отчетах, а резервировать требуется только около одной сотой от контрактной суммы. Все это повышает привлекательность инструмента. Хеджеру FRA позволяет защититься от изменения процентных ставок. Спекулянт же, не связанный с процентными ставками, стремится с помощью FRA получить прибыль от их ожидаемого изменения. На сегодняшний день обороты по FRA очень большие. Банки объявляют цены на все комбинации кратные трем месяцам со сроками погашения до двух лет. Также могут заключаться контракты и для нестандартных периодов.

## Тема 3. ОПЦИОН

### 1. Понятие опциона

*Опцион* – контракт, который дает обладателю *право* продать (купить) определенное количество базового актива по определенной цене исполнения, в любой момент в течении определённого срока.

Лицо, купившее опцион и таким образом получившее право принимать решение, называется покупателем (держателем) опциона, который должен платить за это право. Лицо, продавшее опцион и отвечающее на решение покупателя, называется продавцом (подписчиком) опциона.

Сумма, которую платит покупатель продавцу, называется *премией* или *ценой опциона (C)*.

Различают опционы покупателя и продавца. Это разные и независимые типы ценных бумаг и купля/продажа одного из них не влечёт каких либо действий с другим.

*Опцион покупателя* (опцион call («колл»)) – это соглашение, по которому продавец *обязан продать*, а покупатель *имеет право купить* актив в некоторый момент времени ( $t=T$ ) в будущем по определенной цене исполнения ( $k$ ), согласованной при заключении контракта ( $t=0$ ).

Выручка покупателя опциона call в момент исполнения ( $T$ ) определяется по формуле

$$f_{call} = (S_T - k)^+ = \begin{cases} S_T - k, & S_T > k, \\ 0, & S_T < k, \end{cases} \quad (5.1)$$

где  $S_T$  – рыночная цена актива,  $k$  – еще называется страйк.

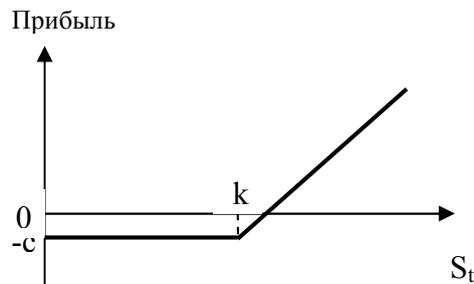


Рис.5.1. График реальной прибыли владельца call опциона

**Пример.** Инвестор В купил call опцион у инвестора W, позволяющий В купить у W 100 акций компании XXX по \$50 за акцию в любой момент в течение последующих шести месяцев ( $T=6$  мес). Значит цена исполнения контракта (цена покупки акций в будущем) равна  $k=100*50=\$5000$ . В настоящее время акции компании XXX продаются на бирже по \$45 за штуку. В полагает, что курс обыкновенных акций XXX существенно вырастет за последующие 6 месяцев. W считает, что курс акций не поднимется за этот период времени выше \$50. Однако, подписывая контракт, W идет на риск и требует за это компенсацию \$3 за акцию – премия за опцион. Таким образом, В платит \$300 инвестору W, чтобы он подписал опционный контракт.

Если курс акции XXX в дальнейшем составит \$60, то покупка акций

обойдется инвестору W в  $S_T = \$6000$ . Затем W передаст 100 акций B и получит за них \$5000. Таким образом, инвестор W потеряет  $1000 - 300 = \$700$ . Инвестор B, продав эти же акции на рынке за \$60, получит доход  $1000 - 300 = \$700$ .

Если курс акции XXX в дальнейшем составит \$46, тогда инвестору B будет невыгодно покупать дороже (за \$50) и он не предъявит опцион к исполнению. В результате потери инвестора B составят \$300 - премия за опцион.

*Опцион продавца* (опцион put («пут»)) – это соглашение, по которому продавец *обязан купить*, а покупатель *имеет право продать* актив в некоторый момент времени ( $t=T$ ) в будущем по определенной цене исполнения ( $k$ ), согласованной при заключении контракта ( $t=0$ ).

Прибыль покупателя опциона put в момент исполнения ( $T$ ) определяется по формуле

$$f_{put} = (k - S_T)^+ = \begin{cases} k - S_T, & S_T < k, \\ 0, & S_T > k. \end{cases}$$

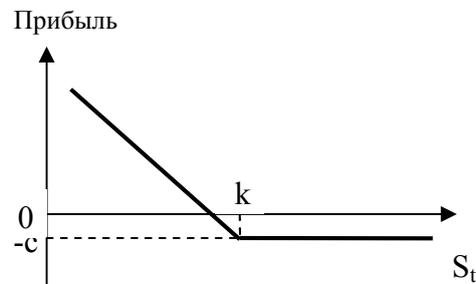


Рис. График реальной прибыли владельца put опциона

**Пример.** Инвестор B купил put опцион у инвестора W, позволяющий B продать W 100 акций компании YYY по \$30 за акцию в любой момент в течение последующих 6 месяцев ( $T=6$  мес). Цена исполнения контракта (цена продажи акций в будущем) равна  $k=100 \cdot 30 = \$3000$ . В настоящее время акции YYY продаются на бирже по \$35 за штуку ( $S_0 = \$3500$ ). Инвестор B полагает, что курс обыкновенной акции YYY существенно упадет в течение следующих 6 месяцев. Инвестор W считает, что курс акции не упадет ниже \$30 за этот период. Подписывая контракт, W идет на риск и требует за это компенсацию \$2 за акцию – это премия за опцион. В платит W \$200 за опцион.

Если курс акции YYY в дальнейшем составит \$40, тогда инвестору B будет невыгодно продавать дешевле (по \$30), чем на рынке. Опцион обесценивается и потери инвестора B равны премии за опцион в \$200.

Если курс акции YYY упадет до \$25. Инвестор B покупает 100 акций на рынке по \$25, продает их инвестору W по \$30 и получает прибыль в размере  $3000 - 2500 - 200 = \$300$ .

Ценность опциона очевидна. Требуется вложить гораздо меньше денег, чем при торговле с акциями, и получить достаточно высокую прибыль.

Большая часть опционов продается частными владельцами или крупными организациями - инвесторами, имеющими солидный капитал. Они рискуют

своим капиталом по нескольким причинам:

- их риск вознаграждается теми доходами, которые они получают за продажу опционов;
- когда они продают опцион, они могут немедленно воспользоваться полученными деньгами, поскольку они в большинстве случаев являются владельцами тех акций, на которые был продан опцион;
- они получают все дивиденды по этим акциям в течение того времени, которое указано в контракте;
- опционные контракты, представляют собой страховку или хеджирование против возможного резкого изменении цен на имеющиеся у них акции.

Рассмотрим еще несколько определений, связанных с опционами.

Стиль опциона определяется моментом его исполнения:

- *американский опцион* может быть исполнен в любое время до окончания его срока годности;
- *европейский опцион* может быть исполнен только в определенный день в будущем.

*Опцион с физической поставкой* даёт своему владельцу право реально получить актив (если это call) или реально поставить имеющиеся у него актив (для put) в момент исполнения опциона. В связи с этим различают

- *покрытый call опцион* – продавец опциона владеет требуемым для поставки количеством активов,
- *непокрытый call опцион* - продавец опциона не владеет требуемым для поставки количеством активов, что увеличивает риск опциона.

*Опцион с денежным зачетом*, даёт своему владельцу право на получение денежного платежа. Платежи равны

- для call опциона -  $[(S_T - k) \cdot \text{опционный множитель}]$ , если  $S_T > k$ ,
- для put опциона -  $[(k - S_T) \cdot \text{опционный множитель}]$ , если  $S_T < k$ .

Опционный множитель – это число активов покрываемых опционом.

Из рассмотренных определений становится ясно, что перед продавцом опциона стоят две задачи.

1. Определить справедливую цену контракта, такую, по которой контракт будут покупать, и которая обеспечит выполнение обязательств перед владельцами опциона в будущем.
2. Построить стратегию поведения, которая позволит выполнить обязательства перед покупателем опциона в будущем. Стратегия заключается в распределении средств между рисковым активом и безрисковым, и в перераспределении средств между активами, в течении срока действия контракта.

Для опционов европейского типа существуют математические модели, позволяющие решить эти задачи.

## 2. Биномиальная модель

Биномиальная модель оценки стоимости опциона была предложена в 1979 году Дж. Коксом, С. Россом и М. Рубинштейном.

Предполагается, что выполняются 5 аксиом идеального равновесного рынка описанных в пункте 3.1, посвященном форвардному контракту.

На рынке фигурируют два актива:

1. *Боны*, или долговые расписки – ценные бумаги, выпускаемые государством или корпорациями (банковский счет, облигация). Бон является безрисковым активом, его будущая цена известна заранее и определяется по формуле

$$V_t = V_0 \cdot e^{rt},$$

где  $V_0$  – начальная стоимость,

$r > 0$  – годовая банковская ставка непрерывного процента.

2. *Акции* – рисковые ценные бумаги, цена которых подвержена случайным колебаниям. Компания выпускает акции с целью аккумуляции капитала, предоставляя владельцам право на участие в управлении. Цена акции  $S_t$  меняется дискретно на бинарном дереве и заранее неизвестна.  $f$  – прибыль владельца опциона.

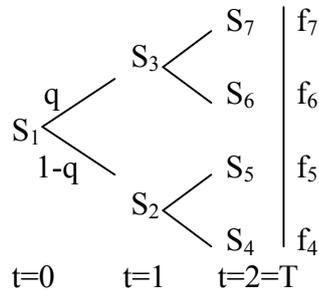


Рис. Стоимость рисковых акций

В дереве на рис. 5.3. можно выделить три узла, которые условно можно обозначить следующим образом.

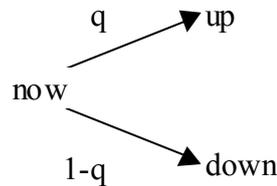


Рис. Узел дерева

Здесь *now* – это настоящий момент времени, *up* - цена акции поднялась в следующий момент времени, *down* - цена акции упала в следующий момент времени. С вероятностью  $q$  – цена может увеличиться, а с вероятностью  $(1-q)$  – упасть.

При этом для каждого узла дерева должно выполняться соотношение  $S_{down} < S_{now} \cdot e^{rT} < S_{up}$ , иначе возникает арбитражная ситуация.

Для решения задач продавца опциона выполняются следующие шаги.

*Шаг 1.* Определяется выручка владельца опциона (выплаты по опциону) в момент времени  $T$  по формулам  $f_{call} = (S_T - k)^+$  и  $f_{put} = (k - S_T)^+$ .

*Шаг 2.* Определяется вероятность изменения цены акций в каждом узле дерева.

$$q = \frac{(S_{now} - S_{down})}{S_{up} - S_{down}},$$

где  $0 < q < 1$ , иначе возникают арбитражные ситуации.

*Шаг 3.* Определяются выплаты по опциону в каждом узле дерева.

$$f_{now} = (q \cdot f_{up} + (1 - q) \cdot f_{down}),$$

где  $f_{now} \geq 0$ ,

$f_1$  - выплата по опциону в начальный момент времени является справедливой ценой опциона.

Дерево для прибыли  $f$  строится с конца.

*Шаг 4.* Выплаты по опциону совпадают с ценой портфеля продавца опциона:

$$f_t = \varphi_t S_t + \psi_t B_t,$$

где  $\psi$  - число бонов;  $\varphi$  - число акций.

Из этого предположения определяется число акций и число бонов в каждом узле дерева.

$$\varphi_{now} = \frac{f_{up} - f_{down}}{S_{up} - S_{down}},$$

$$\psi_{now} = (f_{up} - \varphi_{now} \cdot S_{up}).$$

Построенная стратегия  $(\varphi_t, \psi_t)$  называется хеджирующей, т.к. показывает продавцу опциона, как перераспределять средства между рисковыми и безрисковыми активами, чтобы выполнить обязательства перед покупателем опциона. Стратегия называется репликационной, т.к. воспроизводит выплаты по опциону независимо от случайной цены акции. Можно представить стратегию в виде дерева.

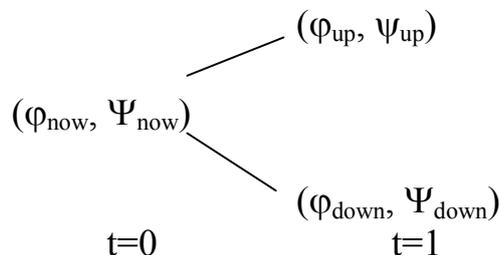


Рис.5.5. Стратегия продавца опциона

Если  $\varphi_t < 0$  – то акции занимаются для продажи;

$\varphi_t > 0$  – акции куплены;

$\psi_t > 0$  – деньги на счете есть;

$\psi_t < 0$  – деньги заняты для покупки акций.

Обычно для опциона call  $\varphi_t > 0$ ,  $\psi_t < 0$ ;

для опциона put  $\varphi_t < 0$ ,  $\psi_t > 0$ .

Необходимо учитывать, что стратегия и цена опциона, выведены для контракта на одну акцию. Если в контракт входит больше одной акции, что чаще всего и бывает, то все результаты расчетов ( $f$ ,  $s$ ,  $\varphi$ ,  $\Psi$ ) надо умножать на опционный множитель.

**Пример.** Определить цену стандартного опциона call со страйком  $k=\$10$ , построить хеджирующую стратегию (найти  $\varphi$ ,  $\Psi$ ). Банковский процент равен 0, начальная цена бона равна \$1. Цены акций меняются следующим образом:

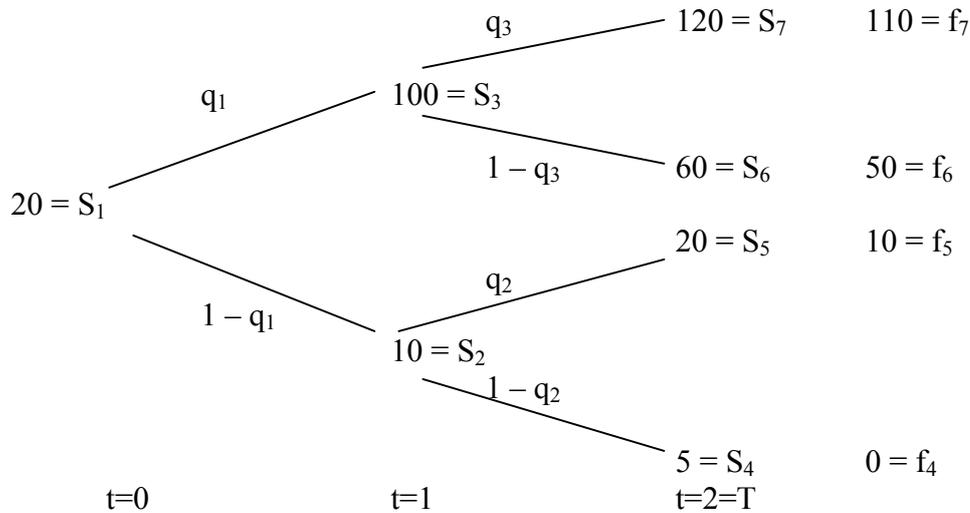


Рис. Call опцион, двухпериодное дерево цен акций

Шаг 1. Определяются выплаты по опциону в момент времени T по формуле (5.1).

$$f_7 = 120 - 10 = 110,$$

$$f_6 = 60 - 10 = 50,$$

$$f_5 = 20 - 10 = 10,$$

$$f_4 = 0.$$

Шаг 2. Определяется вероятность изменения цены акций по формуле (5.4).

$$q_1 = 1 \cdot 1 \cdot (20 - 10) / (100 - 10) = 1/9,$$

$$q_2 = 1 \cdot 1 \cdot (10 - 5) / (20 - 5) = 1/3,$$

$$q_3 = 1 \cdot 1 \cdot (100 - 60) / (120 - 60) = 2/3.$$

Шаг 3. Определяются выплаты по опциону в каждом узле дерева формуле (5.5):

$$f_3 = (2/3) \cdot 110 + (1/3) \cdot 50 = 90,$$

$$f_2 = (1/3) \cdot 10 + (2/3) \cdot 0 = 10/3,$$

$$c = f_1 = (1/9) \cdot 90 + (8/9) \cdot (10/3) = 12,963 \text{ – справедливая цена опциона.}$$

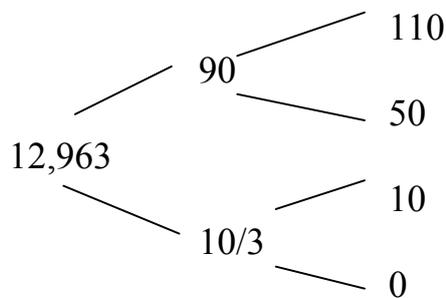


Рис. Дерево выплат по опциону

Шаг 4. Число акций рассчитываем по формуле (5.6):

$$\varphi_1 = (90 - 10/3) / (100 - 0) = 0,963,$$

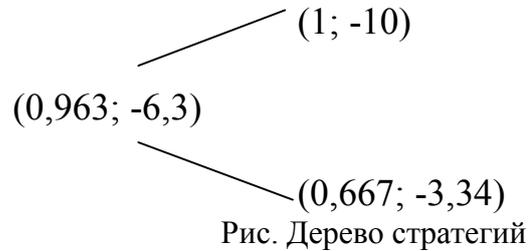
$$\varphi_2 = (10 - 0) / (20 - 5) = 0,667,$$

Акции покупаются.

$$\varphi_3 = (110 - 50) / (120 - 60) = 1.$$

Число бонов рассчитываем по формуле (5.7):

$$\left. \begin{aligned} \Psi_1 &= 90 - 0,963 \cdot 100 = -6,3, \\ \Psi_2 &= 10 - 0,667 \cdot 20 = -3,34, \\ \Psi_3 &= 110 - 1 \cdot 120 = -10, \end{aligned} \right\} \text{ Деньги занимают в банке.}$$



**Вывод.** Продавец call опциона получает \$12,963 на 1 акцию за заключение контракта. Занимает еще \$6,3 и на все деньги покупает 0,963 акции по текущей цене \$20.

Если в следующий момент времени ( $t=1$ ) цена акции вырастет до \$100, то продавец опциона займет еще \$3,7 (долг станет \$10) и докупит еще 0,037 акции (будет 1 акция), т.к. скорее всего опцион предъявят к исполнению.

Если в следующий момент времени ( $t=1$ ) цена акции упадет до \$10, то продавец опциона продаст 0,296 акции по \$10 и отдаст часть долга.

**Пример.** Определить цену стандартного опциона put со страйком \$90, построить хеджирующую стратегию. Банковский процент равен 0,  $B_0 = \$1$ .

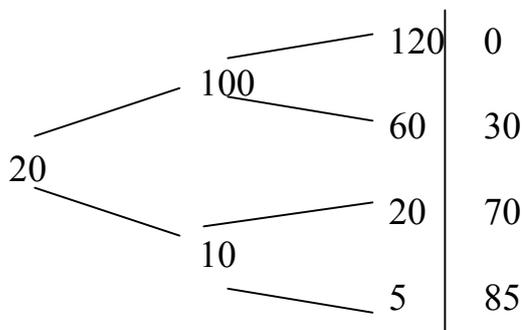


Рис. Put опцион, двухпериодное дерево цен акций

Шаг 1. Определяются выплаты по опциону в момент времени  $T$  по формуле (5.2):

$$f_7 = 0,$$

$$f_6 = 90 - 60 = 30,$$

$$f_5 = 90 - 20 = 70,$$

$$f_4 = 90 - 5 = 85.$$

Шаг 2. Определяется вероятность изменения цены акций по формуле (5.4):

$$q_1 = (20 - 10) / (100 - 10) = 1/9,$$

$$q_2 = (10 - 5) / (20 - 5) = 1/3,$$

$$q_3 = (100-60)/(120-60)=2/3.$$

Шаг 3. Определяются выплаты по опциону в каждом узле дерева формуле (5.5):

$$f_3 = (2/3) \cdot 0 + (1/3) \cdot 30 = 10,$$

$$f_2 = (1/3) \cdot 70 + (2/3) \cdot 85 = 80,$$

$$c = f_1 = (1/9) \cdot 10 + (8/9) \cdot 80 = 650/9 = 72,22 - \text{справедливая цена опциона.}$$

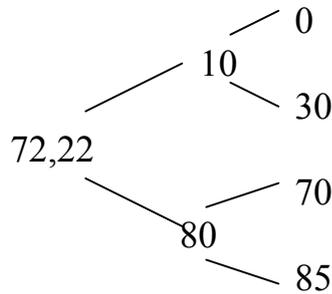


Рис. Дерево выплат по опциону

Шаг 4. Число акций (5.6):

$$\varphi_1 = (10-80)/(100-10) = -7/9 = 0,778,$$

$$\varphi_2 = (70-85)/(20-5) = -1,$$

$$\varphi_3 = (0-30)/(120-60) = -1/2.$$

Акции занимаются для продажи.

Число бонов (5.7):

$$\Psi_1 = 10 + 0,778 \cdot 100 = 87,8,$$

$$\Psi_2 = 70 + 1 \cdot 20 = 90,$$

$$\Psi_3 = 0 + 0,5 \cdot 120 = 60.$$

Премия за опцион и деньги от продажи акций вкладываются на счет.

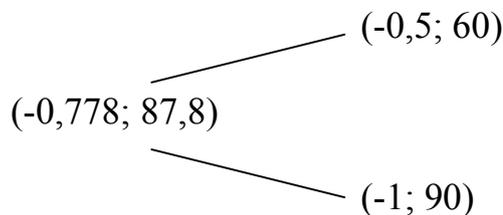


Рис. Дерево стратегий

Вывод. Продавец put опциона получает \$72,22 на 1 акцию за заключение контракта. Занимает еще 0,778 акции, продает ее, и все деньги вкладывает на счет.

Если в следующий момент времени ( $t=1$ ) цена акции вырастет до \$100, то продавец опциона снимет \$27,8 со счета, купит и вернет 0,278 акции.

Если в следующий момент времени ( $t=1$ ) цена акции упадет до \$10, то продавец опциона займет еще 0,222 акции (долг будет 1 акция), продаст и добавит еще денег на счет, т.к. опцион скорее всего предъявят к исполнению.

Модель Кокса-Росса-Рубинштейна является моделью дискретного времени. Подходит и для оценки опционов американского типа, т.к. в каждом узле дерева стоимость портфеля продавца опциона равна выплате по опциону.

Расчеты ведутся с помощью компьютерных моделей. Для получения подходящей оценки достаточно рассчитать 50-70 промежутков времени (шагов). Увеличение числа шагов несущественно улучшает оценки, но значительно уве-

личивает время расчетов.

Проблема модели состоит в том, что в ней заложено плавное изменение цены актива на рынке. Это часто не соблюдается, т.к. реальному рынку свойственны и взлеты и падения.

Рассмотрим далее модель, у которой цены рискованного актива меняются непрерывно.

### 3. Модель Блэка – Шоулса

Известная в финансовой математике формула Блэка-Шоулса, выведенная в 1973 году американскими профессорами Фишером Блэком и Майроном Шоулсом.

Предполагается, что выполняются 5 аксиом идеального равновесного рынка описанных в пункте «форвардный контракт».

На рынке фигурируют два актива.

1. *Боны*, или долговые расписки – ценные бумаги, выпускаемые государством или корпорациями (банковский счет, облигация). Бон является безрисковым активом, его будущая цена известна заранее и определяется по формуле

$$B_t = B_0 \cdot e^{rt},$$

где  $B_0$  – начальная стоимость,

$r > 0$  – годовая банковская ставка непрерывного процента.

2. *Акции* – рискованные ценные бумаги, цена которых подвержена случайным колебаниям

$$S_t = S_0 \cdot e^{\sigma \omega_t + \mu t},$$

где  $S_0$  – начальная цена акции в момент времени  $t = 0$ ;

$\omega_t$  – случайный процесс – броуновское движение;

$\sigma$  – волатильность (разброс);

$\mu$  – дрейф (коэффициент роста).

#### *Опцион call на акции*

Премия или справедливая цена опциона покупателя определяется по следующей формуле.

$$c = S_0 \cdot \Phi(z^+) - ke^{-rT} \cdot \Phi(z^-),$$

$$\text{где } z^\pm = \frac{\ln \frac{S_0}{k} + \left( r \pm \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot T}{\sigma \cdot \sqrt{T}},$$

$$z^- = z^+ - \sigma \sqrt{T},$$

$S_0$  – рыночная стоимость акции в момент заключения контракта,

$k$  – цена исполнения или страйк;

$$\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2T}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx - \text{функция нормального распределения.}$$

Для определения значения  $\Phi(z)$  используют специальные статистические таблицы или с помощью функции =НОРМСТРАСП() в EXCEL.

Для выполнения своих обязательств продавец опциона формирует портфель из  $\varphi_t$  акций и  $\psi_t$  бондов. Цена такого портфеля в момент времени  $t < T$  равна

$$V_t = \varphi_t \cdot S_t + \psi_t \cdot B_t.$$

Тогда из этой формулы выводится стратегия продавца опциона на момент времени  $t < T$ .

Количество акций:

$$\varphi_t = \Phi(z_t^+)$$

где 
$$z_t^+ = \frac{\ln \frac{S_t}{k} + \left( r + \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot (T - t)}{\sigma \cdot \sqrt{T - t}},$$

$S_t$  – рыночная стоимость акций в момент  $t$ .

Стоимость бондов в момент времени  $t$ :

$$\psi_t B_t = -k e^{-r(T-t)} \Phi(z_t^-),$$

где 
$$z_t^- = \frac{\ln \frac{S_t}{k} + \left( r - \frac{\sigma^2}{2} \right) \cdot (T - t)}{\sigma \cdot \sqrt{T - t}}.$$

Необходимо учитывать, что стратегия и цена опциона выведены для контракта на одну акцию. Если в контракт входит больше одной акции, что чаще всего и бывает, то все результаты расчетов ( $\varphi$ ,  $\psi$ ) надо умножать на опционный множитель.

**Пример.** В рамках модели Блэка-Шоулса построить хеджирующую стратегию на момент  $t=0$  и определить цену стандартного опциона покупателя со страйком  $k=\$26$ , сроком на 270 дней. Известно, что акции имеют постоянную волатильность 20% в год, банковский процент 4% годовых, текущая цена акций  $\$20$ . Начальная стоимость бона  $\$1$ .

1. Число акций:

$$\begin{aligned} \varphi_{t=0} = \Phi(z^+) &= \Phi \left( \frac{\ln \frac{20}{26} + \left( 0,04 + \frac{0,2^2}{2} \right) \cdot \frac{270}{360}}{0,2 \sqrt{\frac{270}{360}}} \right) = \\ &= \Phi(-1,25) = 1 - \Phi(1,25) = 1 - 0,8944 = 0,1056. \end{aligned}$$

Знак “+” означает, что столько акций должно быть у продавца опциона.

2. Стоимость бондов:

$$\begin{aligned} B_0 \psi_0 &= -k e^{-rT} \Phi(z^-) = -26 e^{-0,04 \cdot \frac{270}{360}} \cdot \Phi(z^-) = \\ &= -25,232 \cdot \Phi(z^+ - \sigma \sqrt{t}) = -1,963 \$. \end{aligned}$$

Знак “-“ означает, что деньги заняты в банке для покупки акций.

Стратегия на следующий момент времени может быть построена только, когда этот момент наступит и будет известна новая рыночная цена акции.

3. Цена опциона:

$$c = S_0 \cdot \Phi(z^+) - ke^{-rT} \cdot \Phi(z^-) = 20 \cdot 0,1056 - 25,232 \cdot 0,0778 = \$0,149 .$$

Вывод.

Продавец опциона получает премию \$0,149 за заключение контракта, занимает в банке под проценты еще \$1,963 и на все деньги покупает 0,1056 акции по текущей цене \$20 ( $0,1056 \cdot \$20 = \$0,149 + \$1,963$ ). На следующий день цена акции меняется и строится новый портфель из акций и бонов по формулам (5.10) и (5.11).

### Опцион put на акции

Премия или справедливая цена опциона продавца определяется по следующей формуле.

$$c_{put} = ke^{-rT} \cdot (1 - \Phi(z^-)) - S_0 \cdot (1 - \Phi(z^+))$$

Из формулы (5.12) выводится стратегия продавца опциона на момент времени  $t < T$ .

Количество акций:

$$\varphi_t = -(1 - \Phi(z_t^+))$$

Стоимость бонов:

$$\psi_t B_t = ke^{-r(T-t)} (1 - \Phi(z_t^-))$$

Все обозначения и предположения, введенные для call опциона, сохраняются и для put опциона.

**Пример.** В рамках модели Блэка-Шоулса построить хеджирующую стратегию на момент  $t=0$  и определить цену стандартного опциона продавца для данных примера 5.6.

1. Число акций по формуле (5.13):

$$\varphi_{t=0} = -(1 - \Phi(z^+)) = -(1 - \Phi(-1,25)) = -(1 - 0,1056) = -0,8944.$$

Знак “-” означает, что акции заняты для продажи.

2. Стоимость бонов по формуле (5.14):

$$\psi_{t=0} = ke^{-rT} (1 - \Phi(z^-)) = 25,232 \cdot (1 - 0,0778) = 23,268\$ .$$

Знак “+” означает, что есть деньги на банковском счете.

Стратегия на следующий момент времени может быть построена только, когда этот момент наступит и будет известна новая рыночная цена акции.

3. Цена опциона по формуле (5.12):

$$\begin{aligned} c_{put} &= ke^{-rT} \cdot (1 - \Phi(z^-)) - S_0 \cdot (1 - \Phi(z^+)) = \\ &= 25,232 \cdot (1 - 0,0778) - 20 \cdot (1 - 0,1056) = 5,38\$ . \end{aligned}$$

Вывод. Продавец опциона получает премию \$5,38 за заключение контракта. Занимает в банке 0,8944 акции, продает по текущей цене ( $0,8944 \cdot \$20 = \$17,888$ ). Все имеющиеся деньги ( $\$5,38 + \$17,888 = \$23,268$ ) вкладываются на счет. На сле-

дующий день цена акции меняется и строится новый портфель из акций и бондов по формулам (5.13) и (5.14).

### *Теорема put-call эквивалентности для опционов на акции*

Рассмотрим последовательность сделок в момент времени  $t=0$ .

- 1) Продать один call опцион со сроком  $T$  и ценой исполнения  $k$ ;
- 2) Купить один put опцион с теми же сроком  $T$  и ценой исполнения  $k$ ;
- 3) Купить базовый актив;
- 4) Занять наличность в размере  $ke^{-rT}$ .

Совокупный поток наличности при совершении этих сделок должен быть равен нулю.

$$c_{call} - c_{put} - S_0 + ke^{-rT} = 0.$$

Иначе возникает арбитражная ситуация.

**Пример.** В рамках модели Блэка-Шоулса определить цену стандартного опциона продавца для данных примера 5.6.

Воспользуемся формулой (5.15)

$$c_{put} = c_{call} - S_0 + ke^{-rT} = 0,149 - 20 + 26e^{-0,04 \cdot \frac{270}{360}} = 5,38\$.$$

Ответ совпадает с результатами расчетов предыдущего примера.

### **Достоинства и недостатки**

Каждый профессиональный участник рынка самостоятельно “моделирует” свою рыночную цену опциона. При этом он учитывает предлагаемые модели цены опционов, собственный опыт и факторы, которые влияют на цену, но не входят в модель. Модель цен – это “помощник” торговцу, но принятие окончательного решения всегда остается за ним.

Популярность модели Блэка-Шоулса объясняется тем, что она позволяет легко моделировать динамику стоимости активов и неплохо прогнозировать стоимости производных ценных бумаг, заключенных на непродолжительные промежутки времени.

Однако модель Блэка-Шоулса действует на идеализированном рынке.

1.  $r$  – постоянна (в действительности  $r = r(t)$ ).
2. Нет ограничений на величины и знаки  $\phi_t$  и  $\psi_t$  (если  $\phi_t < 0$  и  $\psi_t < 0$ , то это называется лизинг актива).
3.  $\sigma$  и  $\mu$  постоянные. В реальном времени  $\sigma = \sigma(t, S_t)$ ,  $\mu = \mu(t, S_t)$ . Оценивание  $\sigma$  и  $\mu$  обычно делается по неполным статистическим наблюдениям, например, по значениям стоимости акций в момент открытия, средним дневным стоимостям и по стоимостям в момент закрытия. Поэтому модель стоимости акций  $S_t = S_0 \cdot e^{\sigma \cdot \omega_t + \mu t}$  работает плохо на больших интервалах времени.
4. Нет платы за операционные издержки, налоги, дивиденды и т.п. На самом деле, только для крупных корпораций подобные издержки представляют доли процентов.
5. Рынок является равновесным, т.е. невозможно извлечение прибыли без

риска. В случае неравновесного рынка инвесторы стремятся воспользоваться арбитражной ситуацией, что приводит к ее исчезновению.

6. Рынок является полным, т.е. доступны все фигурирующие на рынке активы и отсутствуют ограничения для инвестирования в эти активы.

Идеализация с одной стороны упрощает модель, с другой стороны не позволяет учитывать многих факторов, влияющих на цену опциона.

#### 4. Опционные стратегии

##### Базисные опционные стратегии

Опционы позволяют спекулировать

- 1) на цене опциона, например, купить опцион по одной цене, а продать (закрыть позицию) по более высокой цене;
- 2) на цене актива, например, по call-опциону купить дешевый актив и продать его на рынке дороже.

Действуя на рынке, торговец может открывать одну или несколько взаимосвязанных позиций по опционам с целью хеджирования или получения прибыли. Такие опционные стратегии основываются

- на соотношении рыночных цен опционов, которые относительно устойчивы;
- на прогнозе будущей динамики рыночной цены актива или цены опциона на этот актив.

Будем использовать следующие обозначения.

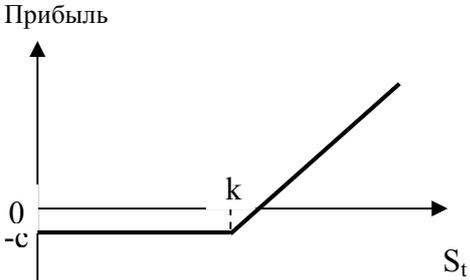
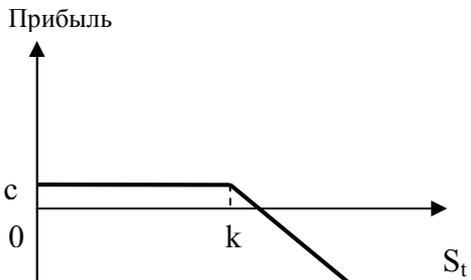
Цена исполнения опциона равна  $k$ , цена опциона  $c$ , рыночная цена базисного актива  $S_t$ ,

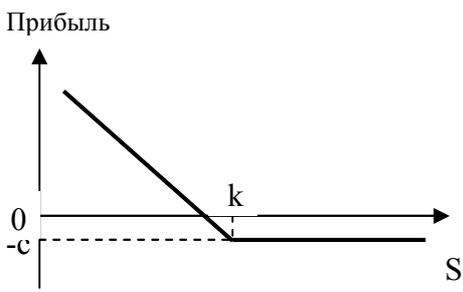
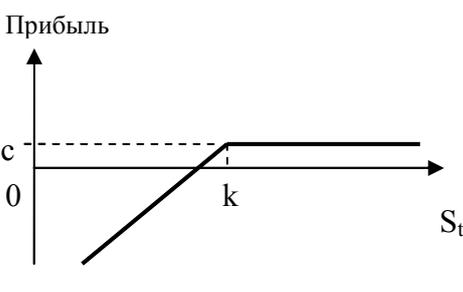
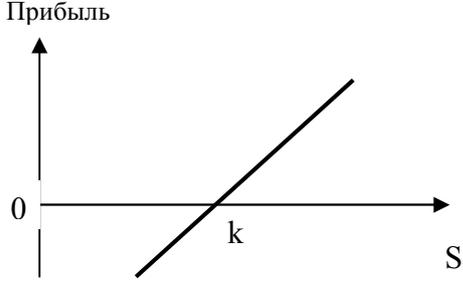
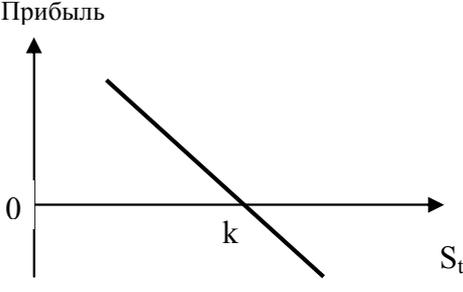
$\{+1\}$  – возрастающая часть графика,

$\{-1\}$  – убывающая часть графика,

$\{0\}$  – горизонтальная часть графика.

##### Базисные опционные стратегии

<p>1). <u>Покупка call-опциона</u> Обозначение +Call или <math>\{0,+1\}</math></p>  <p>Используется при ожидаемом росте цен базисного актива. Прибыль при <math>S_t &gt; k+c</math>, неограниченна; нулевой доход при <math>S_t = k+c</math>; максимальный риск равен цене опциона <math>c</math>.</p>	<p>2). <u>Продажа call-опциона</u> Обозначение -Call или <math>\{0,-1\}</math></p>  <p>Используется при ожидаемом падении цен базисного актива. Продавец надеется, что опцион будет невыгодным. Прибыль при <math>S_t &lt; k+c</math>; не больше <math>c</math>; нулевой доход при <math>S_t = k+c</math>; максимальный убыток неограничен.</p>
<p>3). <u>Покупка put-опциона</u> Обозначение +Put или <math>\{-1,0\}</math></p>	<p>4). <u>Продажа put-опциона</u> Обозначение -Put или <math>\{+1,+1\}</math></p>

 <p>Используется при ожидаемом падении цен базисного актива.          Прибыль при <math>S_t &lt; k-c</math>;          нулевой доход <math>S_t = k-c</math>;          максимальный риск равен цене опциона <math>c</math>.</p>	 <p>Используется при ожидаемой малой подвижности цен базисного актива. Продавец надеется, что опцион будет невыгодным.          Прибыль при <math>S_t &lt; k-c</math>; не больше <math>c</math>;          нулевой доход при <math>S_t = k-c</math>;          максимальный убыток равен <math>k-c</math>.</p>
<p>5). <u>Покупка актива</u> на сумму <math>k</math>          Обозначение +Актив или <math>\{+1,+1\}</math></p>  <p>Используется при ожидаемом росте цен базисного актива.          Прибыль при <math>S_t &gt; k</math>, неограниченна;          нулевой доход при <math>S_t = k</math>;          максимальный риск равен <math>k</math>.</p>	<p>6). <u>Продажа актива</u> на сумму <math>k</math>          Обозначение -Актив или <math>\{-1,-1\}</math></p>  <p>Используется при ожидаемом падении цен базисного актива.          Прибыль при <math>S_t &lt; k</math>;          нулевой доход при <math>S_t = k</math>;          максимальный риск неограничен.</p>

Часто используемые на практике опционные стратегии.

1) *Арбитражные комбинации* – позволяют извлечь выгоду из временных нарушений паритета цен.

2) *Спрэды* – одновременная покупка и продажа опционов одного вида (call или put) на один и тот же актив.

3) *Комбинационные стратегии* - одновременная покупка и продажа опционов разных видов (call и put) на один и тот же актив

Рассмотрим их подробнее.

### Арбитражные комбинации

Рассмотрим следующую ситуацию: инвестор покупает актив и справедливый put опцион на этот же актив.

Если цена актива в момент исполнения будет меньше цены исполнения, то чистые потери инвестора будут равны премии выплаченной за опцион, которая фиксирована.

Если цена актива в момент исполнения будет больше цены исполнения,

то put опцион не будет предъявлен к исполнению. Инвестор продаст активы на рынке, и доход = прибыль – премия за опцион.

Характер выплат по этой стратегии аналогичен call-опциону на тот же актив. Если цены установлены справедливо, то выплаты в точности одинаковы (принцип put- call эквивалентности).

Покупка основного актива	{+1,+1}
Покупка put опциона	{-1,0}
Итого	{0,+1} – покупка call опциона.

Возникновение арбитражных ситуаций напрямую связано с понятием соотношения put-call эквивалентности, описывающим взаимосвязь между ценами опционов на активы и активами. Перепишем соотношения равновесия цен (5.15) и (5.26) в другом виде.

Для опционов на актив

$$C_{call} - C_{put} = S_0 - ke^{-rT},$$

где  $C_{call}$  – цена опциона покупателя,  $C_{put}$  – цена опциона продавца.

Для опционов на валюту

$$C_{call} - C_{put} = S_0 e^{-r_2 T} - ke^{-r_1 T},$$

где  $r_1$  – ставка по ценовой валюте,  $r_2$  – ставка по основной валюте,  $S_0$  – текущий курс обмена валюты,  $k$  – курс основной валюты (2) выраженный в валюте (1), курс исполнения опциона.

Если в какой-то момент времени цены на call-опцион, put-опцион и активы меняются так, что эти соотношения нарушаются, то возникает возможность безрискового арбитража. Можно извлечь прибыль с помощью одной из стратегий.

#### 1) Конверсия

Продажа call-опциона	{0,-1}
Покупка put-опциона	{-1,0} с такой же ценой и датой исполнения
Покупка основного актива	{+1,+1}
Итого	{0,0}

Портфель имеет абсолютно горизонтальный график.

#### 2) Реверс

Покупка call-опциона	{0,+1}
Продажа put-опциона	{+1,0} с такой же ценой и датой исполнения
Продажа основного актива	{-1,-1}
Итого	{0,0}

**Пример.** Оценить равновесие на рынке, если текущий обменный курс  $S_0=29,56$  руб/\$, цены опционов на \$1  $C_{call}=0,45$ руб.,  $C_{put}=1,35$ руб., цена исполнения  $k=30$  руб/\$, срок 3 месяца ( $T=3/12$ ), непрерывные ставки по долларам  $r_1=4\%$ , по рублям  $r_2=20\%$ .

Оценим put-call равновесие по формуле (5.2).

$$0,45 - 1,35 = 29,56 \cdot e^{-0,04 \cdot (3/12)} - 30 \cdot e^{-0,2 \cdot (3/12)}$$

$-0,9 \neq 0,73$ , равновесия на рынке нет, можно извлечь прибыль без риска.

### Конверсия

	t=0	t=3 мес, S <sub>T</sub> =32	t=3 мес, S <sub>T</sub> =28
Продажа call	+0,45	-(32-30) = -2	обесценился
Покупка put	-1,35	обесценился	30-28 = +2
Покупка основного актива	-29,56 рублей (+ \$1)	$1 \cdot e^{0,04 \cdot (3/12)} = \$1,01 = 32,32$ рубля (продали \$ с процентами на рынке)	$1 \cdot e^{0,04 \cdot (3/12)} = \$1,01 = 28,28$ рубля
Баланс средств за период	-30,46 (деньги взяли в долг)	+30,32	+30,28
Доход	$-30,46 \cdot e^{0,2 \cdot (3/12)} = -32,02$ (долг по кредиту через 3 месяца)	-32,02+30,32 = -1,7	-32,02+30,28 = -1,74

Убыток получается при любом изменении цен, конверсия невыгодна. Рассмотрим другую стратегию.

### Реверс

	t=0	t=3 мес, S <sub>T</sub> =32	t=3 мес, S <sub>T</sub> =28
Покупка call	-0,45	32-30 = +2	обесценился
Продажа put	+1,35	Обесценился	-(30-28) = -2
Продажа основного актива	+29,56 рублей (\$1)	$-1 \cdot e^{0,04 \cdot (3/12)} = -\$1,01 = -32,32$ рубля	$-1 \cdot e^{0,04 \cdot (3/12)} = -\$1,01 = -28,28$ рубля
Баланс средств за период	+30,46 (деньги положили под проценты)	-30,32	-30,28
Доход	$+30,46 \cdot e^{0,2 \cdot (3/12)} = +32,02$ (получили с процентами через 3 месяца)	32,02-30,32 = +1,7	32,02-30,28 = +1,74

При любом изменении цен будет прибыль, реверс выгоден.

## Приложение

Значение функции нормального распределения  $\Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2T}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{x^2}{2}} dx$

$z$	$\Phi(z)$	$z$	$\Phi(z)$	$z$	$\Phi(z)$
		<b>-1,00</b>	0,1587	<b>1,00</b>	0,8413
<b>-2,95</b>	0,0016	<b>-0,95</b>	0,1711	<b>1,05</b>	0,8531
<b>-2,90</b>	0,0019	<b>-0,90</b>	0,1841	<b>1,10</b>	0,8643
<b>-2,85</b>	0,0022	<b>-0,85</b>	0,1977	<b>1,15</b>	0,8749
<b>-2,80</b>	0,0026	<b>-0,80</b>	0,2119	<b>1,20</b>	0,8849
<b>-2,75</b>	0,0030	<b>-0,75</b>	0,2266	<b>1,25</b>	0,8944
<b>-2,70</b>	0,0035	<b>-0,70</b>	0,2420	<b>1,30</b>	0,9032
<b>-2,65</b>	0,0040	<b>-0,65</b>	0,2578	<b>1,35</b>	0,9115
<b>-2,60</b>	0,0047	<b>-0,60</b>	0,2743	<b>1,40</b>	0,9192
<b>-2,55</b>	0,0054	<b>-0,55</b>	0,2912	<b>1,45</b>	0,9265
<b>-2,50</b>	0,0062	<b>-0,50</b>	0,3085	<b>1,50</b>	0,9332
<b>-2,45</b>	0,0071	<b>-0,45</b>	0,3264	<b>1,55</b>	0,9394
<b>-2,40</b>	0,0082	<b>-0,40</b>	0,3446	<b>1,60</b>	0,9452
<b>-2,35</b>	0,0094	<b>-0,35</b>	0,3632	<b>1,65</b>	0,9505
<b>-2,30</b>	0,0107	<b>-0,30</b>	0,3821	<b>1,70</b>	0,9554
<b>-2,25</b>	0,0122	<b>-0,25</b>	0,4013	<b>1,75</b>	0,9599
<b>-2,20</b>	0,0139	<b>-0,20</b>	0,4207	<b>1,80</b>	0,9641
<b>-2,15</b>	0,0158	<b>-0,15</b>	0,4404	<b>1,85</b>	0,9678
<b>-2,10</b>	0,0179	<b>-0,10</b>	0,4602	<b>1,90</b>	0,9713
<b>-2,05</b>	0,0202	<b>-0,05</b>	0,4801	<b>1,95</b>	0,9744
<b>-2,00</b>	0,0228	<b>0,00</b>	0,5000	<b>2,00</b>	0,9773
<b>-1,95</b>	0,0256	<b>0,05</b>	0,5199	<b>2,05</b>	0,9798
<b>-1,90</b>	0,0287	<b>0,10</b>	0,5398	<b>2,10</b>	0,9821
<b>-1,85</b>	0,0322	<b>0,15</b>	0,5596	<b>2,15</b>	0,9842
<b>-1,80</b>	0,0359	<b>0,20</b>	0,5793	<b>2,20</b>	0,9861
<b>-1,75</b>	0,0401	<b>0,25</b>	0,5987	<b>2,25</b>	0,9878
<b>-1,70</b>	0,0446	<b>0,30</b>	0,6179	<b>2,30</b>	0,9893
<b>-1,65</b>	0,0495	<b>0,35</b>	0,6368	<b>2,35</b>	0,9906
<b>-1,60</b>	0,0548	<b>0,40</b>	0,6554	<b>2,40</b>	0,9918
<b>-1,55</b>	0,0606	<b>0,45</b>	0,6736	<b>2,45</b>	0,9929
<b>-1,50</b>	0,0668	<b>0,50</b>	0,6915	<b>2,50</b>	0,9938
<b>-1,45</b>	0,0735	<b>0,55</b>	0,7088	<b>2,55</b>	0,9946
<b>-1,40</b>	0,0808	<b>0,60</b>	0,7257	<b>2,60</b>	0,9953
<b>-1,35</b>	0,0885	<b>0,65</b>	0,7422	<b>2,65</b>	0,9960
<b>-1,30</b>	0,0968	<b>0,70</b>	0,7580	<b>2,70</b>	0,9965
<b>-1,25</b>	0,1057	<b>0,75</b>	0,7734	<b>2,75</b>	0,9970
<b>-1,20</b>	0,1151	<b>0,80</b>	0,7881	<b>2,80</b>	0,9974
<b>-1,15</b>	0,1251	<b>0,85</b>	0,8023	<b>2,85</b>	0,9978
<b>-1,10</b>	0,1357	<b>0,90</b>	0,8159	<b>2,90</b>	0,9981
<b>-1,05</b>	0,1469	<b>0,95</b>	0,8289	<b>2,95</b>	0,9984

При значениях  $z < -3$  значение функции  $\Phi(z) = 0$ , при  $z > 3$  значение функции  $\Phi(z) = 1$ .