ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТЕОРИИ ИГР

О1. ***Теория игр*** — теория математических моделей принятия оптимальных решений в условиях конфликта интересов участников игры и неопределенности внешних условий.

О2. ***Конфликтная ситуация*** - ситуация в практической деятельности людей, когда два или несколько участников, имея различные цели и средства их достижения, пытаются достичь результата в условиях, когда никто из них полностью не влияет на ход событий.

З1. Участник конфликта принимает решения не на основании объективных обстоятельств, а на основании своих субъективных представлений о них, т.е. имеет место неполное представление об обстановке к моменту принятия решения.

З2. Участник конфликта располагает только набором вариантов обстоятельств, в которых следует принимать решения. При этом ему не известны ни вероятностные характеристики факторов, влияющих на обстоятельства, ни их вероятностное распределение на множестве вариантов; таким образом, он действует в условиях неопределенности.

О3. ***Игровая модель*** - формальная модель принятия решений в условиях неопределенности, когда у принимающего решения субъекта имеется некоторый противник, уточняющий неизвестные варианты таким образом, чтобы поставить субъекта в наихудшее положение.

О4. ***Понятие оптимальности*** в теории игр (ТИ) интерпретируется как объективная разумность, выгодность, целесообразность, справедливость, осуществимость, устойчивость.

Выбор принципа оптимальности производится в соответствии с конкретной постановкой задачи, формализуемой игровой моделью; принцип оптимальности должен быть реализуем.

Предметом формального моделирования ТИ являются разумные действия лиц и коллективов, объединенных по какому-либо признаку, имеющих различные интересы и преследующих различные цели в условиях конфликта и неопределенности.

О 5. Совокупность правил и условий, оговоренных игроками, называется ***игрой,*** каждая их конкретная реализация - ***партией.***

Определение 6. Сумма, которую получает каждый игрок в результате игры, называется ***выигрышем;*** в случае, если выигрыш отрицательный, он интерпретируется как ***проигрыш.***

О7. Набор правил, однозначно определяющих действия игрока во всех возможных случаях развития игры называется ***стратегией.***

О8. Принятие игроком в процессе игры того или иного решения и его реализация называется ***ходом;*** если ход выбирается случайным образом, то он называется ***случайным***, в противном случае - ***личным***.

О9. Формализованное правило, согласно которому можно определить выигрыш каждого игрока в конкретной ситуации, т.е. в зависимости от стратегий, выбранных игроками, называется ***платежной функцией игры***.

Основные признаки, по которым производится ***классификация*** игр, следующие: количество игроков, количество стратегий, характер взаимоотношений, характер выигрышей, вид функции выигрыша, количество ходов, состояние информации.

О10. Игра, в которой принимают участие два игрока (n=2) называется ***парной***, при $n>2$ — ***множественной*** (игры одного игрока в ТИ не рассматриваются).

О11. Если в игре каждый из игроков имеет конечное число стратегий, то игра - ***конечная***, если хотя бы один из игроков имеет бесконечное число стратегий — ***бесконечная.***

О12. Игры, в которых игроки не могут вступать в коалиции, называются ***бескоалиционными,*** в противном случае - ***коалиционными;*** если коалиции определены априори, игра называется ***кооперативной***.

О13. Если сумма выигрышей всех игроков в каждой партии игры равна нулю, то такая игра называется ***игрой с нулевой суммой.*** Частный случай при $n=2$: парная игра с нулевой сумой называется ***антагонистической,*** т.к. выигрыш A равен проигрышу B.

О14. Конечная парная игра с нулевой суммой называется ***матричной игрой;*** функция выигрыша первого игрока задается в виде матрицы, у которой строки - стратегии первого игрока, столбцы - стратегии второго. Такая матрица называется ***платежной матрицей игры***.

О15. Конечная игра двух игроков с ненулевой суммой называется ***биматричной;*** функции выигрышей задаются для обоих игроков в виде их платежных матриц.

Выделяются и другие классы игр по виду функции выигрыша.

О16. Игры, оканчивающиеся после одного хода - ***одношаговые,*** иначе — ***многошаговые.***

О17. Если игроку известны все предыдущие ходы, то игра **называется *с полной информацией;*** иначе - с ***неполной***.

Перечисленные виды игр и приведенные признаки их классификации не являются полными; существуют и другие виды игр и системы их классификации.

МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ

Принцип максимина; решение игры в чистых стратегиях

Теория игр обосновывает выбор принципов, оптимальности поведения игроков и разрабатывает алгоритмы нахождения оптимальных стратегий и выигрышей игроков. Признаками игровой ситуации являются: наличие конфликта интересов, неполнота и неопределенность информации. Такие условия вынуждают участника игры действовать по логике расчета на наихудшую реализацию неизвестных условий, выбирая из наихудших реализаций лучшую. В качестве принципа оптимальности поведения игроков в матричных играх, выработанного теорией игр, служит принцип ***устойчивости,*** когда отклонение от оптимального поведения невыгодно ни одному игроку при условии, что другой

действует оптимальным образом.
По определению (14) платежная функция матричной игры задается в виде матрицы $A = \{a_{ij}\}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$, элемент a_{ij} которой есть выигрыш первого игрока при условии, что первый игрок (игрок *A)* выбрал стратегию *i* из набора возможных стратегий $A_i, i = \overline{1,m}$, а второй игрок (игрок *B)* выбрал стратегию *j* из набора возможных стратегий $B_j,\ j = \overline{1,n}$.

Первый игрок старается максимизировать свой выигрыш в условиях неопределённости, создаваемой антагонистическими действиями второго игрока. В этом случае игрок *A* для каждой своей стратегии *i* определяет свой гарантированный выигрыш, т.е. выигрыш в худшей для себя ситуации $\alpha_i = \min\limits_j a_{ij}, i = \overline{1,m}$.

Т.к. выбор любой стратегии *Ai* в его распоряжении то, чтобы максимизировать свой гарантированный выигрыш, игрок *A* из гарантированных выигрышей по стратегиям выбирает максимальный

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} \qquad (1)$$

О18. Величина α вычисленная по (1), называется ***нижней чистой ценой игры*** и интерпретируется как максимальный гарантированный выигрыш *A;* стратегия (стратегии) A_{i^0}, при которой выполняется (1), называется ***максиминной стратегией.***

Определим нижнюю чистую цену игры и максиминные стратегии для примера 1:

$$\alpha = \max_i \min_j a_{ij} = \max_i (-6,-6,-8,-8,-10) = -6;$$

максиминные стратегии - A_1, A_2.

Второй игрок старается минимизировать свой проигрыш в условиях противодействия игрока *A*. Поэтому игрок *B* для каждой своей стратегии *j* определяет свой гарантированный проигрыш, т.е. то, что он вынужден будет заплатить при самом неблагоприятном поведении *A*

$$\beta = \max_i a_{ij},\ j = \overline{1,n}.$$

Т.к. он волен выбирать любую свою стратегию, он, естественно, выбирает ту, что минимизирует его проигрыш

$$\beta = \min_j \max_i a_{ij}. \qquad (2)$$

О19. Величина β, рассчитанная по (2), называется ***верхней чистой ценой игры*** и интерпретируется как минимальный гарантированный проигрыш *B:* стратегия (стратегии) B_{j^0}, при которой выполняется (2), называется

минимаксной стратегией.

Определим верхнюю чистую цену игры и минимаксные стратегии для примера 1:

$\beta = \min_j \max_i a_{ij} = \min_j (5,7,7,9,9) = 5$; минимаксная стратегия - B_1.

О20. ***Решением игры*** называется процесс нахождения оптимальных стратегий игроков и цены игры; ***ценой матричной игры*** называется выигрыш игрока *А*.

О21. Если для чистых максиминной и минимаксной стратегий выполняется равенство $\alpha = \beta$ при $A_{i^0} = B_{j^0}$, то:

—стратегии A_{i^0} и B_{j^0} называются ***уравновешивающей парой*** и являются ***оптимальными стратегиями;***

—точка $(i^0; j^0)$ называется ***седловой точкой;***

—элемент $a_{i^0 j^0}$ называется ***седловым элементом*** и является ***ценой игры***.

Введем векторное представление стратегий. Пусть игроки *А* и *В* в матричной игре с платёжной матрицей $A = \{a_{ij}\}, i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ могут выбирать одну из стратегий совокупностей *{Ai}* и *{Bj}*. Образуем вектора $\overline{p}$ и $\overline{q}$ следующим образом: если *А* выбрал стратегию A_i то $\overline{p} = \left(0,\ldots,0, \underset{i-место}{1}, 0,\ldots,0\right)$;

если *В* выбрал стратегию *Bj*, то $\overline{q} = \left(0,\ldots,0, \underset{j-место}{1}, 0,\ldots,0\right)$, т.е. $p_i = 1, q_j = 1$. Тогда учитывая, что набор стратегий представляет собой полную группу событий, имеют место условия нормировки: $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1; \sum_{j=1}^{n} q_j = 1$.

О22. Вектора $\overline{p}$ и $\overline{q}$, описывающие выбор стратегий игроками *А* и *В,* называются ***стратегиями игроков; чистая стратегия*** *Ai* или *Bj* — это стратегия, выбранная с вероятностью, равной единице.

Определим платёжную функцию матричной игры по схеме:

1. Введем случайные величины ξ, η такие, что

$$P\{\xi = i\} = p_i; i = \overline{1,m},$$
$$P\{\eta = j\} = q_j, j = \overline{1,n}.$$

Здесь $P\{c\}$ - вероятность того, что событие *c* произошло. Приведенные соотношения, по определению, задают законы распределения вероятностей случайных величин ξ, η.

2.Образуем систему случайных величин ξ и η - (ξ, η) или вектор, компонентами которого являются значения случайных величин ξ и η.

3.Введем функцию системы случайных величин v такую, что она принимает значение элемента платежной матрицы, если случайная величина $\xi = i$ и случайная величина $\eta = j$

$$v(\xi,\eta)=a_{ij}, i=\overline{1,m}, j=\overline{1,n}. \qquad (3)$$

Таким образом, значение случайной функции v есть величина выигрыша игрока A при различных стратегиях игроков.

4.Найдем средний выигрыш игрока A как математическое ожидание функции двух случайных аргументов

$$M[v(\xi,\eta)]=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}v(\xi,\eta)P(\xi=i,\eta=j). \qquad (4)$$

Здесь *M[v]* — математическое ожидание случайной функции *V*.

Игроки A и B выбирают стратегии тайно и независимо друг от друга, следовательно, случайные величины ξ и η независимы, поэтому можно записать:

$$P(\xi=i,\eta=j)=P(\xi=i)P(\eta=j)=p_i q_j.$$

Тогда (4) с учетом (3) запишется в виде

$$M[v(\xi,\eta)]=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}p_i q_j.$$

О23. Функция вида $V(\overline{p},\overline{q})=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}p_i q_j$ называется ***платёжной функцией*** матричной игры.

О24. Чистые стратегии $\overline{p}^*$ и $\overline{q}^*$ называются *оптимальными,* если для любой чистой стратегии игроков - $\overline{p},\overline{q}$ выполняется условие

$$V\left(\overline{p},\overline{q}^*\right)\le V\left(\overline{p}^*,\overline{q}^*\right)\le V\left(\overline{p}^*,\overline{q}\right). \qquad \mathbf{(5)}$$

Условие (5) означает, что при каждой неоптимальной стратегии игрока A его выигрыш не возрастает в сравнении с оптимальным при условии, что игрок B действует оптимальным образом; при каждой неоптимальной стратегии игрока B его проигрыш не убывает в сравнении с оптимальным, если игрок A действует оптимальным образом.

Примем без доказательства теорему, показывающую связь седловой точки с ценой игры и оптимальными стратегиями.

Т1. Для того чтобы точка (i^0, j^0) была седловой, необходимо и достаточно, чтобы чистые стратегии $\overline{p} = \left(0,\ldots,0,\underset{i^0-место}{1},0,\ldots,0\right)$, $\overline{q} = \left(0,\ldots,0,\underset{j^0-место}{1},0,\ldots,0\right)$ были ***оптимальными;*** при этом цена игры равна седловому элементу $a_{i^0 j^0}$.

Док-во:

Необходимость:

Пусть $a_{i^0 j^0}$ –седл. точка платеж. матр. А. По определ. точка (i^0, j^0) наз-ся седловой, если эл-нт $a_{i^0 j^0}$ явл. наименьшим в строке i^0 и наибольшим в столбце $j^0 \Rightarrow a_{i^0 j^0} \le a_{i^0 j}$, $a_{i^0 j^0} \ge a_{ij^0}$, $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ или

$$a_{ij^0} \le a_{i^0 j^0} \le a_{i^0 j}, \quad i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n} \tag{7}$$

Выделим сит-ции, определяемые с сочетаниями стрт. игроков: A_{i^0} и B_{j^0}, A_i и B_{j^0}, A_{i^0} и B_j или ч/з вектора страт. б-м иметь: $\overline{p}^0$ и $\overline{q}^0$, $\overline{p}$ и $\overline{q}^0$, $\overline{p}^0$ и $\overline{q}$.

$\overline{p}$ и $\overline{q}$ – $\forall$ чистая стратегия. Исп-зуя выраж. (5) для платеж. функции игры вычислим выигр. А для указанных ситуаций:

$$\left.\begin{aligned} V\left(\overline{p}^0, \overline{q}^0\right) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, p_i^0 q_j^0 = a_{i^0 j^0} \\ V\left(\overline{p}, \overline{q}^0\right) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, p_i\, q_j^0 = a_{ij^0}, i = \forall \\ V\left(\overline{p}^0, \overline{q}\right) &= \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, p_i^0 q_j = a_{i^0 j}, j = \forall \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Тогда (7) можно записать в виде:

$$V\left(\overline{p}, \overline{q}^0\right) \le V\left(\overline{p}^0, \overline{q}^0\right) \le V\left(\overline{p}^0, \overline{q}\right) \tag{9}$$

Сравнивая (9) с (6), делаем вывод, что чист. страт. $\overline{p}^0$ и $\overline{q}^0$ будут оптим. Очевидно, что $V\left(\overline{p}^0, \overline{q}^0\right) = V^*$.

Достат-ть:

Пусть чист. страт. A_{i^0} и B_{j^0} – опт., тогда цена игры $V^* = a_{i^0 j^0}$ и по (6) справ (9) для $\forall$ чист. страт. $\overline{p}$ и $\overline{q}$ $\Rightarrow$ соот. (7) и сост-ее его нер-во. ч.т.д.

Лемма. Если для чистых стратегий $\overline{p}^*$ и $\overline{q}^*$ справедливо (5), то $\overline{p}^*$ и $\overline{q}^*$ являются, соответственно, максиминной и минимаксной стратегиями игроков.

Тогда, принцип максимина может быть формализован в виде соотношения $\alpha \le V^* \le \beta$.

Следствие из Т1. Если платёжная матрица A имеет седловую точку, то обязательно существуют оптимальные чистые стратегии; если седловой точки нет, то оптимальные стратегии могут быть только смешанными.

Решение матричной игры в смешанных стратегиях

О25. Стратегии $\overline{p}$ и $\overline{q}$ называются ***смешанными,*** если хотя бы два значения вероятностей выбора стратегий первым и (или) вторым игроками не равны нулю

$$\overline{p} = (0,\ldots,0,p_r,0,\ldots,0,p_s,0,\ldots,0),\ p_r \ne 0,\ p_s \ne 0,$$

$$\overline{q} = (0,\ldots,0,q_l,0,\ldots,0,q_k,0,\ldots,0),\ q_l \ne 0,\ q_k \ne 0.$$

Исходя из того, что стратегии представляют собой полную группу событий, выполняется условие нормировки: $\sum_{i=1}^{m} p_i = 1;\ \sum_{j=1}^{n} q_j = 1.$

Примем без доказательства следующую теорему.

Т2. Для того чтобы смешанные стратегии игроков $\overline{p}^*$ и $\overline{q}^*$ были оптимальными, необходимо и достаточно выполнение условий

$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* \ge V^*,\ j = \overline{1,n}, \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* \le V^*, i = \overline{1,m}. \end{aligned} \tag{10}$$

Док-во:

Необх-ть:

Пусть $\overline{p}^*$ и $\overline{q}^*$ – опт. стратегии, получ. соотнош. (10). Из определ. опт. стратегий (6) имеем: $V\left(\overline{p},\overline{q}^*\right) \le V\left(\overline{p}^*,\overline{q}^*\right) \le V\left(\overline{p}^*,\overline{q}\right)$ или запишем:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\overline{p}_i\,\overline{q}_j^* \le V\left(\overline{p}^*,\overline{q}^*\right) \le \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\,\overline{p}_i^*\,\overline{q}_j \tag{11}$$

Соотн. (11) справ-во для $\forall$ страт. А и В, т.е. $\overline{p}$ и $\overline{q}$ – $\forall$.

Пусть в частности вектор $\overline{p}$ – чист. страт. с $p_i = 1$ и $\overline{q}$ – чист. страт. с

$q_j = 1$, т.е. $\overline{p} = (0,\ldots,1,0,0)$, $\overline{q} = (0,\ldots,1,0,0)$.

Тогда (11) в виде: $\sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} 1 \overline{q}_j^* \le V\left(\overline{p}^*, \overline{q}^*\right) \le \sum\limits_{i=1}^{m}\sum\limits_{j=1}^{n} a_{ij} \overline{p}_i^* 1,\ i = \overline{1,m},\ j = \overline{1,n},$

т.о. получили (10).

Достат-ть:

Пусть (10) вып-ся, тогда $\overline{p}^*$ и $\overline{q}^*$ –оптим.

Запишем прав. часть (11) для произв. в $\overline{q}$:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \overline{p}_i^* \overline{q}_j = \sum_{j=1}^{n} q_j \sum_{i=1}^{m} a_{ij} \overline{p}_i^* \ge \sum_{j=1}^{n} q_j V^* = V^* \sum_{j=1}^{n} q_j = V^* .$$

Т.е. получим правую часть (11). Запишем лев. часть (11) для произвольного век-ра $\overline{p}$:

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \overline{p}_i \overline{q}_j^* = \sum_{i=1}^{m} p_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \overline{q}_j^* \ge \sum_{i=1}^{m} p_i V^* = V^* \sum_{i=1}^{m} p_i = V^* \Rightarrow \text{лев. часть (11).}$$

ч.т.д.

Т.е. выигрыш игрока *A* при его оптимальной смешанной стратегии и любой чистой стратегии игрока *B* не меньше цены игры, а проигрыш игрока *B* при его оптимальной смешанной стратегии и любой чистой стратегии игрока *A* не больше цены игры.

О26. ***Чистые*** стратегии называются ***активными***, если в ***оптимальной смешанной*** стратегии вероятности их принятия не равны нулю. Пусть, например, оптимальная стратегия игрока *A* имеет вид $\overline{p}^* = (\ldots,0,p_r^*,0,\ldots,0,p_s^*,0,\ldots,0)$, тогда вектора стратегий $\overline{p} = \left(\underset{1-\text{место}}{1},0,\ldots,0\right)$, $\overline{p} = \left(0,\ldots,0,\underset{r-\text{место}}{1},0,\ldots,0\right)$, $\overline{p} = \left(0,\ldots,0,\underset{s-\text{место}}{1},0,\ldots,0\right)$ являются активными стратегиями игрока *A* (аналогично для игрока *B).*

Примем без доказательства следующую теорему.

Т3. Если первый из игроков придерживается своей оптимальной смешанной стратегии, а второй игрок выбирает любую активную стратегию, то выигрыш первого игрока равен цене игры

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* = V^*,\ j \in J^{акт}, \qquad (12)$$

аналогично для второго игрока

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* = V^*, i \in I^{акт}. \qquad (13)$$

Здесь $J^{акт}$ и $1^{акт}$ - подмножества номеров активных стратегий, соответственно, игрока *B* и игрока *A*.

Док-во:

Если у А – r-штук акт. стратег., у В – s-штук, не нарушая общности расп-ия их по пор-ку $\bar{p}^* = (p_1, p_2, \ldots, p_r, 0, \ldots, 0)$, $\bar{q}^* = (q_1, q_2, \ldots, q_s, 0, \ldots, 0)$.

1. Пусть А придержив. опт. стратег. $\bar{p}^*$, а В выбир. $\forall$ чист. из активных $\bar{q} = \left\{ 0, \ldots, \underset{j}{1}, \ldots, 0 \right\}, j \le S$. Необх-мо док-ть, что выигрыш А при этих усл. равен цене игры, т.е. $V\left(\bar{p}^*, \bar{q}^{акт}\right) = V^*$, $\bar{q}^{акт}$ – чист. из активных.

а) распишем прав. часть:

$$V^* = V(p^*, q^*) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \bar{p}_i^* \bar{q}_j^* = \sum_{j=1}^{s} q_j^* \sum_{i=1}^{r} a_{ij} \bar{p}_i^* \ge \sum_{j=1}^{s} q_j^* V^* = V^* \sum_{j=1}^{s} q_j^* = V^*.$$

Получили противоречие, $\Rightarrow \sum_{i=1}^{r} a_{ij} p_i^* = V^*$, т.е. (10) вып-ся на равенстве.

б) распишем лев. часть:

$$V\left(\bar{p}^*, \bar{q}^{акт}\right) = \sum_{i=1}^{r} a_{ij} p_i^* = 1, \text{ из а) } \Rightarrow \sum_{i=1}^{r} a_{ij} p_i^* = V^*.$$

2. Пусть В – страт. $\bar{q}^*$, А – $\bar{p}^{а\ к}$, т.е. $\bar{p} = (0, \ldots, 1, \ldots 0), i \le r$. Необх-ть: $V\left(\bar{p}^{акт}, \bar{q}^*\right) = V^*$.

а) $V^* = V(p^*, q^*) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \bar{p}_i^* \bar{q}_j^* = \sum_{i=1}^{r} p_i^* \sum_{j=1}^{s} a_{ij} \bar{q}_j^* \le \sum_{i=1}^{r} p_i^* V^* = V^* \sum_{i=1}^{r} p_i^* = V^*$

– противоречие $\Rightarrow$ док-но $\sum_{j=1}^{s} a_{ij} q_j^* = V^*$.

б) $V\left(\bar{p}^{акт}, \bar{q}^*\right) = \sum_{j=1}^{s} a_{ij} q_j^* \cdot 1 = (из\ а) = V^*$. ч.т.д.

Решение игры 2x2

Рассмотрим игру, в которой $m = n = 2$ с платежной матрицей $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и векторами стратегий $\bar{p} = (p_1, 1 - p_1)$ и $\bar{q} = (q_1, 1 - q_1)$.

Найдем оптимальную смешанную стратегию игрока *А,* предварительно убедившись, что решения в чистых стратегиях нет. В соответствии с теоремой 3, применение игроком оптимальной смешанной стратегии $\bar{p}^*$ должно обеспечить ему выигрыш, равный цене игры при условии, что *В* выбирает стратегию из активных

$$\sum_{i=1}^{2} a_{ij} p_i^* = V^*, \ j = 1,2. \qquad (6)$$

Запишем (6) для каждой активной стратегии *В*

для $j = 1$: $a_{11} p_1^* + a_{21}(1 - p_1^*) = V^*$;

для $j = 2$: $a_{12} p_1^* + a_{22}(1 - p_1^*) = V^*$. (7)

Из(7)получим

$$p_1^* = \frac{a_{22} - a_{21}}{a_{11} - a_{21} - a_{12} + a_{22}}.$$

Тогда $p_2^* = 1 - p_1^*$ и оптимальная стратегия игрока *А* найдена: $\bar{p}^* = (p_1^*, p_2^*)$.

Аналогичным образом находится оптимальная стратегия игрока *В*. Применение игроком *В* оптимальной стратегии $\bar{q}^*$ должно обеспечить ему проигрыш, равный цене игры при условии, что *А* выбирает стратегию из активных

$$\sum_{j=1}^{2} a_{ij} q_j^* = V^*, i = 1,2. \qquad (8)$$

Запишем условие (8) для каждой активной стратегии игрока *А*

для $i = 1$: $a_{11} q_1^* + a_{12}(1 - q_1^*) = V^*$;

для $i = 2$: $a_{21} q_1^* + a_{22}(1 - q_1^*) = V^*$. (9)

Из(9)получим

$$q_1^* = \frac{a_{22} - a_{12}}{a_{11} - a_{21} - a_{12} + a_{22}}.$$

Тогда $q_2^* = 1 - q_1^*$ и оптимальная стратегия игрока *В* найдена: $\bar{q}^* = (q_1^*, q_2^*)$.

Для определения цены игры подставим q_1^* в одно из уравнений (9) или p_1^* в одно из уравнений (7).

Графоаналитический метод **решения матричных игр**

Решение игры 2xn

Аналитический метод решения игры 2x2 исходит из того, что активные стратегии игроков известны. В играх 2xn и mx2 с числом стратегий *n, m>2* активные стратегии игроков неизвестны; для их определения используются соответствующие графические построения.

Для игры 2xn имеем платежную матрицу вида $A = \begin{pmatrix} a_{11}\, a_{12} \ldots a_{1n} \\ a_{21}\, a_{22} \ldots a_{2n} \end{pmatrix}$.

Количество стратегий игрока *A* составляет $m = 2$и вектор стратегий имеет вид $\overline{p} = (p_1, p_2)$ или $\overline{p} = (x, 1-x)$; количество стратегий игрока *B* равно *n* и вектор стратегий имеет вид $\overline{q} = (q_1, q_2, \ldots, q_n)$. Если игрок *B* выбрал чистую стратегию *Bj* из набора возможных, то выигрыш игрока *A* является линейной функцией от *x* — вероятности принятия игроком *A* первой стратегии

$$l_j(x) = \sum_{i=1}^{2} a_{ij} p_i = a_{1j} x + a_{2j} (1 - x).$$

Таким образом, каждой стратегии *Bj* соответствует прямая $l_j(x), j = \overline{1, n}$. Введём в рассмотрение функцию

$$\varphi(x) = \min_j l_j(x).$$

Не сложно показать, что графиком $\varphi(x)$ будет нижняя огибающая всех прямых, соответствующих стратегиям игрока *B*. Другими словами, ломаная $\varphi(x)$ есть нижняя граница выигрыша игрока *A*. Игрок *A* стремится максимизировать свой выигрыш, поэтому он должен выбирать свою оптимальную стратегию $\overline{p}^*$ так, чтобы аргумент *x* приносил максимум $\varphi(x)$, т.е. максимум гарантированного выигрыша

$$\varphi(x^*) = \max_{0 \le x \le 1} \varphi(x).$$

Графически *x** будет абсциссой наивысшей точки ломаной $\varphi(x)$; ординатой наивысшей точки является $l_j(x^*), j \in J^{акт}$, т.е. цена игры, т.к. это значение выигрыша *A* при $\overline{p}^* = (x^*, 1 - x^*)$ и активной стратегии *B*. Активные стратегии *B* можно определить графически. Пусть это будут стратегии номер *s* и *r*, соответствующие прямым $l_s(x)$ и $l_r(x)$ дающим в пересечении точку с абсциссой *x**. Тогда вектор оптимальных стратегий игрока *B* имеет вид $\overline{q}^* = (0, \ldots, 0, q_s^*, 0, \ldots, 0, q_r^*, 0, \ldots, 0)$. Значения вероятностей q_s* и q_r* находятся по матрице A^0 вида

$$A^0 = \begin{pmatrix} a_{1s} & a_{1r} \\ a_{2s} & a_{2r} \end{pmatrix}$$

по правилу игры 2x2.

Графическая иллюстрация рассуждений приведена на рис. 1

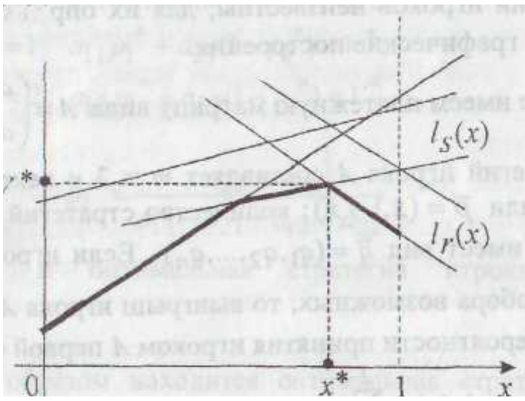


Рис.1

Выделим по виду $\varphi(x)$ следующие частные случаи.

Случай 1. Рассмотрим случай, когда $\varphi(x) = \min\limits_j l_j(x)$ имеет множество точек, максимальных на [0, 1]. Это получается когда $l_k(x)$ параллельно O_x, или $a_{1k} = a_{2k}$. Тогда игрок *A* имеет бесконечное множество оптимальных стратегий $\overline{p}^* = (x^*, 1-x^*)$, где $x^* \in [a, b]$ (рис. 3).

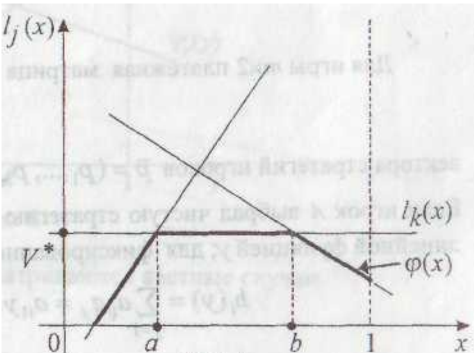


Рис. 3

Оптимальной стратегией игрока *B* является чистая стратегия $B_k - \overline{q}^* = \left(0,\ldots,0,\underset{k\ место}{1},0,\ldots,0\right)$. Цена игры $V^* = l_к(x^*) = a_{2k}$.

Случай 2. Пусть $\max \varphi(x)$ достигается в крайних точках отрезка [0,1]:

а) если x*=0 (рис. 4), то получим решение в чистых стратегиях; оптимальной стратегией игрока *A* будет чистая стратегия $\overline{p}^*$=(0,1), оптимальной стратегией игрока *B* - чистая стратегия $\overline{q}^* = (0,\ldots,0,\underset{k\ место}{1},0,\ldots,0)$, цена игры

$V^* = l_k(0) = a_{2k}$;

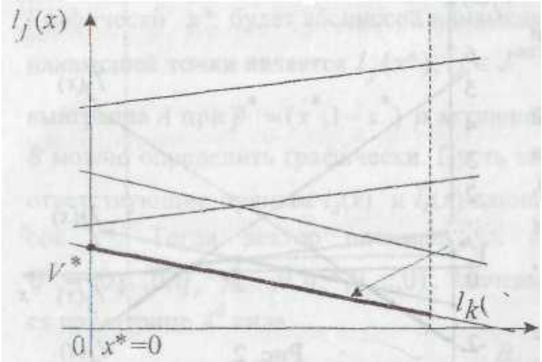


Рис. 4

б) если $x^* = 1$ (рис. 5), то получим решение в чистых стратегиях; оптимальной стратегией игрока *A* будет чистая стратегия $\overline{p}^* = (1, 0)$, оптимальной стратегией игрока *B* — чистая стратегия $\overline{q}^* = (0,\ldots,0,\underset{k\,место}{1},0,\ldots,0)$, цена игры

$V^* = l_k(1) = a_{1k}$.

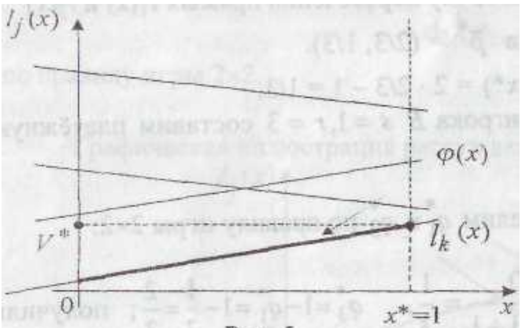


Рис. 5

Решение игры mx2

Для игры *m*x*2* платёжная матрица имеет вид $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} \end{pmatrix}$; вектора стратегий игроков $\overline{p} = (p_1, \ldots, p_m)$, $\overline{q} = (q_1, q_2) = (y, 1-y)$.

Если игрок *A* выбрал чистую стратегию *Ai,* то проигрыш игрока *B* является линейной функцией *y;* для фиксированного *i* имеем

$$h_i(y) = \sum_{j=1}^{2} a_{ij} q_j = a_{i1} y + a_{i2}(1-y), i = \overline{1,m} \qquad (10)$$

Введём в рассмотрение функцию $\psi(y)$ вида

$$\psi(y) = \max_i h_i(y).$$

Ломаная $\psi(y)$ есть верхняя огибающая всех прямых, соответствующих чистым стратегиям игрока *A*. Другими словами, ломаная есть верхняя граница проигрыша игрока *B*. Игрок *B* стремится минимизировать свой проигрыш, поэтому он должен выбирать свою оптимальную стратегию $\overline{q}^*$ так, чтобы аргумент y приносил минимум $\psi(y)$, т.е. минимум гарантированного проигрыша:

$$\psi(y^*) = \max_{0\le y\le 1} \psi(y).$$

Графически y^* будет абсциссой наинизшей точки ломаной $\psi(y)$; ординатой точки является $h_i(y^*), i \in I^{акт}$, т.е. цена игры, т.к. это значение проигрыша игрока *B* при стратегии $\overline{q}^*$ и активной стратегии *A*. Активные стратегии игрока *A* определяются графически. Пусть активными будут стратегии A_s и A_r; тогда $\overline{p}^* = (0,\ldots,0,p_r^*,0,\ldots,0,p_s^*,0,\ldots,0)$. Значения p_r^* и p_s^* находятся по матрице вида

$$A^0 = \begin{pmatrix} a_{s1} & a_{s2} \\ a_{r1} & a_{r2} \end{pmatrix}$$

по правилу игры 2x2.

Графическая иллюстрация рассуждений приведена на рис.6.

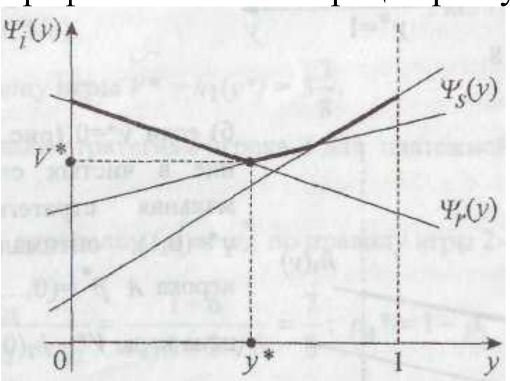


Рис. 6

Аналогично предыдущему рассматриваются частные случаи.

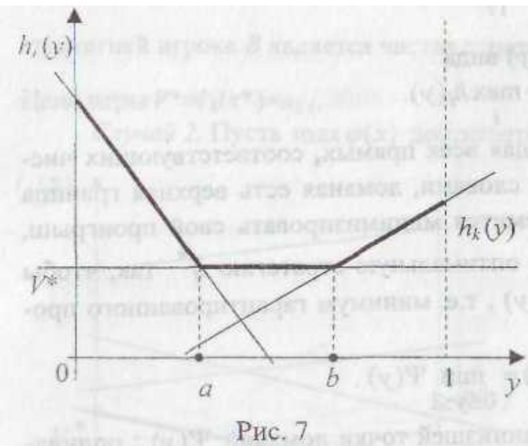


Рис. 7

Случай 1. Точек минимума на [0,1] - множество (рис. 7), тогда для игрока *B* имеем множество решений $\overline{q}^* = (y^*, 1-y^*)$, где y^* из отрезка $[a,b]$; оптимальная стратегия игрока *A* чистая стратегия $\overline{p}^* = \left(0,\ldots,0,\underset{k\ место}{1},0,\ldots,0\right)$; цена игры $V^*=h_k(y^*)=a_{k2}$.

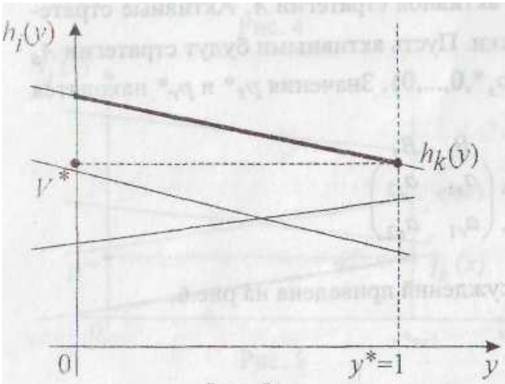


Рис. 8

Случай 2. Минимум достигается в крайних точках отрезка $[0,1]$:

а) если $y^*=1$ (рис. 8) имеем решение в чистых стратегиях; оптимальная стратегия игрока B $\overline{q}^*=(1,0)$, оптимальная стратегия игрока A, $\overline{p}^* = \Big(0,\ldots,0,\underset{k\ \text{место}}{1},0,\ldots,0\Big)$, цена игры $V^*=h_k(1)=a_{k1}$;

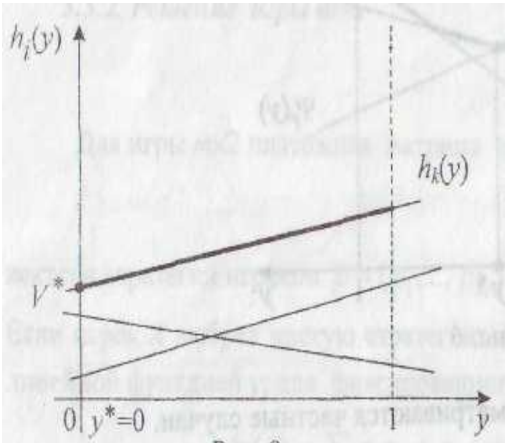


Рис. 9

б) если $y^*=0$ (рис. 8) имеем решение в чистых стратегиях; оптимальная стратегия игрока B $q^*=(1,0)$, оптимальная стратегия игрока A $\overline{p}^* = \Big(0,\ldots,0,\underset{k\ \text{место}}{1},0,\ldots,0\Big)$, цена игры $V^*=h_k(0)=a_{k2}$.

§6. ИГРЫ n x n

Для игр 2x2 номере акт.стратегий были заданы заранее, для игр nx2 и 2xn акт.страт. наход. Графически, как страт., дающие в пересеч. (.) максимина x* и минимакса y*. В случае игры nxn для n>2 номера акт. страт не известны и не м.б. получ. граф-ки (n-мерн. пр-во) => исп соотнош Т3 ($\sum_i a_{ij}p_i^* = V^*, j \in J^{акт}$ и $\sum_j a_{ij}q_j^* = V^*, i \in I^{акт}$) нельзя, а надо польз соотнош Т2 ($\sum_i a_{ij}p_i^* \ge V^*, j - \text{чистые}$ и $\sum_j a_{ij}q_j^* \le V^*, i - \text{чистые}$), кот работают с $\forall$ чист.страт. игр, те н-о реш. сист.нер-в (n-нер-в,n-неизв-х) + усл. нормировки, чтобы найти n+1 неизвестную.

Схема решения:

1. Дел-ся предпол. о том, что игра им реш в полне смещ страт, т.е. мн-во $J^{акт}$, $I^{акт}$ вкл номера j = 1,n и j = 1,m. В этом случ усл Т3 зап на рав-ах для всех i и j; добавив 1 из усл нормир, им СЛАУ, с числом неизв 2n+1 и числом ур 2n+1.

Система реш с исп-ем расч-х форм получ выше, если $\exists\ A^{-1}$

Если вектора $\overline{p^*}, \overline{q^*}$ сод только полож компан реш иг найдено; в против случ дел выв, что предпол о вполне смеш страт иг-ов не верно и осуществл переход к схеме опред-ия $J^{акт}$, $I^{акт}$ м-ом перебора с использованием Т4.

2. В соотв с Т4 делается, напр, предпол о том, что усл i' Т2 для иг А вып на строгом нер-ве, тогда соотв компонвектора р полаг = 0 $\Rightarrow$ $p_{i'} = 0$, а услов i' опускается.
В этом случ набор $J^{акт}$ ост прежним, а $I^{акт} = I^{акт} \backslash i'$
Это соответ м-це А', кот получ из А, если страт i' игрока 1 опустить, т.е. р' считать извест и равным 0
Т.о. получ игру (n-1)*n предположит в полнее смеш страт, решаем соотв ей СЛАУ с кол неизв 2n+1 и кол огран 2n; СЛАУ предст соб усл Т3 для $J^{акт}$, $I^{акт}$ плюс 1 усл нормировки. Аналогично м-о дел предпол сфомулир в Т4 для $\forall$страт В или сочет неск страт А,В, А и В.

3. Получ СЛАУ реш и если вектора $\overline{p}, \overline{q}$ допустимые, то дел-ся пров-ка с целью определения явл ли допус реш оптим; в проверке исп усл Т2 для неакт страт и усл Т3 для акт. Если вып-ся усл, то рез-т получен. Если нет, то осущ переход к п.2, т.е. дел др. предполож о составе акт стратегий.

<u>Теорема 4</u>

Если для страт i' иг А усл Т2 зап-ся на строгом нер-ве, то вер-ть принятия страт i'=0:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{i'j} q_j^* < V^*, \quad \text{то } p_{i'} = 0, p = (p_1, p_2, p_3, ..., 0, p_{i'+1}) \tag{19}$$

Аналогично для иг В:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij'} p_i^* < V^*, \quad \text{то } q_{j'} = 0 \tag{20}$$

 - Док-во от противного:

Пусть для $i' : \sum_j a_{i'j} q_j^* < V^*$ и $p_{i'}^* < 0$

Умн прав и лев часть нер на $p_{i'}^*$: $p_{i'}^* \sum_{j=1}^{n} a_{i'j} q_j^* < V^* \cdot p_{i'}^*$ (21)

Пок, что это не верно:

1. Запишем условие Т2: $\sum_{j=1}^{n} a_{i'j} q_j^* \le V^*, \ i = \overline{1, m}$

Умн на p_i обе части: $p_i^* \sum_{j=1}^{n} a_{i'j} q_j^* < V^* p_i^*, \ i = \overline{1, m}$ (22)

Просум по i от 1,n обе части:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i^* \sum_{j=1}^{n} a_{i'j} q_j^* \le \sum_{i=1}^{n} V^* p_i^* \tag{23}$$

Преобраз это выраж выделив отд слаг для i';

$$\sum_{\substack{i=1 \\ i \ne i'}}^{m} p_i^* \sum_{j=1}^{n} a_{i'j} q_j^* + p_{i'}^* \sum_{j=1}^{n} a_{i'j} q_j^* \le \sum_{\substack{i=1 \\ i \ne i'}}^{n} V^* p_i^* + p_{i'}^* V^* \tag{24}$$

В этом выраж втор слаг слева < втор слаг справа по (21)
Т.о. надо зап на строгом нерав (23) и (24)

$$\sum_{i=1}^{m} p_i^* \sum_{j=1}^{n} a_{i'j} q_j^* < \sum_{i=1}^{m} V^* p_i^* = V^* \sum_{i=1}^{m} p_i^* = V^* \Rightarrow$$

$$V^* < V^*$$

Противоречит.
Т.о. принятое предполож от противного не верно.

Для иг В: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij'} p_i^* > V^*, q_{j'}^* > 0$

Умнож на $q_{j'}^*$: $\quad q_{j'}^* \sum_{j=1}^{n} a_{ij'} p_i^* > q_{j'}^* V^*$

Пок что это не верно:

1) из Т2: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} p_i^* \ge V^*$

Умнож на q_j^* $\quad q_j^* \sum_{j=1}^{n} a_{i'j} p_i^* \ge V^* \cdot q_j^*,\ \mathrm{j} = 1, \overline{n}$

Просум обе части по j=1,n $\quad \sum_{i=1}^{n} q_j^* \sum_{i=1}^{n} a_{i'j} p_i^* \ge \sum_{j=1}^{n} V^* q_j^*$

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq j'}}^{m} q_j^* \sum_{i=1}^{n} a_{i'j} p_i^* + q_{j'}^* \sum_{i=1}^{n} a_{i'j} p_i^* \ge \sum_{\substack{j=1\\ j\neq j'}}^{m} V^* q_j^* + q_{j'}^* V^*$$

Втор слог слева > второго слаг справа

$$\sum_{j=1}^{n} q_j^* \sum_{i=1}^{n} a_{i'j} p_i^* > \sum_{j=1}^{n} V^* q_j^* = V^* \sum_{j=1}^{n} q_j^* = V^* \Rightarrow$$

$$V^* > V^*$$

Противоречит
Т.о. предположение от противного не верно. ■

Т4 позвол реш сист нерав-в Т2 + 1 усл нормировки перебором. При этом часть нер-в замен на рав-ва, а часть зап-ся на строгом нер-ве. Для этих ост-х соот-ие им вер-ти страт полаг = 0, а строгие нер-ва в системе опускаются. Затем реш-ся получ сокр. СЛАУ. Если $\overline{p^*}, \overline{q^*}$ им только полож компоненты, то получим претендента на решение. В противном случае рассмотрим др набор равенств и строгих нер. Реш-е претенд провер на оптим-ть, применением усл. Т2 и Т3. Как только этим Т-ам притенден удовл, то реш-е получ.

Найдем в общем виде реш СЛАУ полученной если зап все нер Т2 для обоих иг-ов на рав-ах + ∀ усл нормировки.
Предпол., что матр А не выр-на (∃ обр. ей)
1. Запишем соотнош Т2:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i^* = V^*, \quad j = 1,n \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j^* = V^*, \quad i = 1,n \end{cases} \qquad (25)$$

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = 1 \qquad \sum_{i=1}^{n} p_i = 1$$

Неизв-х 2n+1.

2. Или в векторно матр форме e = (1,……,1)

$$\begin{cases} \overline{p}A = (V^*, V^*, \ldots.., V^*) \\ A\overline{q^T} = \begin{pmatrix} V^* \\ \ldots. \\ V^* \end{pmatrix} \\ \overline{p}\overline{e^T} = 1 \quad \text{или} \quad \overline{q}\overline{e^T} = 1 \end{cases}$$

Если $\exists$ A^{-1} $\Rightarrow$ то $\overline{p} = V^* \overline{e} A^{-1}$

Т.к. $\overline{p}\overline{e^T} = 1$, то $V^* \overline{e} A^{-1} \overline{e^T} = 1 \quad \Rightarrow \quad V^* = \dfrac{1}{\overline{e}A^{-1}\overline{e^T}}$

3. Получим

$$V^* = \frac{1}{\overline{e}A^{-1}\overline{e^T}}$$

$$p^* = V^* \overline{e} A^{-1} = \frac{\overline{e}A^{-1}}{\overline{e}A^{-1}\overline{e^T}}$$

$$q^{*T} = V^* A^{-1} \overline{e^T} = \frac{A^{-1}\overline{e^T}}{\overline{e}A^{-1}\overline{e^T}}$$

<u>Замечание:</u>

СЛАУ (25) не сод усл-й $p_i^* \geq 0$ $\forall$ i и $q^* \geq 0$ $\forall$ j, поэтому в общ случ реш м-т содержать отриц компоненты.

§7 Сведение игры к ЗЛП.

<u>Теорема7</u>

Смешанная страт игроков p^*, q^* в игре с плат матр А и ценой игры V^* б-т опрт-ми и в матричной игре с $A^Э$, эл-ты кот есть лин-ая ф-ия эл-ов А:

$A=\{a_{ij}\}$, i=1,m, j=1,n,

$A^Э=\{a^Э_{ij}\}=\{ba_{ij}+c\}$, b,c-const, b>0

При этом цена игры V^* получ из цены игры $V^{*Э}$ путём обратн. преобраз

$V^{*Э}=bV^*+c$ => $V^*=(V^{*Э}-c)/b$

□ По Т2 для опт смеш страт иг А и $\forall$чистой B_j, имеем: $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i^* \geq V^*, \quad j=\overline{1,n}$

(26)

умн обе чисти (26) на b>0 и + $c\sum_{i=1}^{m} p_i^*$:

$$\sum_{i=1}^{m} ba_{ij}p_i^* + c\sum_{i=1}^{m} p_i^* \geq bV^* + c\sum_{i=1}^{m} p_i^*, \quad j=\overline{1,n}$$

Объединим слаг слева и применим справа усл нормировки:

$$\sum_{i=1}^{m} p_i^*(ba_{ij}+c) \geq bV^* + c, \quad j=\overline{1,n}; \quad \sum_{i=1}^{m} p_i^* a'_{ij} \geq bV^* + c, \quad j=\overline{1,n} \quad (27)$$

⇨ $\overline{p^*}$-опт страт 1го иг в игре с А явл опт-ой и в игре с $A^э$ с ценой игры $V^{*э}=V^*b+c$.

Для игрока В:

По Т2 для опт смеш страт иг В и $\forall$чистой A_i, имеем: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j^* \leq V^*, \quad i=\overline{1,m}$

умн обе чисти на b>0 и + $c\sum_{j=1}^{n} q_j^*$:

$$\sum_{j=1}^{n} ba_{ij}q_j^* + c\sum_{j=1}^{n} q_j^* \leq bV^* + c\sum_{j=1}^{n} q_j^*, \quad i=\overline{1,m}$$

Объединим слаг слева и применим справа усл нормировки:

$$\sum_{j=1}^{n} q_j^*(ba_{ij}+c) \leq bV^* + c, \quad i=\overline{1,m}; \quad \sum_{j=1}^{n} q_j^* a'_{ij} \leq bV^* + c, \quad i=\overline{1,m} \quad (27)$$

⇨ $\overline{q^*}$-опт страт 2го иг в игре с А явл опт-ой и в игре с $A^э$ с ценой игры $V^{*э}=V^*b+c$. ■

Процедура сведения матричной игры к ЗЛП:

1 По Т2: $\sum_{i=1}^{m} a_{ij}p_i^* \geq V^*, \quad j=\overline{1,n}$, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j^* \leq V^*, \quad i=\overline{1,m}$ (28)

2 Зап усл нормировки: $\sum_{i=1}^{m} p_i^* = 1, \qquad \sum_{j=1}^{n} q_j^* = 1$ (29)

3 зап ограничение на знак: $p_i^* > 0, \forall i=\overline{1,m}, \qquad q_j^* > 0, \forall j=\overline{1,n}$ (30)

По Т7 за счет преобр А в $A^э$ м-о добиться того, что все эл-ты $A^э$ б-и >0. Тогда цена игры V^* б-т всегда >0.

Будем считать, что $a_{ij}>0$, $\forall$ i и j.

Разделим обе части (28)-(30) на V^*.

Введем обозначения: $\frac{p_i^*}{V^*} = x_i$, $\frac{q_j^*}{V^*} = y_j$, тогда (28)-(30):

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \ge 1,\ j=\overline{1,n} \quad (31), \qquad \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j \le 1,\ i=\overline{1,m} \quad (32)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_i = \frac{1}{V^*} \qquad (33), \qquad \sum_{j=1}^{n} y_j = \frac{1}{V^*} \qquad (34),$$

$$x_i > 0,\ \forall i=\overline{1,m} \qquad (35), \quad y_j > 0,\ \forall j=\overline{1,n} \qquad (36)$$

Игрок А стремится максимиз свой выигрыш V^*, тогда для него $1/V^* \to \min$ =>

$$\sum_{i=1}^{m} x_i \to \min$$

Т.е. им целевуюф-ю зад лин прог-я для иг А.

Зап ограничения формализ-е обл, в кот имеется min

$$\begin{cases} F'_ц = \sum_{i=1}^{m} x_i \to \min & (37) \\ \sum_{i=1}^{m} a_{ij}x_i \ge 1 & (38) \\ x_i > 0, \quad i = 1,m & (39) \end{cases}$$

- ЗЛП для иг А – двойственную ЗЛП

Решив ее и, сделав переход от x_i к p_i* и от V*’ к V* плучим реш иг для А

Оставшееся соотнош (32), (34), (36) дадут ЗЛП для В

Причем второй игрок стрем минимиз свой проигрыш, т.е. $1/V^* \to \max$ => ЗЛП для В. Причем 2 игрок стрем минимиз свой проигрыш => $1/V^* \to \max$ => ЗЛП для В – примая ЗЛП

$$\begin{cases} F'_ц = \sum_{i=1}^{m} y_i \to \max & (40) \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_i \le 1 & (41) \\ y_i > 0, \quad j = 1,n & (42) \end{cases}$$

Решив ЗЛП для 2 игрока и, сделав переход от y_i к q_j* и от $F_ц$’ к V* плучим реш иг для В:

$$V^{*\prime} = \frac{1}{F_ц'}$$

<u>Замечание 1</u>

Задачи (37)-(39) для А, (40)-(42) – двойственные => решив 1 из них м-о получ

реш двойственной из посл симпл-табл, оно наход в z – строке столбцах замещ для доп переменных
Этот прием позв. Сократить объем вычисл

Замечание 2
Если А преобр в А', надо перейти от V'* к V*

Замечание 3
Если в А 0 есть, и нет отриц эл-ов, н-о проверит есть ли столбцы или строка. Состоящая из одних 0. Если нет, то А в А' м-о не преобраз

§8 Доминирование стратегий

При больш числе страт вычислит трудности при реш игр (особ n x m) возраст. Для уменьш разм плат матрицы исп прием свед-я игры с А к под игре с А' у кот страт вер принят кот = 0 опуск-ся. При этом отождествл смеш страт иг-ов p*, q* и p*', q*', т.е. разм и номера страт исх игры сох-ся

О1. Страт иг А A_l доминир его страт $A_к$ (а $A_к$ домин-ся страт A_l) если для $\forall$ чист страт Bj вып усл:

$$a_{lj} \geq a_{kj}, \quad j = 1,n \quad (43)$$

Если (43) вып на рав-ве страт $A_к$, A_l наз дублирующие
Если (43) на > - доминирование наз строгим доминир-ем

О2. Страт иг В Bs доминир его страт Br (а Br домин-ся страт Bs) если для $\forall$ чист страт Ai вып усл:

$$a_{is} \leq a_{ir}, \quad i = 1,m \quad (44)$$

Аналогич дублир-ее и строг доминир-ие

1. при реш матр игры дом-ие страт опускаются и соотв комп в векторах оптим страт пологʼ = 0
2. Опуск-ся все кроме 1 дублир страт и соотв комп в вект опт страт полаг = 0.

Т5.
Если в матр игре страт 1 иг *l* дом страт k (а страт 2-го иг s дом страт r) и страт k оптим-на (страт r оптим), то страт *l* также оптим (s - опт)

Т6
Если в матр игре страт 1-го иг *l* строго дом стр k, то страт k не м.б. оптим (аналогич для 2-го иг)

Биматричные игры
§1 Общие понятия и определения

О1. Пусть 1 иг им i = 1,m страт Ai, а 2 – j = 1,n Bj

В кажд сит-ии (Ai,Bj) 1 иг получ выигрыш aij, а втор – bij. Выигрыши зад матр А и В, в кот по строкам страт 1 по столб 2-го, такая игра наз биматричной, обозн Г(А,В)

<u>О2.</u> Пусть p и q – вектора страт А и В, тогда совокуп (p,q) наз сист-й стратег или ситуац

<u>О3.</u> Сит (p,q) наз приемлемой для иг А(В), если его выигр в ней не < чем при др сит-ях, получ заменой страт p на p' (q на q'):

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}p_iq_j \geq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}p_i'q_j \quad - \text{ для A}$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}p_iq_j \geq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}p_iq_j' \quad - \text{ для B}$$

<u>О4.</u> Ср выигрыши игроков в Г(А, В) опр-ся как мат ожид выигр-ей 1-го и мат ожид в сит (p,q) и матр выигр В

$$V^1 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}p_iq_j \qquad (1)$$

$$V^2 = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}p_iq_j \qquad (2)$$

<u>О5.</u> Сит равновесия в бим иг Г(А, В) – это такая пара смеш страт p*, q*, кот удовл усл: выигр А при i – чистой страт и равновесной страт В – q* не > выиг А в сит равновес (p* и q*) (ан для В)

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}q_j^* \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}p_i^*q_j^* \qquad (3)$$

$$\sum_{i=1}^{m} b_{ij}p_i^* \leq \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}p_i^*q_j^* \qquad (4)$$

<u>Примечание:</u>

Т.е. из (3)(4) видно что p* и q* одновр приемлемы и для А и для В для случая когда p' и q' – чист страт

<u>О6.</u> Реш-ем Г(А, В) наз процесс нахожд сит равновесия (p*, q*). Проц нахожд сит (p*, q*) удовл соотн (3)(4); усл нормировки

$$\sum_{i=1}^{m} p_i^* = 1 \qquad \sum_{j=1}^{n} q_j^* = 1 \qquad (5)$$

и усл-ми не отриц-сти ком-тов вект p* и q*:

$$p_i^* \geq 0 \quad q_j^* \geq 0 \qquad (6)$$

§2 Решение Г(А, В) для n=m=2

Для бим иг с числом страт 2 м-о получ аналит выраж для приемлемых страт и сит равновесия.

Б-м иск реш Г(А,В) с

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

как реш сист нер-в и рав-в вида (3) – (6)

1. Зап ср выигрыши иг-ов по (1) и (2) заменяя р с комп p_1, p_2 на х и 1–х

$\overline{p} = (p_1, p_2)$ *на* $\overline{p} = (x, 1-x)$

$\overline{q} = (q_1, q_2)$ *на* $\overline{q} = (y, 1-y)$

$$V^1 = a_{11}xy + a_{12}x(1-y) + a_{21}y(1-x) + a_{22}(1-x)(1-y) \qquad (7)$$

$$V^2 = b_{11}xy + b_{12}x(1-y) + b_{21}y(1-x) + b_{22}(1-x)(1-y) \qquad (8)$$

2. Зап усл (3), (4) исп-я (7) и (8)

а) i = 1

$$a_{11}y + a_{12}(1-y) \le V^1 \quad \text{из} \quad (7) \qquad (9)$$

i = 2

$$a_{21}y + a_{22}(1-y) \le V^1 \quad \text{из} \quad (7) \qquad (10)$$

б) j = 1

$$b_{11}x + b_{21}(1-x) \le V^2 \quad \text{из} \quad (8) \qquad (11)$$

j = 2

$$b_{12}x + b_{22}(1-x) \le V^2 \quad \text{из} \quad (8) \qquad (12)$$

3. Б-м раб только 1 иг, определяя его приемлемые страт (для иг В аналог) Опр мн-во приемл сит для иг А. Для чего произв элем преобр (9) и (10) получ

1)

$$a_{11}y + a_{12}(1-y) - a_{11}xy - a_{12}x(1-y) -$$
$$-a_{21}y(1-x) - a_{22}(1-x)(1-y) \le 0$$
$$a_{11}y(1-x) + a_{12}(1-y)(1-x) - a_{21}y(1-x) -$$
$$-a_{22}(1-x)(1-y) =$$
$$= a_{11}y(1-x) + a_{12}(1-x) - a_{21}y(1-x) -$$
$$-a_{21}y(1-x) - a_{22}(1-x) + a_{22}y(1-x) =$$
$$= (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})y(1-x) \mp (\mp a_{12} \pm a_{22})(1-x) \le 0 \qquad (13)$$

2)

$$-a_{21}y - a_{22}(1-y) + a_{11}xy + a_{12}x(1-y) +$$
$$+a_{21}y(1-x) + a_{22}(1-x)(1-y) =$$
$$= -a_{22} + a_{22}y + a_{11}xy + a_{12}x - a_{12}xy -$$
$$-a_{21}xy + a_{22} - a_{22}y - a_{22}x + a_{22}xy =$$
$$= (a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22})xy \mp (\mp a_{12} \pm a_{22})x \ge 0 \qquad (14)$$

или вводя обознач c_1, d_1 =>

$$c_1 y(1-x) - d_1(1-x) \le 0 \qquad (15)$$

$$c_1 xy - d_1 x \ge 0 \qquad (16)$$

Соотнош (15), (16) – усл-я связ-щие приемлемые страт 1 иг с его матр

выигрышей.
Переид к сит, описыв все мн приемлемых страт иг А, т.е. найд каким усл д-н удо у если x = 0, x = 1, x = (0, 1)

а) x = 0, тогда (16) верно при $\forall$ y, а (15) преобр к виду

$$c_1 y - d_1 \le 0 \qquad (17)$$

доб усл-е $0 \le y \le 1$ (18)

тогда получим что при x = 0 y д-н удовл (17) и (18)

б) x = 1, тогда (15) верно при $\forall$ y, а (16) преобр к виду

$$c_1 y - d_1 \ge 0 \qquad (19)$$

т.е. реш-ем явл-ся $0 \le y \le 1$ удовл-й (19)

в) 0<x<1, тогда подел (15) на (1-x), а (16) на x, получим

$$\begin{cases} c_1 y - d_1 \le 0 \\ c_1 y - d_1 \ge 0 \end{cases}$$

=> $c_1 y - d_1 = 0$ и $0 \le y \le 1$ (20)

4. Зап сит-ии для 1 иг, при этом им в виду что в-р p опред x, q – y, т.е. вместо в. p м-о брать вер принят 1м 1ой страт, а вместо в. q – вер принят 2м 1ой страт.

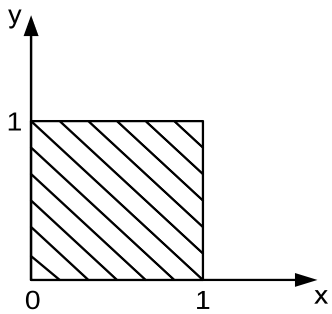
а) (0, y), где y связ условиями: $c_1 y - d_1 \le 0$ и $0 \le y \le 1$

б) (1, y), где y связ условиями: $c_1 y - d_1 \ge 0$ и $0 \le y \le 1$

в) (x, y), 0<x<1, усл для y: $c_1 y - d_1 = 0$ и $0 \le y \le 1$

5. Исслед как преобраз усл привед в опис п.4 при разл знач c_1 и d_1; найдем мн (…) опред-х приемл страт 1го иг – N

1) если $c_1 = d_1 = 0$



получим, что $0 \le x \le 1$ и $0 \le y \le 1$, т.е. мн-во приемл страт A – весь единств квадрат.

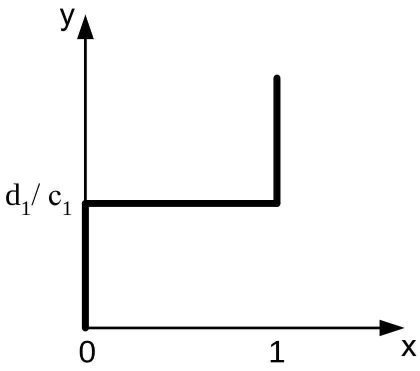
2) если $c_1 = 0$, $d_1 \ne 0$, то вып-ся либо (15) либо (16), общ реш нет.

3) если $c_1 > 0$, то из усл сит

а) (0, y) получ реш x = 0, $y \le d_1/ c_1$

б) из усл (1, y): x = 0, $y \ge d_1/ c_1$

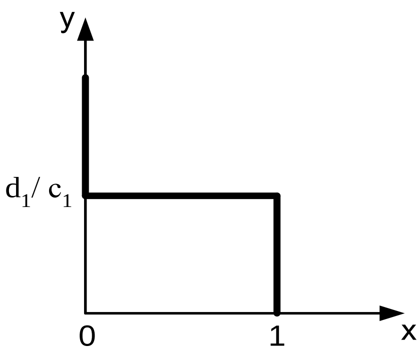
в) для (x, y): 0<x<1, $y = d_1/ c_1$



Изобразим геом-ки мн-о (….) приемл страт 1 иг.

4) если $c_1 < 0$

$$\begin{cases} x = 0 \quad y \ge \dfrac{d_1}{c_1} \\ x = 1 \quad y \le \dfrac{d_1}{c_1} \\ 0 < x < 1 \quad y = \dfrac{d_1}{c_1} \end{cases}$$



<u>Примечание:</u>

$$\frac{d_1}{c_1} = \alpha \qquad \frac{d_2}{c_2} = \beta$$

=> 3') если $c_1 > 0$:

$$\begin{cases} x = 0 \quad y \le \alpha \\ x = 1 \quad y \ge \alpha \\ 0 < x < 1 \quad y = \alpha \end{cases}$$

4') если $c_1 < 0$:

$$\begin{cases} x = 0 \quad y \ge \alpha \\ x = 1 \quad y \le \alpha \\ 0 < x < 1 \quad y = \alpha \end{cases}$$

3' опр мн-во приемл сит для иг B.

Произв элем преобр (11) и (12):

1)

$$b_{11}x + b_{21}(1-x) - b_{11}xy - b_{12}y(1-x) -$$
$$-b_{21}x(1-y) - b_{22}(1-x)(1-y) \le 0$$
$$b_{11}x(1-y) + b_{21}(1-y)(1-x) - b_{12}x(1-y) -$$
$$-b_{22}(1-x)(1-y) \le 0$$
$$b_{11}x(1-y) + b_{21}(1-y) - b_{12}x(1-y) -$$
$$-b_{21}x(1-y) - b_{22}(1-y) + b_{22}x(1-y) \le 0$$
$$(b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})x(1-y) \mp (\mp b_{21} \pm b_{22})(1-y) \le 0$$

2)

$$-b_{12}x - b_{22}(1-x) + b_{11}xy + b_{12}x(1-y) +$$
$$+b_{21}y(1-x) + b_{22}(1-x)(1-y) \ge 0$$
$$-b_{12}x - b_{22} + b_{22}x + b_{11}xy + b_{12}x - b_{12}yx +$$
$$+b_{21}y - b_{21}xy + b_{22} - b_{22}y - b_{22}x + b_{22}yx =$$
$$= (b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22})xy - (-b_{21} + b_{22})y \ge 0$$

или вводя обознач c_2, d_2 =>

$$c_2 x(1-y) - d_2(1-y) \le 0 \qquad (15')$$
$$c_2 xy - d_2 y \ge 0 \qquad (16')$$

Соотнош (15’), (16’) – усл-я связ-щие приемлемые страт 2 иг с его матр выигрышей.

Найдем каким усл д-н удовл x если y = 0, y = 1, 0 < y < 1.

а) y = 0, тогда (16’) верно при $\forall$x, а (15’) преобр к виду

$$c_2 x - d_2 \le 0 \qquad (17')$$

доб усл-е $0 \le x \le 1$ (18’)

тогда получим что при x = 0 y д-н удовл (17) и (18)

б) y = 1, тогда (15’) верно при $\forall$x, а (16’) преобр к виду

$$c_2 x - d_2 \ge 0 \qquad (19')$$

т.е. реш-ем явл-ся $0 \le x \le 1$ удовл-й (19’)

в) 0 < y < 1, тогда подел (15’) на (1-y), а (16’) на y, получим

$$\begin{cases} c_2 x - d_2 \le 0 \\ c_2 x - d_2 \ge 0 \end{cases}$$

=> $c_2 x - d_2 = 0$ и $0 \le x \le 1$ (20’)

4’) Зап сит-ии для 2 иг, при этом им в виду что в-р p опред x, q – y, т.е. вместо в. p м-о брать вер принят 1м 1ой страт, а вместо в. q – вер принят 2м 1ой страт.

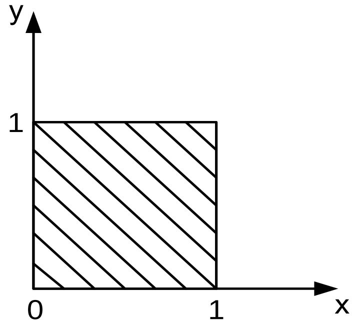
а) (x, 0), где x связ условиями: $c_2 x - d_2 \le 0$ и $0 \le x \le 1$

б) (x, 1), где x связ условиями: $c_2 x - d_2 \ge 0$ и $0 \le x \le 1$

в) (x, y), 0<y<1, усл для x: $c_2 x - d_2 = 0$ и $0 \le x \le 1$

5’) Найдем мн (…) опред-х приемл страт 2го иг – N

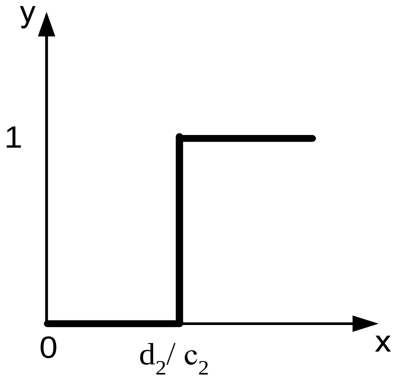
1) если $c_2 = d_2 = 0$ => $0 \le x \le 1$ и $0 \le y \le 1$



2) если $c_2 = 0$, $d_2 \neq 0$, то вып-ся либо (15’) либо (16’), общ реш нет и приемлемых сит для В нет.

3) если $c_2 > 0$, то =>

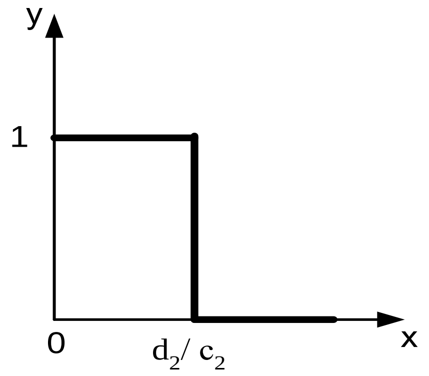
$$\begin{cases} y = 0 & \text{x} \le \dfrac{d_2}{c_2} \\ y = 1 & \text{x} \ge \dfrac{d_2}{c_2} \\ 0 < y < 1 & y = \dfrac{d_2}{c_2} \end{cases}$$



<u>Примечание</u>: для сит наклад огран $0 \le x \le 1$

4) если $c_2 < 0$, то =>

$$\begin{cases} y = 0 & \text{x} \ge \dfrac{d_2}{c_2} \\ y = 1 & \text{x} \le \dfrac{d_2}{c_2} \\ 0 < y < 1 & \text{x} = \dfrac{d_2}{c_2} \end{cases}$$



$$\frac{d_2}{c_2} = \beta$$

Примечание: для сит наклад огран $0 \le x \le 1$

3’) если $c_2 > 0$:

$$\begin{cases} y = 0 & x \le \beta \\ y = 1 & x \ge \beta \\ 0 < y < 1 & x = \beta \end{cases}$$

4’) если $c_2 < 0$:

$$\begin{cases} y = 0 & x \ge \beta \\ y = 1 & x \le \beta \\ 0 < y < 1 & x = \beta \end{cases}$$

Мн-во приемл страт 2 иг обозн N_2 (оно предс привед выше рис)

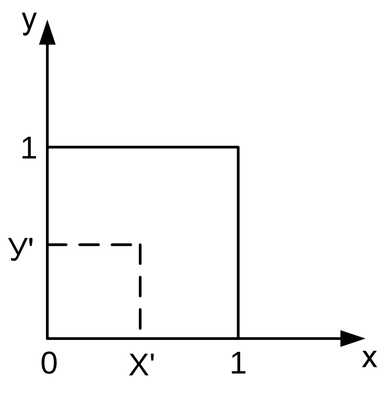
Реш Г(А, В) – пересеч мн-в приемл стратиг А и В: $N_1 \cap N_2$

Пересеч опред x* и y* и соотв вект p* и q*; выигрыши иг по (1) и (2)

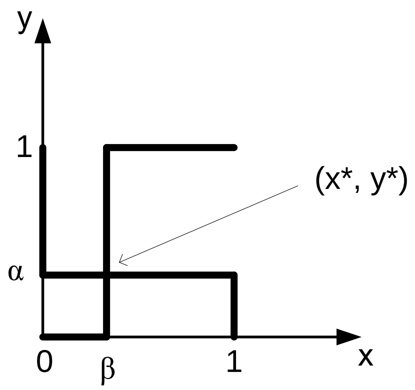
§3 Геометрические интерпретации ситуаций в Г(А, В)

О. Сит в Г(А, В) – это пара чисел (x, y), где x – вер принят иг А 1 страт, y – вер принят иг В 1 стратегии.

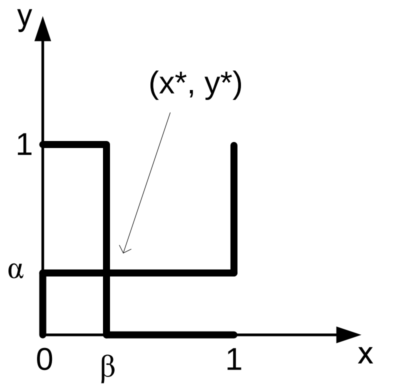
Геом сит в Г(А, В) – предст собой (.) в ед квадр, если реш в смеш страт. Если реш в чистых стат, то это 1 из вершин ед квадрата.



Сит (x’, y’) дает вектора смеш страт p = (x’, 1-x’) и q = (y’, 1-y’)
Возьмем сит дающ реш в чистых страт:
1) x’ = 0, y’ = 0 => p’ = (0, 1) и q’ = (0, 1)
2) x’ = 1, y’ = 0 => p’ = (1, 0) и q’ = (0, 1)
3) x’ = 0, y’ = 1 => p’ = (0, 1) и q’ = (1, 0)
4) x’ = 1, y’ = 1 => p’ = (1, 0) и q’ = (1, 0)
Геом местам (….) – мн-во приемл страт иг явл трехколенный зигзаг ∀ ориентации. Ориентация зигзага зав от знака c_1 и c_2 .
Зигзаг приемл страт м.б. вырожденным (не весь трехкол зигзаг, а только его часть), к. α, β вых за пределы ед квадрата.
Если з-ги приемл страт 1 ориент, то им геом интерприт: $c_1 < 0$, $c_2 > 0$



или $c_1 > 0$, $c_2 < 0$

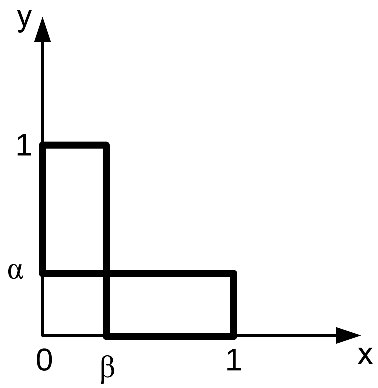


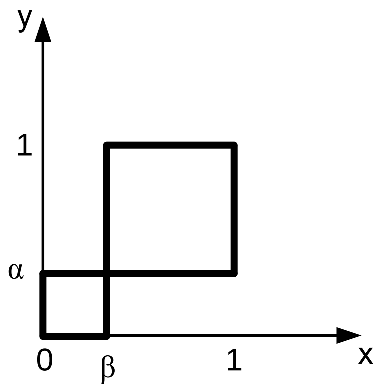
Для этих случ пересеч мн-ва приемл страт дает 1 (.), т.е. им ед-ое реш

$$\overline{p}* = (x*, 1 - x*)$$

$$\overline{q}* = (y*, 1 - y*)$$

Если зигзаги разл ориент ($c_1 < 0$, $c_2 < 0$ или $c_1 > 0$, $c_2 > 0$), то имеем:





В этом случ пересеч мн-в приемл страт сод 3 (.) – 1 в смеш страт, 2–в чистых.

<u>Схема решения биматричной игры:</u>

Даны м-цы

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$$

1. Вычисл

$$c_1 = a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}$$

$$d_1 = (a_{22} - a_{12})$$

$$\alpha = \frac{d_1}{c_1}$$

2.

$$c_2 = b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}$$

$$d_2 = (b_{22} - b_{21})$$

$$\beta = \frac{d_2}{c_2}$$

3. В осях x, y постр трехколен з-ги, кот явл реш-ем сис-м
4. На получ график наложить огранич обл опред x и y, $x \in 0,1$ и $y \in 0,1$, обл Д
5. Найти (.) (отрезок) пересеч зигзагов в обл Д; зап реш игры

<u>Пример</u> ТАМОЖНЯ

Коммерсант м провести через там тов или не провозить его. Там м-т произвести или не произ-ти досмотр багажа ком. Если контраб была досмотр ее обнаруж.

→ Если досм выявил контраб, то там от гос-ва получ премию 10 ед

- ком проиг ожидаемую приб 8 ед + штраф за наруш правил провоза 1 ед + стоим конфиск партии тов 3 ед = 12 ед

→ Если досм не выяв контраб то:

- там проиг 1 ед – затраты на досмотр
- ком выигр 1 ед – оценка «удачи»

→ Если ком провез котраб, то – там проиг 4 ед - ущерб эконом-им инт-ам гос-ком выигр – 8 ед

→ Если нет досм и контраб, то выигр обоих 0

Опр опт страт повед игроков.

Решение

Игра биматр, т.к. выигр 1го ≠ проигр 2го, а выигр опр-ся для кажд иг своей матрицей. Игроков 2, страт у $\forall$ - 2.

Иг 1 – таможня.

A_1 – произв досмотр

A_2 – непроизв досмотр

Иг 2 – контрабандист

B_1 – вести контраб

B_2 – не вести

Найдем м-у выигрышей:

$$A = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{pmatrix} 10 & -1 \\ -4 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$B = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cc} B_1 & B_2 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \end{array} & \begin{pmatrix} -12 & 1 \\ 8 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

1) $c_1 = 10+1+4+0 = 15$

$d_1 = 0+1 = 1$

$\alpha = 1/15$

$c_2 = -12-1-8 = -21$

$d_2 = -8$

$\beta = 8/21$

а) $c_1 > 0$ => реш нет

$$\begin{cases} x = 0 & y \le 1/15 \\ x = 1 & y \ge 1/15 \\ 0 < x < 1 & y = 1/15 \end{cases}$$

б) приемл сит

$(0, y)$, $0 \le y \le 1/15$

$(1, y)$, $1/15 \le y \le 1$

(x, y), $0 < x < 1$, $y = 1/15$

2) а) реш сист

$$\begin{cases} y = 0 & x \ge 8/21 \\ y = 1 & x \le 8/21 \\ 0 < y < 1 & x = 8/21 \end{cases}$$

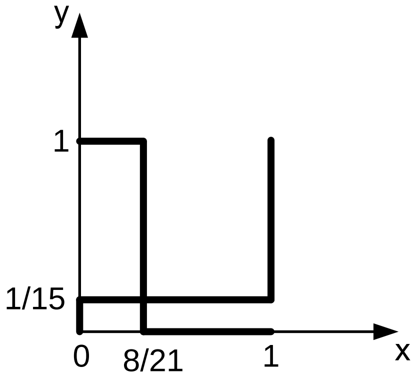
б) приемл сит:

$(x, 0)$, $8/21 \le x \le 1$

$(x, 1)$, $0 \le x \le 8/21$

(x, y), 0 < y < 1, x = 8/21

3)



$$x^* = \frac{8}{21} \qquad y^* = \frac{1}{15} \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{8}{21}, \frac{1}{15}\right)$$

Анализ связи Г(А,В) с матричной игрой:

1. Ордината гориз. звена зигзага для 1-ого игрока вычисл. по ф-ле

$$\alpha = \frac{d_1}{c_1} = \frac{a_{21} - a_{12}}{a_{11} - a_{12} - a_{21} + a_{22}}$$

по такой же ф-ле вычисл. y^* в игре 2×2 - вероятность принятия 2-ым игроком своей 1-ой сратегии

Т.о., мн-во приемл. страт. 1-го игр. в биматричной игре связано с q^* - опт. страт. 2-го игр.

2. Абсцисса вертикального звена зигзага для 2-го игр. выч-ся по ф-ле

$$\beta = \frac{d_2}{c_2} = \frac{b_{22} - b_{21}}{b_{11} - b_{12} - b_{21} + b_{22}}$$

Если заменить b на a, то эта ф-ла б-т выр-ть в матричной игре x^*-вер-ть принятия 1-ым игр. 1-ой страт.

Т.о., сравнивая выр-я для α и β с ф-лами расчета страт в игре 2×2, м-о сделать выводы:

- в биматр. игре в усл. ситуац. равновес. повед. игр 2 совпад. с повед. игрока В в матр. игре с платежной матрицей А, а повед. игр. 1 совпад. с повед. игр. А в матр. игре с платежн. матр. В
- результат Г(А,В): $\begin{matrix} \bar{p}^* = (\beta, 1-\beta) \\ \bar{q}^* = (\alpha, 1-\alpha) \end{matrix} \Rightarrow$ α входит в смеш страт 2-го, а зависит от выигр 1-го, т.к. выр-ся ч/з м-цу А, β входит в смеш страт 1-го, а зависит от выигр 2-го, т.к. выраж-ся ч/з (b_{ij}).

<u>Общий вывод:</u> **<u>ситуац. равновес. в биматр. игре направляет поведение игроков не столько прямо на максимизацию своего выигрыша , сколько на минимизацию выигр. противника</u>**

Глава III. Бескоалицеонные игры(БКИ)

§1. Определение БКИ в нормальной форме.

Предметом рассмотрения БКИ явл-ся игры с числом участн. и страт. >2;

в играх соглашения м-у уч. игры невозм. по правилам игры.

О1: Сис-ма $\Gamma(N, \{X_i\}_{i\in N}, \{H_i\}_{i\in N})$, где N – мн-во игроков; $i=\overline{1,n}$ - номер игрока, n – к-во игроков; X_i – мн-во страт. Игр. i; H_i – вещ-ая ф-ия выигрыша игрока i; H_i определена на мн-ве всех ситуац. X, которое равно декартову произведению мн-в страт. игроков $\{X_i\}_{i\in N}$:

$X=\prod\limits_{i=1}^{n} X_i$, наз-ся **БКИ**

О2: Игроки $i\in N$ одновременно и независимо др. от др. выбир. стратегии x_i из мн-ва страт. X_i; в рез. составл-ся **ситуация** $x\in X$:

$x=(x_1,\dots,x_i,\dots,x_n)$

каждой ситуации х ставится в соотв. выигрыши игроков i – H_i на ситуации х:

$H_i(x), i=\overline{1,n}$

О3: БКИ наз-ся **игрой с постоянной суммой** , если $\exists$ такая константа C, которая равна сумме выигрышей всех игроков для любой ситуации $x\in X$:

$C=\sum\limits_{i=1}^{n} H_i$ для $\forall x\in X$

Если C=0, то **игра с нулевой суммой**

Принципы оптимальности БКИ

Предметом изучения БКИ и тех игр, которые рассматривались ранее есть:

1. определение принципов оптимальности, в соответствии с которыми системы и стратегии следует считать оптимальными;
2. нахождение решения, соответствующего свойствам игры.

Для рассмотренных ранее антогонестических игр с нулевой суммой, принципом оптимальности является принцип максимина. В этом случае ситуация равновесия – устойчивости соответствует седловой точке платежной матрицы, если решение в чистых стратегиях или седловая точка пары двойственных задач ЛП, если решение в смешанных стратегиях. Для матричной игры существует единственное понятие оптимальности и решение игры, основанное на теории двойственности ЛП.

Для класса не антогонестических игр нет единого подхода к выбору принципа оптимальности. В этом случае принцип оптимальности выбирается из некоторого набора возможных принципов. При этом учитываются дополнительные предположения о поведение игроков и структуре игры.

Так, если в матричной игре один из игроков был антогонест. стороной, а игрок *В* оборонялся и в итоге получал то, что проигрывал первый игрок, то в БКИ все игроки активные и каждый имеет свою матрицу выигрышей.

Особенностью упрощенного класса БКИ–биматричной игры, является то, что любой игрок стремиться скорее снизить выигрыш второго, чем максимизировать свой.

Пусть в БКИ $\Gamma(N, \{X_i\}_{i\in N}, \{H_i\}_{i\in N})$ $\forall$ из игроков i стремиться к ситуац. X, в котор. значение его выигрыша $(H_i(x))$ было большим. Но $H_i(x)$ зависит не только от стратегии игрока $i\ (X_i)$, но и от стратегий другого игрока, так как они и составляют ситуацию: $x=(x_1,\dots,x_{i-1},x_i,x_{i+1},\dots,x_n)$, причем в конкретной ситуации другие игроки имеют в общем случае не лучший выигрыш.

Здесь существует несколько подходов к определения того, какое поведение игроков следует считать хорошим и оптимальным.

Равновесие по Нэшу

Пусть x произвольная ситуация в $\Gamma\left(N, \{X_i\}_{i\in N}, \{H_i\}_{i\in N}\right)$, $x = (x_1,\ldots,x_n)$. Пусть x_i – произвольная стратегия игрока i, $x_i \in X_i$.

В ситуации x заменим стратегию игрока i на x_i' , получим ситуацию $(x_1,\ldots,x_i',\ldots,x_n)$.

О. Ситуация x называется приемлемой для игрока i , если для любой его стратегии $x_i \in X_i$ выполняется неравенство: выигрыш i в приемлемой ситуации не меньше, чем при другой ситуации полученной при замене стратегии игрока i – X_i на любую другую – x_i' .

$$H_i(x) \geq H_i(x \| x_i'),\ x_i' \in X_i \setminus x_i \qquad (1)$$

О. Если ситуация является применимой для всех игроков, то она называется ситуацией, равновесной по Нэшу.

$$H_i(x^*) \geq H_i(x^* \| x_i'),\ x_i' \in X_i \setminus x_i,\ i \in N \qquad (2)$$

Из определения ситуации равновесия следует, что не один из игроков не заинтересован в отклонении от стратегии x_i^*, входящую в ситуацию равновесия x^* (по (2) его выигрыш уменьшается при замене x^* на x_i') при условии, что остальные игроки придерживаются своих равновесных стратегий.

О. Стратегия игрока x^*, x_i из X_i называется равновесной, если она входит хотя бы в одну ситуацию равновесия по Нэшу.

Особенности ситуации равновесия по Нэшу

1. Ситуаций равновесных по Нэшу в общем случаем случае может быть несколько, следовательно принцип равновесия по Нэшу явл. множеством.
Для каждой ситуации равновесия выигрыш игроков неодинаков, следовательно, степень предпочтения конкретной ситуации равновесия для каждого игрока различны, отсюда не ясно какая же ситуация по Нэшу будет устраивать всех игроков, таким образом равновесную стратегию x_i^* нельзя трактовать как оптимальную стратегию i-ого игрока. Можно только говорить о равновесии для набора игроков, которые представляются совокупностью стратегий, т.е. ситуац.

2. Отклонение ситуации равновесия по Нэшу двух и более игроков может привести к увеличению выигрыша одного из отклонившихся игроков, при условии, что остальные ведут себя оптимальным образом.

О. Ситуация x^* называется сильно равновесной, если (2) выполняется на строгом неравенстве.

Оптимальность по Парето

Другой вариант устойчивости ситуации, учитывающий выгодные ситуации для всех участников сторон, дает принцип оптимальности по Парето. Рассмотрим БКИ $\langle N, \{X_i\}_{i\in N}, \{H_i\}_{i\in N}\rangle$ и для неё множество значений векторов выигрышей игроков во всех возможных ситуациях $x_i \in X_i = \prod_{i=1}^{n} x_i$.

$$H(x) = \{H_1(x), H_2(x), \dots, H_n(x)\}, x \in X \quad (4)$$

О. Ситуация $\bar{x}$ в БКИ называется оптимальной по Парето, если не существует другой ситуации $x \in X$, для которой имеет место неравенства: выигрыш игрока i в ситуации x не меньше чем его выигрыш в ситуации оптимальной по Парето для всех игроков и всех ситуаций, причем, хотя бы для одного игрока i_0 выигрыш строго больше.

$$H_i(x) \ge H_i(\bar{x});\; x \in X \setminus \bar{x},\; \forall\, i = \overline{1,n} \quad (5)$$

$$H_{i_0}(x) \ge H_{i_0}(\bar{x}). \quad (6)$$

Смешанное расширение БКИ

Исходя из принципов равновесия по Нэшу и принципов оптимальности по Парето, мы получим решение в чистых стратегиях.

Рассм. БКИ $\Gamma\langle N, \{X_i\; i\in N\}, \{H_i\; i\in N\}\rangle$.

Пусть каждый игрок i имеет m_i стратегий, тогда m_i размерность X_i .

Введем следующие обозначения:

1. ξ_i - **произв.смеш-ая страт. иг-ка i**,т.е вероят-ое распред-ие на мн-ве чистых страт. $x_i \in X_i$

2. $\xi_i(x_i)$ **- вер-ть принятия иг-ом i чист. страт** x_i **в смеш. страт** ξ_i

$\xi_i = \{\xi_i(x_i)\}, x_i \in X_i$; усл. норм-ки: $\sum_{x_i \in X_i} \xi_i(x_i) = 1$

3. $\overline{X_i}$ - компон-ми явл $\xi_i \Leftrightarrow \overline{X_i} = \{\xi_i\}$ **- мн-во смеш-ых страт иг-ка i**

4. $\xi(x)$**-вер-ть появления сит x,** $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Пример. Дана БКИ $\Gamma\langle N, \{X_i\; i\in N\}, \{H_i\; i\in N\}\rangle$, кол-во игроков 2, $N = \{1,2\}$, кол-во стратегий у каждого 2, т.е. $m_1 = m_2 = 2$. Применим введенные обозначения.

1. ξ_1 – смешанная стратег. игрока 1:

$X_1 = \{h_1, h_2\}$ – чистые.

$\xi_1 = \{\xi_1(h_1), \xi_1(h_2)\}$;

$\sum_{h_i \in X_1} \xi_1(h_i) = 1$;

$\xi_1 = \{\xi_1(h_1), 1 - \xi_1(h_1)\}$.

2. $\overline{X}_1 = \{\xi_1\}$.

3. $\xi_2 = \{\xi_2(y_1), 1 - \xi_2(y_1)\}$;

$\overline{X}_2 = \{\xi_2\}$.

В ходе игр. любой игрок *i* применяет свою смешанную стратегию ξ_i, т.е. выбирает свои чистые стратегии $x_i \in X_i$ с вероятностями $\xi_i(x_i)$ не зависимо от др., тогда вероятность появления ситуации $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \Rightarrow \xi(x)$ есть произведение вероятностей принятия игроками своих чистых стратегий $x_i \in X_i$:

$$\xi(x) = \prod_{i=1}^{n} \xi_i(x_i) \qquad \textbf{(7)}$$

Формула (7) определяет вероятность появления ситуации *x* из набора возможных $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$.

(7) задает вероятностное распределение на множ-ве сит. ч\з смеш страт иг-ов $\xi_i = \{\xi_i(x_i)\}$.

О. Набор смеш страт иг $i \in N$ опред-их вер-ть появления сит *x*, наз **сит в смеш страт** и обознач: $\xi = (\xi_1, \xi_2, ..., \xi_n)$.

Каждая ситуац. в смеш. стратег. ξ описыв различные ситуации в чистых с некоторыми вероятностями появления, тогда выигрыш любого иг. в конкретной ситуации x зависит от вероятности появлен. данной ситуац. и явл. случ. велич.

В качестве значений функции выигрыша для игрока i в $\Gamma(N, \{X_i\}_{i \in N}, \{H_i\}_{i \in N})$ принимается, как и прежде мат. ожидание выигрыша, причем осреднение производится по всем ситуациям $x \in X$.

Обозначив ср. выигрыш $\overline{H_i}(\xi)$, запишем чему он равен:

$$\overline{H_i}(\xi) = \sum_{x \in X} H_i(x)\xi(x) = \sum_{x \in X} H_i(x)\prod_{i=1}^{n} \xi_i(x) = \sum_{x \in X} H_i(x_1, ..., x_n)\prod_{i=1}^{n} \xi_i(x_i). \qquad (8)$$

О. Игра $\Gamma(N, \{\overline{X_i}\}_{i \in N}, \{\overline{H_i}\}_{i \in N})$, где

N- мн-во смеш страт иг-ка i

$\overline{X_i}$ -мн-во смеш страт иг-ка i

$\overline{H_i}(\xi)$-ф-ия выигрыша, определяется по (8) наз **смешанным расширением БКИ** $\Gamma(N, \{X_i\}_{i \in N}, \{H_i\}_{i \in N})$**.**

О. Сит. $\xi^* = (\overline{\xi_1^*}, \overline{\xi_2^*}, ..., \overline{\xi_n^*})$ наз **сит рав-сия в смеш страт**, если для $\forall$ иг-ка $i \in N$ и $\forall$ его смеш страт $\xi_i \in \overline{X_i}$ его выигрыш в сит ξ^* не меньше, чем выигр в люб. др сит, получ заменой смеш страт $\xi_i на \xi_i'$:

$$\overline{H_i}(\xi^*) = \overline{H_i}(\xi_1^*, ..., \xi_n^*) \ge \overline{H_i}(\xi^* // \xi_i') \forall i \in N; \forall \xi_i' \in \overline{X_i} \qquad (9)$$

О. Соотношение (9) записанное для игрока i определяет приемлемую стратегию для i.

Т1. В каждой БКИ существует хотя бы одна ситуация равновесия в чистых или смешанных стратегиях.

Т2: Для т.ч. сит $\xi*$ в $\Gamma(N, \{\overline{X_i}\}_{i \in N}, \{\overline{H_i}\}_{i \in N})$ была сит. равновес. в смеш. страт Н. и Д., чт. для $\forall$ игрока i и $\forall$ его чистой стратегии x_i его выигрыш в $\xi*$ был не меньше, чем выигрыш, когда в $\xi*$ смеш. страт. игрока i: ξ_i замен-ся на чистую -

x_i

$\overline{H_i}(\xi^*) \geq \overline{H_i}(\xi^* // x_i)$ $\forall x_i \in X_i, \forall i \in N$ (10)

Т3: Если усл. Т2 для смеш. страт. игрока i^0, входящей в сит. равновес и для его чистой страт. вып-ся на строгом нер-стве, то вер-ть принятия этой чист. страт = 0:

$\overline{H_{i^0}}(\xi^*) > \overline{H_{i^0}}(\xi^* // \tilde{x}_{i^0})$, то $\xi_{i^0}(\tilde{x}_{i^0}) = 0$, $\tilde{x}_{i^0} \in X, i^0 \in N$

Чтобы найти $\xi^* = (\;_{1,1,0}\; \ldots,\xi_n{}^*)$ н-о решить сис-му нер-ств (10), добавив к ней ограничения:

1. неотрицательность компанент в-ра смеш. страт.: $\xi_i(x_i) \geq 0, i = \overline{1,n}, x_i \in X$
2. усл. нормировки: $\sum_{x_i \in X_i} \xi_i(x_i) = 1, \forall i \in N$

О: Пусть есть игра $\Gamma(N, \{X_i\}_{i\in N}, \{H_i\}_{i\in N})$, где у $\forall$ игрока i к-во страт. - m_i $\{|X_i| = m_i$ - мощьность мн-ва$\}$ $\Rightarrow$ говорят, что игра им. формат: $m = (m_1, m_2, \ldots, m_n)$

Чтобы определить ξ^*, н-о решить сис-му, состоящ.

а) из сис-мы нер-ств вида (10), их $\sum_{i=1}^{n} m_i$ штук

б) из ограничений неотрицательности, их $\sum_{i=1}^{n} m_i$ шт.

в) из усл. нормировки, n шт.

В наст время нет общ. спос. нахожд. реш игры (т.е. реш. такой смеш. сис-мы нер-ств и рав-в) для случ., когда к-во игроков n и формат игры любой.

Решению и анализу поддаются только упрощ. классы БКИ:

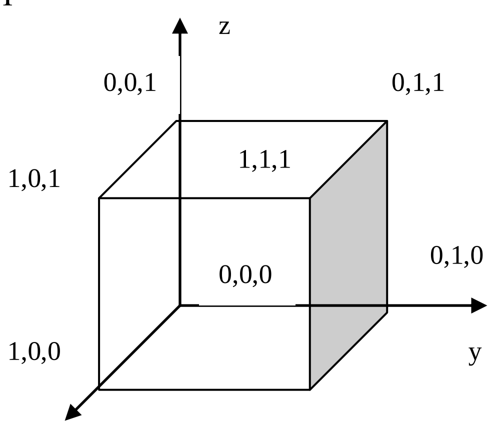
- диадаческие игры n лиц (m=2)
- диадические игры 3 лиц
- диадические игры 2 лиц (биматричные)

Особенность диад. игр – вер-ть выбора игроком своей 1-ой чистой страт. однозначно опред. вер-ть выб. 2-ой (по усл. нормировки)

Геометрическая интерпретация:

В диадич. играх n лиц мн-во сит. в смеш. страт. – единичный n-мерный куб, в вершинах кот. располож. сит. в чистых страт. Сама сит. запис-ся как послед. нулей и единиц длиной n.

В диадич. игре 3 лиц мн-во сит. с смеш. страт. – единичный куб, для 2 лич – квад рат.



Здесь в () стоят вер-сти принят. 1-ым, 2-ым и 3-им игроками своих 1-ых чистых стратегий

$\xi_1 = (\xi_1(h_1), 1-\xi_1(h_1))$

$\xi_2 = (\xi_2(y_1), 1-\xi_2(y_1))$

$\xi_3 = (\xi_3(z_1), 1-\xi_3(z_1))$

§6. Диадическая игра 3 лиц на примере задачи «Охрана окружающей среды». Постановка задачи.

Крупный водоем включен как элемент производства в технологич. процесс. на 3-х предпр. $\forall$ предпр. произв. забор воды для нужд произв-ва и сбрас. отраб. воду в водоем. Объемы заборов и сбросов для $\forall$ предпр. равноценны. Технич. усл-ями предусмотр. очистка произв-ых стоков. Затраты на очистку – 1 ед.

Предпр. в усл. экономии наруш.нормативы и сбрас. неочищ. воду $\Rightarrow$ м-т возникн. след. сит.:

1.если сброс неоч. стоков произведен $\geq$ чем 2 предпр. $\Rightarrow$ занрязнение водоема превыш. возможности самовосстановления, реакция на сит. – взимание экологической службой с $\forall$ предпр. штрафа – 3 ед.

2.если сброс сделало 1 предпр., то загрязн. < пределов $\Rightarrow$ служба его не фиксирует.

Определить оптим страт. повед. $\forall$ предпр. в данной игре, учит., что игра БК.

РЕШЕНИЕ: игровая модель – формализованное описание выигрышей игроков для $\forall$ сит.

Имеем n=3, m=2 – к-во страт. в $\overline{\Gamma}(N, \{X_i\}_{i\in N}, \{H_i\}_{i\in N})$, где $N = \{1,2,3\}$,

$X_1 = \{h_1, h_2\}, X_2 = \{y_1, y_2\}, X_3 = \{z_1, z_2\}$.

$X = \prod_{i=1}^{3} X_i = \{ (h_1, y_1, z_1), (h_1, y_1, z_2), (h_1, y_2, z_1), (h_1, y_2, z_2), (h_2, y_1, z_1), (h_2, y_1, z_2), (h_2, y_2, z_1), (h_2, y_2, z_2)\}$

Пусть 1-ая страт. каждого игрока – сбрасывать грязную воду, 2-ая – сбрас. чистую.

Опред. выигрыши игроков на мн-ве сит.

ситуация	$H_1(x)$	$H_2(x)$	$H_3(x)$
(h_1, y_1, z_1)	-3	-3	-3
(h_1, y_1, z_2)	-3	-3	-4
(h_1, y_2, z_1)	-3	-4	-3
(h_1, y_2, z_2)	0	-1	-1
(h_2, y_1, z_1)	-4	-3	-3
(h_2, y_1, z_2)	-1	0	-1
(h_2, y_2, z_1)	-1	-1	0
(h_2, y_2, z_2)	-1	-1	-1

Таблица выигрышей – игровая модель. Найдем реш. данной игры в смеш. страт.; искомые в-ра смеш. страт.:

$\xi_1 = (\xi_1(h_1), 1-\xi_1(h_1))$

$\xi_2 = (\xi_2(y_1), 1-\xi_2(y_1))$

$\xi_3 = (\xi_3(z_1), 1-\xi_3(z_1))$

Схема реш. игры:

1. запис. усл. (10) $\overline{H_i}(\xi^*) \geq \overline{H_i}(\xi^* // x_i) \quad \forall x_i \in X_i, \forall i \in N$
2. нах. реш. получ. сис-мы для $\forall$ игр.
3. графически наклад. огранич. неотриц. и нормир., т.е. нах. приемл. страт. из реш. сис-мы, строим их в ед. кубе.
4. граф. находим пересеч. мн-в приемл. страт. игроков, кот. и б-т реш. игры.

РЕШЕНИЕ: I) игрок 1

$\overline{H_1}(\xi^*) \geq \overline{H_1}(\xi^* // h_1) \quad \overline{H_1}(\xi^*) \geq \overline{H_1}(\xi^* // h_2)$

$\overline{H_2}(\xi^*) \geq \overline{H_2}(\xi^* // y_1) \quad \overline{H_2}(\xi^*) \geq \overline{H_2}(\xi^* // y_2)$

$\overline{H_3}(\xi^*) \geq \overline{H_3}(\xi^* // z_1) \quad \overline{H_3}(\xi^*) \geq \overline{H_3}(\xi^* // z_2)$

$\xi^* = (\xi_1^*, \xi_2^*, \xi_3^*)$-?

$\xi_1^* = (\xi_1(h_1), 1-\xi_1(h_1))$

$\xi_1^* = (1, 0)$ - б-т при замене 1-ой страт. на чистую, $\xi_1^* = (0, 1)$-при замене второй на чистую

Аналогично для 2-го и 3-его игроков.

II) для 1-го игр. детализируем условия, записанные в п.1, используя

$\overline{H_i}(\xi) = \sum_{x\in X} H_i(x)\xi(x) = \sum_{x\in X} H_i(x_1,\dots,x_n)\prod_{i=1}^{n}\xi_i(x_i)$

1) $\overline{H_1}(\xi^*) \to H_1(h_1,y_1,z_1)\xi_1(h_1)\xi_2(y_1)\xi_3(z_1) + H_1(h_1,y_1,z_2)\xi_1(h_1)\xi_2(y_1)(1-\xi_3(z_1)) +$
$+ H_1(h_1,y_2,z_1)\xi_1(h_1)(1-\xi_2(y_1))\cdot\xi_3(z_1) + H_1(h_1,y_2,z_2)\xi_1(h_1)(1-\xi_2(y_1))\cdot(1-\xi_3(z_1)) +$
$+ H_1(h_2,y_1,z_1)(1-\xi_1(h_1))\cdot\xi_2(y_1)\xi_3(z_1) + H_1(h_2,y_1,z_2)(1-\xi_1(h_1))\cdot\xi_2(y_1)(1-\xi_3(z_1)) +$
$+ H_1(h_2,y_2,z_1)(1-\xi_1(h_1))\cdot(1-\xi_2(y_1))\cdot\xi_3(z_1) +$
$+ H_1(h_2,y_2,z_2)(1-\xi_1(h_1))\cdot(1-\xi_2(y_1))\cdot(1-\xi_3(z_1)) \geq H_1(h_1,y_1,z_1)1\cdot\xi_2(y_1)\xi_3(z_1) +$
$+ H_1(h_1,y_1,z_2)1\cdot\xi_2(y_1)(1-\xi_3(z_1)) + H_1(h_1,y_2,z_1)1\cdot(1-\xi_2(y_1))\cdot\xi_3(z_1) +$
$+ H_1(h_1,y_2,z_2)1\cdot(1-\xi_2(y_1))\cdot(1-\xi_3(z_1))$

2) $\overline{H_1}(\xi^*) \to H_1(h_1,y_1,z_1)\xi_1(h_1)\xi_2(y_1)\xi_3(z_1) + H_1(h_1,y_1,z_2)\xi_1(h_1)\xi_2(y_1)(1-\xi_3(z_1)) +$
$+ H_1(h_1,y_2,z_1)\xi_1(h_1)(1-\xi_2(y_1))\cdot\xi_3(z_1) + H_1(h_1,y_2,z_2)\xi_1(h_1)(1-\xi_2(y_1))\cdot(1-\xi_3(z_1)) +$
$+ H_1(h_2,y_1,z_1)(1-\xi_1(h_1))\cdot\xi_2(y_1)\xi_3(z_1) + H_1(h_2,y_1,z_2)(1-\xi_1(h_1))\cdot\xi_2(y_1)(1-\xi_3(z_1)) +$
$+ H_1(h_2,y_2,z_1)(1-\xi_1(h_1))\cdot(1-\xi_2(y_1))\cdot\xi_3(z_1) +$
$+ H_1(h_2,y_2,z_2)(1-\xi_1(h_1))\cdot(1-\xi_2(y_1))\cdot(1-\xi_3(z_1)) \geq H_1(h_2,y_1,z_1)1\cdot\xi_2(y_1)\xi_3(z_1) +$
$+ H_1(h_2,y_1,z_2)1\cdot\xi_2(y_1)(1-\xi_3(z_1)) + H_1(h_2,y_2,z_1)1\cdot(1-\xi_2(y_1))\cdot\xi_3(z_1) +$
$+ H_1(h_2,y_2,z_2)1\cdot(1-\xi_2(y_1))\cdot(1-\xi_3(z_1)) \Rightarrow$

$(1-\xi_1)\xi_2\xi_3(H_1(h_1,y_1,z_1) - H(h_2,y_1,z_1)) + (1-\xi_1)\xi_2(1-\xi_3)(H_1(h_1,y_1,z_2) - H(h_2,y_1,z_2)) +$
$+ (1-\xi_1)(1-\xi_2)\xi_3(H_1(h_1,y_2,z_1) - H(h_2,y_2,z_1)) +$
$+ (1-\xi_1)(1-\xi_2)(1-\xi_3)(H_1(h_1,y_2,z_2) - H(h_2,y_2,z_2)) \leq 0$

$$(1-\xi_1)\xi_2\xi_3 A+(1-\xi_1)\xi_2(1-\xi_3)B+(1-\xi_1)(1-\xi_2)\xi_3 C+(1-\xi_1)(1-\xi_2)(1-\xi_3)D\le 0 \quad (1)$$

Из второго нер-ства получим:

$$\xi_1\xi_2\xi_3 A+\xi_1\xi_2(1-\xi_3)B+\xi_1(1-\xi_2)\xi_3 C+\xi_1(1-\xi_2)(1-\xi_3)D\ge 0 \quad (2)$$

$$A=\left(H_1(x_1,y_1,z_1)-H(x_2,y_1,z_1)\right)=1$$
$$B=\left(H_1(x_1,y_1,z_2)-H(x_2,y_1,z_2)\right)=-2$$
$$C=\left(H_1(x_1,y_2,z_1)-H(x_2,y_2,z_1)\right)=-2$$
$$D=\left(H_1(x_1,y_2,z_2)-H(x_2,y_2,z_2)\right)=1$$

(1) и (2) составл. сис-му. Одноврем., если к усл. (1),(2) добавить усл. нормир. и положительности компонент в-ов стратегий, то, решив такую сис-му, получ. мн-во приемл. страт. игрока 1

Усл. нормировки для игрока в диодич. игре: $0\le\xi_1(h)\le 1$

Рассмотр. след. случаи для конкретн. выигрышей пр-ра, т.к. в общ. случ. исслед. реш. сис-мы (1),(2) затруднит:

1. $\xi_1(h)=0\Rightarrow$ (2) вып-ся всегда, а (1):

$$\xi_2\xi_3 A+\xi_2(1-\xi_3)B+(1-\xi_2)\xi_3 C+(1-\xi_2)(1-\xi_3)D\le 0$$

$$\xi_2\xi_3\underbrace{(A-B-C+D)}_{A_1}+\xi_2\underbrace{(B-D)}_{B_1}+\xi_3\underbrace{(C-D)}_{C_1}+\underbrace{D}_{D_1}\le 0$$

$A_1=6$, $B_1=-3$, $C_1=-3$, $D_1=1$

$$6\xi_2\xi_3-3\xi_2-3\xi_3+1\le 0$$

2. $\xi_1(h)=1\Rightarrow$ (1) вып-ся всегда, а (2):

$$\xi_2\xi_3 A+\xi_2(1-\xi_3)B+(1-\xi_2)\xi_3 C+(1-\xi_2)(1-\xi_3)D\ge 0\Rightarrow$$
$$6\xi_2\xi_3-3\xi_2-3\xi_3+1\ge 0$$

3. $0<\xi_1(h)<1$:

поделив обе части (1) на $1-\xi_1(h)$, а (2)-на $\xi_1(h)$:

$$6\xi_2\xi_3-3\xi_2-3\xi_3+1=0$$

От рассмотренной сит. перейдем к случ., когда 1-ый игрок приним. в кач. чистой 2-ую страт.,$\Rightarrow\xi_1(h)=0$ или 1-ую страт.$\Rightarrow\xi_1(h)=1$ или смеш. из $0<\xi_1(h)<1$, а 2 др. игрока приним. $\forall$ страт. из диапазона возможных:

$0\le\xi_2(h)\le 1,\ 0\le\xi_3(h)\le 1$

Случай 1: сит. $(\xi_1(h)=0,\ \xi_2(h),\xi_3(h))=\xi$

здесь $\xi_2(h),\xi_3(h)$ связаны усл-ями:

$$\begin{cases}6\xi_2\xi_3-3\xi_2-3\xi_3+1\le 0,\\ 0\le\xi_2(h)\le 1,\\ 0\le\xi_3(h)\le 1;\end{cases}$$

Случай 2: сит. $(\xi_1(h)=1,\ \xi_2(h),\xi_3(h))=\xi$

здесь $\xi_2(h),\xi_3(h)$ связаны усл-ями:

$$\begin{cases}6\xi_2\xi_3-3\xi_2-3\xi_3+1\ge 0,\\ 0\le\xi_2(h)\le 1,\\ 0\le\xi_3(h)\le 1;\end{cases}$$

Случай 3: сит. $(\xi_1(t), \xi_2(t), \xi_3(t)) = \xi$

здесь $\xi_2(t), \xi_3(t)$ связаны усл-ями:

$$\begin{cases} 6\xi_2\xi_3 - 3\xi_2 - 3\xi_3 + 1 = 0, \\ 0 \le \xi_1(t) \le 1, \\ 0 \le \xi_2(t) \le 1, \\ 0 \le \xi_3(t) \le 1; \end{cases}$$

Для 2-го игр. детализируем условия, записанные в п.1:

$$\overline{H_2}(\xi^*) \to H_2(x_1, y_1, z_1)\xi_1(t)\xi_2(t)\xi_3(t) + H_2(x_1, y_1, z_2)\xi_1(t)\xi_2(t)(1-\xi_3(t)) +$$
$$+ H_2(x_1, y_2, z_1)\xi_1(t)(1-\xi_2(t))\cdot\xi_3(t) + H_2(x_1, y_2, z_2)\xi_1(t)(1-\xi_2(t))\cdot(1-\xi_3(t)) +$$
$$+ H_2(x_2, y_1, z_1)(1-\xi_1(t))\cdot\xi_2(t)\xi_3(t) + H_2(x_2, y_1, z_2)(1-\xi_1(t))\cdot\xi_2(t)(1-\xi_3(t)) +$$
$$+ H_2(x_2, y_2, z_1)(1-\xi_1(t))\cdot(1-\xi_2(t))\cdot\xi_3(t) +$$
$$+ H_2(x_2, y_2, z_2)(1-\xi_1(t))\cdot(1-\xi_2(t))\cdot(1-\xi_3(t)) \ge H_2(x_1, y_1, z_1)\xi_1(t)1\cdot\xi_3(t) +$$
$$+ H_2(x_1, y_1, z_2)\xi_1(t)1\cdot(1-\xi_3(t)) + H_2(x_2, y_1, z_1)(1-\xi_1(t))\cdot 1\cdot\xi_3(t) +$$
$$+ H_2(x_2, y_1, z_2)(1-\xi_1(t))\cdot 1\cdot(1-\xi_3(t)) \Rightarrow$$
$$\xi_1\xi_3(1-\xi_2)[H_2(x_1, y_1, z_1) - H_2(x_1, y_2, z_1)] + \xi_1(1-\xi_2)(1-\xi_3)[H_2(x_1, y_1, z_2) - H_2(x_1, y_2, z_2)] +$$
$$+ (1-\xi_1)(1-\xi_2)\xi_3[H_2(x_2, y_1, z_1) - H_2(x_2, y_2, z_1)] +$$
$$+ (1-\xi_1)(1-\xi_2)(1-\xi_3)[H_2(x_2, y_1, z_2) - H_2(x_2, y_2, z_2)] \le 0 \Rightarrow$$
$$A\xi_1\xi_3(1-\xi_2) + B\xi_1(1-\xi_2)(1-\xi_3) + C(1-\xi_1)(1-\xi_2)\xi_3 + D(1-\xi_1)(1-\xi_2)(1-\xi_3) \le 0 \quad (*)$$

Из второго нер-ства получим:

$$\xi_1\xi_2\xi_3 A + \xi_1\xi_2(1-\xi_3)B + \xi_2(1-\xi_1)\xi_3 C + \xi_2(1-\xi_1)(1-\xi_3)D \ge 0 \quad (*')$$

A= $[H_2(x_1, y_1, z_1) - H_2(x_1, y_2, z_1)]$=1

B= $[H_2(x_1, y_1, z_2) - H_2(x_1, y_2, z_2)]$=-2

C= $[H_2(x_2, y_1, z_1) - H_2(x_2, y_2, z_1)]$=-2

D= $[H_2(x_2, y_1, z_2) - H_2(x_2, y_2, z_2)]$=1

Для 2-го игрока:

Случай 1: сит. $(\xi_1(t), \xi_2(t) = 0, \xi_3(t)) = \xi$

здесь $\xi_1(t), \xi_3(t)$ связаны усл-ями:

$$\begin{cases} 6\xi_1\xi_3 - 3\xi_1 - 3\xi_3 + 1 \le 0, \\ 0 \le \xi_1(t) \le 1, \\ 0 \le \xi_3(t) \le 1; \end{cases}$$

Случай 2: сит. $(\xi_1(t), \xi_2(t) = 1, \xi_3(t)) = \xi$

здесь $\xi_1(t), \xi_3(t)$ связаны усл-ями:

$$\begin{cases} 6\xi_1\xi_3 - 3\xi_1 - 3\xi_3 + 1 \ge 0, \\ 0 \le \xi_1(t) \le 1, \\ 0 \le \xi_3(t) \le 1; \end{cases}$$

Случай 3: сит. $(\xi_1(x), \xi_2(y), \xi_3(z)) = \xi$

здесь $\xi_2(y), \xi_3(z)$ связаны усл-ями:

$$\begin{cases} 6\xi_2\xi_3 - 3\xi_2 - 3\xi_3 + 1 \le 0, \\ 0 \le \xi_1(x) \le 1, \\ 0 \le \xi_2(y) \le 1, \\ 0 \le \xi_3(z) \le 1; \end{cases}$$

Для 3-го игр. детализируем условия, записанные в п.1:

$$\overline{H_3}(\xi^*) \to H_3(x_1,y_1,z_1)\xi_1(x)\xi_2(y)\xi_3(z) + H_3(x_1,y_1,z_2)\xi_1(x)\xi_2(y)(1-\xi_3(z)) +$$
$$+ H_3(x_1,y_2,z_1)\xi_1(x)(1-\xi_2(y))\cdot\xi_3(z) + H_3(x_1,y_2,z_2)\xi_1(x)(1-\xi_2(y))\cdot(1-\xi_3(z)) +$$
$$+ H_3(x_2,y_1,z_1)(1-\xi_1(x))\cdot\xi_2(y)\xi_3(z) + H_3(x_2,y_1,z_2)(1-\xi_1(x))\cdot\xi_2(y)(1-\xi_3(z)) +$$
$$+ H_3(x_2,y_2,z_1)(1-\xi_1(x))\cdot(1-\xi_2(y))\cdot\xi_3(z) +$$
$$+ H_3(x_2,y_2,z_2)(1-\xi_1(x))\cdot(1-\xi_2(y))\cdot(1-\xi_3(z)) \ge H_3(x_1,y_1,z_1)\xi_1(y)\xi_2(z)1 +$$
$$+ H_3(x_1,y_2,z_1)\xi_1(x)(1-\xi_2(z))\cdot 1 + H_2(x_2,y_1,z_1)(1-\xi_1(x))\cdot\xi_2(z)1 +$$
$$+ H_3(x_2,y_2,z_1)(1-\xi_1(x))\cdot(1-\xi_3(z))\cdot 1 \Rightarrow$$
$$\xi_1\xi_2(1-\xi_3)[H_3(x_1,y_1,z_1) - H_3(x_1,y_1,z_2)] + \xi_1(1-\xi_2)(1-\xi_3)[H_3(x_1,y_2,z_1) - H_3(x_1,y_2,z_2)] +$$
$$+ (1-\xi_1)(1-\xi_3)\xi_2[H_3(x_2,y_1,z_1) - H_3(x_2,y_1,z_2)] +$$
$$+ (1-\xi_1)(1-\xi_2)(1-\xi_3)[H_3(x_2,y_2,z_1) - H_2(x_2,y_2,z_2)] \le 0 \Rightarrow$$
$$A\xi_1\xi_3(1-\xi_2) + B\xi_1(1-\xi_2)(1-\xi_3) + C(1-\xi_1)(1-\xi_2)\xi_3 + D(1-\xi_1)(1-\xi_2)(1-\xi_3) \le 0 \quad ('')$$

Из второго нер-ства получим:

$$\xi_1\xi_2\xi_3A + \xi_1\xi_3(1-\xi_2)B + \xi_2(1-\xi_1)\xi_3C + \xi_3(1-\xi_2)(1-\xi_1)D \ge 0 \quad ('')$$

A= $[H_2(x_1,y_1,z_1) - H_2(x_1,y_2,z_1)]$=1

B= $[H_2(x_1,y_1,z_2) - H_2(x_1,y_2,z_2)]$=-2

C= $[H_2(x_2,y_1,z_1) - H_2(x_2,y_2,z_1)]$=-2

D= $[H_2(x_2,y_1,z_2) - H_2(x_2,y_2,z_2)]$=1

Для 3-го игрока:

Случай 1: сит. $(\xi_1(x), \xi_2(y), \xi_3(z) = 0) = \xi$

здесь $\xi_1(x), \xi_2(y)$ связаны усл-ями:

$$\begin{cases} 6\xi_1\xi_2 - 3\xi_1 - 3\xi_2 + 1 \le 0, \\ 0 \le \xi_1(x) \le 1, \\ 0 \le \xi_2(y) \le 1; \end{cases}$$

Случай 2: сит. $(\xi_1(x), \xi_2(y), \xi_3(z) = 1) = \xi$

здесь $\xi_1(x), \xi_2(y)$ связаны усл-ями:

$$\begin{cases} 6\xi_1\xi_2 - 3\xi_1 - 3\xi_2 + 1 \ge 0, \\ 0 \le \xi_1(x) \le 1, \\ 0 \le \xi_2(y) \le 1; \end{cases}$$

Случай 1: сит. $\left(\xi_1(\cdot),\xi_2(\cdot),\xi_3(\cdot)\right)=\xi$

здесь $\xi_1(\cdot),\xi_2(\cdot),\xi_3(\cdot)$ связаны усл-ями:

$$\begin{cases} 6\xi_1\xi_2-3\xi_1-3\xi_2+1=0, \\ 0\le\xi_1(\cdot)\le 1, \\ 0\le\xi_2(\cdot)\le 1; \\ 0\le\xi_3(\cdot)\le 1 \end{cases}$$

Перейдем к графической иллюстрации геометрического места точек, соотв. приемл. страт. игрока 1. Для этого заменим $\xi_2(\cdot)$ на y и $\xi_3(\cdot)$ на z

Полученные уравнения явл-ся границами мн-ва (…); геометрич. фигура, соотв. данным ур-ям, – гипербола на един. квадрате в плоскости yOz. Найдем (…) пересеч. гипербол с осями Oz и Oy:

{ось x соотв-ет h}.

1. $x=0$, плоск. yOz:

   $6yz-3y-3z+1\le 0$

   а) $y=0\Rightarrow z\ge 1/3$
   $z=0\Rightarrow y\ge 1/3$

   б) $y=1\Rightarrow z\le 2/3$
   $z=1\Rightarrow y\le 2/3$

2. $x=1$, плоск. y1z:

   $6yz-3y-3z+1\ge 0$

   а) $y=0\Rightarrow z\le 1/3$
   $z=0\Rightarrow y\le 1/3$

   б) $y=1\Rightarrow z\ge 2/3$
   $z=1\Rightarrow y\ge 2/3$

3. $0<x<1$, внутри куба

   $6yz-3y-3z+1=0$

Для 2-го игрока: $6xz-3z-3x+1<>0$

Для 3-го игрока: $6xy-3y-3x+1<>0$

Изобразим графически:

$A=\bigcup\limits_{i=1}^{5}A_i$, $B=\bigcup\limits_{i=1}^{5}B_i$, $C=\bigcup\limits_{i=1}^{5}C_i$

Решением задачи б-т: $A\bigcap B\bigcap C$

Запишем раз-т:

1. запишем сит. равновес. в чистых страт., им. соотв. вершины куба ситуаций: (0,0,0) - $\notin A\bigcap B\bigcap C$, (1,0,0) - $\in A_1\cap B_5\cap C_5$, (1,1,0) - $\notin A\bigcap B\bigcap C$,

(0,1,0) - $\in A_5 \cap B_1 \cap C_5$, (0,0,1) - $\in A_5 \cap B_5 \cap C_1$, (1,0,1) - $\notin A \cap B \cap C$,
(0,1,1) - $\notin A \cap B \cap C$, (1,1,1) - $\in A_2 \cap B_2 \cap C_2$

Дадаим интерпрет. $\forall$ сит. равновес. в чистых. страт:

а) (1,1,1) соотв.: $\forall$ предпр. сбрасывает неочищ. воду, потери – 3 ед. Переход на чистую воду одного из предпр. только ухудшит его полож. $\Rightarrow$ сит. устойчива;

б) (1,0,0), (0,1,0),(0,0,1) – одно из предпр. сбрас. грязн. воду. и наживается на сит. Его издержки на очистку=0, а ост. платят по 1. Сит. уст., т.к. при перех. еще одного предпр. на грязн воду появ. у всех предпр. штрафы.

Остальные сит., в том числе (0,0,0), не уст., т.к. $\forall$ игроку выгодно от них отклониться.

2. на ребрах куба (…) равновес. нет, т.к. там есть пересеч только для 2-х игроков.
3. Рассм. грани куба. Те грани, на кот. нах-ся A_i, B_i, C_i, i=1,2, точек пересеч. не имеют.

   Грань yOz им.: $A_5 \cap B_3 \cap C_3$, yOx им.: $A_3 \cap B_3 \cap C_5$, xOz им.: $A_3 \cap B_5 \cap C_3$

   Запишем ситуации:

   Грань yOz: $\left(0,\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$, yOx: $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right)$, xOz: $\left(\frac{1}{3},0,\frac{1}{3}\right)$

   Определим выигрыши игроков по указ. сит.:

   1. $\left(0,\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \xi_1 = (\xi_1(x), 1-\xi_1(x)) = (0,1), \xi_2 = (\xi_2(y), 1-\xi_2(y)) = \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

   $\xi_3 = (\xi_3(z), 1-\xi_3(z)) = \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

   $\overline{H_1}(\xi^*) = -\frac{4}{3}$, $\overline{H_2}(\xi^*) = -1$, $\overline{H_3}(\xi^*) = -1$

   2. $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3},0\right) \Rightarrow \xi_1 = \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right), \xi_2 = \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right), \xi_3 = (0,1)$

   $\overline{H_1}(\xi^*) = -1$, $\overline{H_2}(\xi^*) = -1$, $\overline{H_3}(\xi^*) = -4/3$

   3. $\left(\frac{1}{3},0,\frac{1}{3}\right) \Rightarrow \xi_1 = \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right), \xi_2 = (0,1), \xi_3 = \left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$

   $\overline{H_1}(\xi^*) = -1$, $\overline{H_2}(\xi^*) = -4/3$, $\overline{H_3}(\xi^*) = -1$

4. Сит. равнов. внутри куба ситуаций:
сит.1: $A_3 \cap B_3 \cap C_3$, **сит.2:** $A_4 \cap B_4 \cap C_4$

(…) принадл. цилиндрам $\Rightarrow$ нер-ства запис. на строгом рав-ве:

$$\begin{cases} 6yz - 3y - 3z + 1 = 0 \\ 6xz - 3z - 3x + 1 = 0 \end{cases}$$
$$6xy - 3y - 3x + 1 = 0$$

Сис-ма симметр. отн. неизв-ых, т.е. x=y=z$\Rightarrow$ взяв. одно из ур. (напр.1) и

положив y=x:

$$6y^2-6y+1=0\Rightarrow y=\frac{1}{3\pm\sqrt{3}}$$

Сит.1: $x=\frac{1}{3+\sqrt{3}},\ y=\frac{1}{3+\sqrt{3}},\ z=\frac{1}{3+\sqrt{3}}$

$$H_1=H_2=H_3=-1{,}133$$

Сит.2: $x=\frac{1}{3-\sqrt{3}},\ y=\frac{1}{3-\sqrt{3}},\ z=\frac{1}{3-\sqrt{3}}$

$$H_1=H_2=H_3=-2{,}867$$

Вывод: сит. 1 и 2 в смеш. страт. уст., т.к. вер-ти принятия 1-ых страт. одинак. и справедл., т.к. выигр. игроков одинак., но 2-ая сит. невыг, т.к. близка к сит (1,1,1)

Тема 4.
§1. Природа и структура кооперативных игр n лиц.

Обозначим: N – множество игроков
n – количество игроков
I – номер игрока
S – некоторое подмножество N – коалиция

Пусть количество игроков в коалиции r, тогда количество коалиций $S=C_n^r$, а число всех возможных коалиций $S=\sum_{r=1}^{n}C_n^r=2^{n-1}$ растет с увеличением n.

Коалиция S действует как один игрок. Выигрышем коалиции является сумма выигрышей игроков, составляющих коалицию. Остальные игроки N\S могут создать коалицию K=N\S, а могут не объединяться в коалиции.
Ситуация, когда остальные игроки объединяются, хуже для 1-го игрока – коалиции S, т.к. это означает появление игрока 2 – коалиции K с противоположными интересами. Тогда игра трансформируется из бескоалиционной игры n игроков последовательно в коалиционную, а затем в антагонистическую, где игрок 1 – коалиция S, а игрок 2 – коалиция K, т.е. снова в БКИ, причем множество ситуаций в последней формально совпадает с множеством ситуаций в исходной БКИ; в результате S может получить гарантированный выигрыш $\mathcal{V}$(S) равен значению возникшей антагонистической игры (гарантированный, т.к. рассматривается худший для S случай, когда N\S объединились в K).
Пример 1. Имеется n мастерских независимо выпускающих один вид продукции. Производительность каждой - a_i, цена реализованной единицы

продукции – c. Пусть часть мастерских объединилась в корпорацию S без изменения технологий и условий сбыта. Тогда прибыль корпорации или выигрыш коалиции при таких условиях равняется сумме прибылей составляющих корпорацию мастерских $\mathcal{V}(S)=\sum_{i\in S} ca_i$.

Пример 2. Пусть в примере 1 изменяется технология производства за счет более интенсивного использования нового оборудования. При этом производительность мастерской i, работающей в коалиции с j, увеличится на b_{ij}, тогда прибыль каждой мастерской $i \in S$

$$\mathcal{V}(S)=\sum_{i\in S}\left[ca_i + \sum_{\substack{j\in S\\ i\neq j}} b_{ij}c\right].$$

О. Функция $\mathcal{V}$, заданная на семействе всех подмножеств игроков из N и ставящая в соответствие каждой коалиции S максимальный гарантированный выигрыш $\mathcal{V}(S)$ наз-ся **характеристической функцией** кооперативной игры.
О. Кооперативной игрой n лиц наз-ся система $(N,\mathcal{V})$ множества игроков N и характеристической функцией $\mathcal{V}$, область определения которой состоит из $(2^n - 1)$ возможных подмножеств.

Свойства характеристической функции $(N,\mathcal{V})$ - $\mathcal{V}(S)$.

1. Супераддитивность – общий выигрыш коалиции $S \cup K$, где S и K∈N не меньше суммы выигрышей всех участников коалиции

$$\mathcal{V}(S \cup K) \geq \mathcal{V}(S)+ \mathcal{V}(K),\ S \subset N, K \subset N, K \not\cap S \quad (1)$$

Интерпретация: целесообразность создания коалиций S и K.
Здесь мы рассматриваем 2 непересекающиеся коалиции S_l, воспользовавшись индукцией

$$\sum_{l=1}^{m} \mathcal{V}(S_l) \leq \mathcal{V}(\bigcup_{l=1}^{m} S_l),\quad S_l \subset N,\quad S_l \underset{l\neq k}{\not\cap} S_k = \emptyset \qquad (2)$$

Запишем (2) для каждого игрока i из N как частный случай, когда $S_l = i$, т.е. коалиция S_l состоит из одного игрока.

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{V}(i) \leq \mathcal{V}(N) \qquad (3)$$

2. Дополнительность

Сумма выигрышей коалиции S и остальных игроков равна значению характеристической функции на всех игроках

$$\mathcal{V}(S) + \mathcal{V}(N \setminus S) = \mathcal{V}(N),\quad S \subset N \qquad (4)$$

(для БКИ с постоянной суммой, интерпретация: это свойство формализует принцип соблюдения постоянства суммы соответствующей БКИ)
О. Игра с множеством игроков N и хар-кой ф-ей $\mathcal{V}$ наз-ся **существенной,** если свойство супераддитивности выполняется на строгом неравенстве.

$$\mathcal{V}(S \cup K) > \mathcal{V}(S) + \mathcal{V}(K),\ S \subset N, K \subset N, K \not\cap S \quad (5)$$

$$\sum_{l=1}^{m} \mathcal{V}(S_l) < \mathcal{V}(\bigcup_{l=1}^{m} S_l) \quad (6)$$

$$\sum_{i=1}^{n} \mathcal{V}(i) < \mathcal{V}(N) \qquad (7)$$

В противном случае, когда св-во суперад-ти выполняется на равенстве, игра **несущественна.**

3. Персональность $\mathcal{V}(\emptyset) = 0$

Коалиция, не содержащая ни одного игрока, ничего не выигрывает.

§2. Дележ в условиях $\mathcal{V}(S)$

Выигрыш полученный коалицией игроков в дальнейшем должен быть поделен между игроками.

Обозначим x_i - выигрыш i-го игрока, когда он в коалиции, $i \in S$,

$\mathcal{V}(i)$ - когда он не в коалиции, $i \notin S$

Очевидные правила при дележе:

1. условие индивидуальной рациональности

$$x_i \geq \mathcal{V}(i), \; i \in N \quad (8)$$

2. условие коллективной рациональности:

сумма выигрышей всех игроков должна быть равна хар-кой ф-ции на мн-ве всех игроков

$$\sum_{i \in N} x_i = \mathcal{V}(N) \quad (9)$$

Интерпретация: нельзя поделить больше чем есть в наличии и нет смысла создавать коалиции если при дележе ее участники получат меньше чем есть в наличии.

О. Вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется **дележом** в условиях хар-кой ф-ции $\mathcal{V}$, если он удовлетворяет условиям индивидуальной и коллективной рациональности.

О. (классическая кооперативная игра)

Система состоящая из множества игроков – N, хар-кой ф-и определенной на всех подмножествах $S \subset N$ - $\mathcal{V}(S)$, множества дележей в условиях хар-кой ф-и наз-ся **классической кооперативной игрой.**

Из определения дележа на осн. (8) и (9) вытекает

Теорема. Для того, чтобы вектор $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ был дележом в классической кооперативной игре, необходимо и достаточно выполнение равенства: выигрыш игрока i, когда он коалиции, равен выигрышу, когда он не в коалиции, + α >0

$$x_i = \mathcal{V}(i) + \alpha_i, \quad \alpha_i \geq 0, \quad i \in N \quad (10)$$

Причем численное значение суммы всех «добавок» от кооперирования - α_i равна хар-кой ф-ии на всех игроках – сумма выигрышей игроков, когда они в коалиции

$$\sum_{i\in N}\alpha_i = \mathcal{V}(N) - \sum_{i\in N}\mathcal{V}(i) \qquad (11)$$

Тогда для 2х классов копер. игр (существенных и несущественных) будем иметь:
а) для несущ. игры дележ имеет вид: $x = (\mathcal{V}(1), \mathcal{V}(2), \ldots, \mathcal{V}(n))$ (12)
б) для существ-ой: $x = [\mathcal{V}(1) + \alpha_1, \mathcal{V}(2) + \alpha_2, \ldots, \mathcal{V}(n) + \alpha_n]$ (13)

$\sum_{i\in N}\alpha_i$ связ. соотнош. (10), (11) => дележей ∞ мн-во.
В БКИ имеем:
1) исход игры явл-ся результатом действия игроков
2) игроки в соответствии с ситуацией, определяющей исход игры, получат свои выигрыши, т.е. действия →ситуация→выигрыш
В кооперативных играх имеем:
1) искомым является результат соглашения игроков о совместных действиях
2) игроки в соответствии с дележом перераспределяют выигрыш коалиции между собой, т.е. соглашение →дележ→выигрыш, т.е. ситуация в кооперативных играх заменяется дележом. Т.о. в (N, $\mathcal{V}$) сравнивается по предпочтит. не сит., а дележи и сравн это носит более сложный характер исходя из разл представлений об оптимальности для различных классов игр.

§3. Отношение стратегической эквивалентности

Принципы оптимальности для различных классов (N, $\mathcal{V}$) различны.
В качестве классов (N, $\mathcal{V}$), позволяющих систематизировать исследования, исп-ся классы стратегически эквивал игр.
О. Кооперативная игра (N, $\mathcal{V}$) наз-ся **эквивалентной** игре (N, $\mathcal{V}$\`) если есть k>0 и c_i, $i \in N$ такие, что для $\forall$ коалиции $S \subset N$ имеет место равенство:
хар-кая ф-я на коалиции S игры стратегич. эквивал. (N, $\mathcal{V}$) = k * хар. ф. на коалиции S исходной игры + $\sum c_i$ для игроков входящих в коалицию S

$$\mathcal{V}'(S) = k\mathcal{V}(S) + \sum_{i\in S}c_i \qquad (15)$$

Содержательная интерпретация стратегической эквивалентности:
Стратегич экв игры им. страт. ф-ии, различ. только масш k и нач капит игроков c_i, $i \in S$.

Свойства отношения стратегической эквивалентности

<u>1. рефлективность</u>
(N, $\mathcal{V}$)~ (N, $\mathcal{V}$\` ) <=> $\mathcal{V}$~ $\mathcal{V}$\`
Игра (N, $\mathcal{V}$)~ самой себе; очевидно если в (15) k=1, c_i =0
<u>2. симметрия отношения</u>, т.е. $\mathcal{V}$~ $\mathcal{V}$\` , то $\mathcal{V}$ \`~ $\mathcal{V}$

$$\mathcal{V}(S) = \frac{\mathcal{V}'(S) - \sum_{i\in S}c_i}{k}$$

Обозначим, $\frac{1}{k} = k'$, $-\frac{c_i}{k} = c_i'$, т.е. получим (15), что и требовалось показать.

3. <u>транзитивность</u>

т.е. $\mathcal{V}$~ $\mathcal{V}$` и $\mathcal{V}$ `~ $\mathcal{V}$``, то $\mathcal{V}$~ $\mathcal{V}$``

Проверяется последовательным применением (15)

т.е. $\mathcal{V}'(S) = k\mathcal{V}(S) + \sum_{i \in S} c_i$ и $\mathcal{V}''(S) = k\mathcal{V}'(S) + \sum_{i \in S} c_i \Rightarrow$ подставим ур 1 в 2

$\Rightarrow \mathcal{V}''(S) = k^2\mathcal{V}(S) + k\sum_{i \in S} c_i + \sum_{i \in S} c_i = k'\mathcal{V}(S) + \sum_{i \in S} c_i'$,

$k' = k^2$, $c_i' = (1+k)c_i \Rightarrow$ $\mathcal{V}$~ $\mathcal{V}$``(S), ч.т.д.

Следствие: В силу того, что отношения эквив. рефлективн, сим. и транз., множество всех хар. ф-й коопер. игр единственным образом распад. на попарнонепересек. классы, которые наз-ся кл. стратег. экв-ти.

Отношение стратегической эквивалентности переносится и на дележи.

Пусть $\mathcal{V}$~ $\mathcal{V}$` , $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - дележ в условиях $\mathcal{V}$, тогда $x' = (x_1', x_2', \ldots, x_n')$, где $x_i'$ опред. в соответствии с (15) как $x_i' = kx_i + \sum_{i \in S} c_i, \quad i \in N$, явл-ся дележом в условиях $\mathcal{V}$`. Говорят, что дележ x' соответствует дележу x при эквив. $\mathcal{V}$ и $\mathcal{V}$`.

О. Кооперативная игра наз **нулевой** если хар. ф-и =0.

Интерпретация: Игроки не имеют никакой заинтересованности, которая может быть измерена материально.

Всякая несущественная кооперативная игра эквивал. нулевой. Покажем это:

Для несущ. (N, $\mathcal{V}$) – св-во супераддитивности выполняется на рав-ве:

$\mathcal{V}(N) = \sum_{i \in N} \mathcal{V}(i)$ или для коалиции S: $\mathcal{V}(S) = \sum_{i \in N} \mathcal{V}(i)$

Запишем страт. эквивал. $\mathcal{V}'(S)$: $\mathcal{V}'(S) = k\mathcal{V}(S) + \sum_{i \in S} c_i$

т.к. игра несущественна $\mathcal{V}(S) = \sum_{i \in N} \mathcal{V}(i)$

Покажем, что $\exists$ k и c_i при которых $\mathcal{V}'(S) = 0$: k=1, $\mathcal{V}(i) = -\sum_{i \in S} c_i$.

Вывод:

1. Т.о. несущ. хар. ф. $\mathcal{V}$(S) лишена к-либо содерж.
2. все несущ. хар.ф. игр с множеством игроков N страт экв др др, т.е. составляют 1 класс страт. эквив-ти.

§4. 0-1 нормализация (N, $\mathcal{V}$)

О. Игра (N, $\mathcal{V}$) имеет **0-1 редуцированную форму**, если:

$$\begin{aligned} &\mathcal{V}(i) = 0, \ \forall i \in N \\ &\mathcal{V}(N) = 1 \end{aligned} \qquad (16)$$

О. Игра (N, $\mathcal{V}$) имеет **a-b редуцированную форму**, если

$$\mathcal{V}(i)=a,\ \forall i\in N$$
$$\mathcal{V}(N)=b$$
$$na\neq b$$

Теорема1. Каждая сущ-ая игра (N, $\mathcal{V}$) страт экв одной и только одной игре в 0-1 редуц. форме.

Док-во. По определению игры (N, $\mathcal{V}$) ~(N, $\mathcal{V}$`) если можно найти такие k>0 и c_i, $i\in N$, что $\mathcal{V}'(S)=k\mathcal{V}(S)+\sum\limits_{i\in S}c_i$.

У нас по определению 0-1 редуцированной формы $\mathcal{V}'(i)=0, \forall i\in N, \mathcal{V}'(N)=1$.

Будем искать k и c_i из этих условий

$$k\mathcal{V}(i)+c_i=0, i=\overline{1,n}; \qquad k\mathcal{V}(S)+\sum_{i\in N}c_i=1.$$

Система из (n+1) уравнений, число неизвестных (n+1) $\Rightarrow c_i=-k\mathcal{V}(i)$,

$$k\mathcal{V}(N)+\sum_{i\in N}(-k\mathcal{V}(i))=1\Rightarrow k=\frac{1}{\mathcal{V}(N)-\sum\limits_{i\in N}\mathcal{V}(i)} \text{ и } c_i=-\frac{\mathcal{V}(i)}{\mathcal{V}(N)-\sum\limits_{i\in N}\mathcal{V}(i)}.$$

Для игры (N, $\mathcal{V}$) значения характеристической функции, вычисленное как отношение рациональности между выигрышем на S и суммой выигрышей игроков i из S, когда они не в коалиции, наз-ся 0-1нормализацией соответ.$\mathcal{V}(S)$ и обозначается $\mathcal{V}^1(S)$:

$$\mathcal{V}^1(S)=\frac{\mathcal{V}(S)-\sum\limits_{i\in S}\mathcal{V}(i)}{\mathcal{V}(N)-\sum\limits_{i\in N}\mathcal{V}(i)}$$

Пример 1. Дана (N, $\mathcal{V}$) при n=3, характер. ф. имеем на коал.:
S=(1), S=(2), S=(3), S=(1, 2) S=(1, 3) S=(2, 3), S=(1, 2, 3)

$$\Rightarrow \mathcal{V}(S)=\begin{cases}-1, & S=(1)\\ 2, & S=(2)\\ 0, & S=(3)\\ 2, & S=(1,2)\\ 2.5, & S=(1,3)\\ 1, & S=(2,3)\\ 4, & S=(1,2,3)\end{cases}$$

Произвести 0-1 нормализацию хар. ф. данной игры

$$\mathcal{V}'(S)=\begin{cases} 0, \quad S=(i) \text{ - из одного игрока} \\ \dfrac{2-(-1+2)}{4-(-1+2)}=\dfrac{1}{3}, \quad S=(1,2) \\ \dfrac{2.5-(-1+0)}{4-1}=\dfrac{3.5}{3}=\dfrac{7}{6}, \quad S=(1,3) \\ \dfrac{1-2}{4-1}=\dfrac{-1}{3}, \quad S=(2,3) \\ 1, \quad S=(N) \end{cases}$$

Пример 2. Привести примеры дележей в условиях х.ф. $\mathcal{V}(S)$ пр 1.

Решение. Необх. и дост. условие

$x_i=\mathcal{V}(i)+\alpha_i$, $\alpha_i \geq 0, \quad i \in N$

$$\sum_{i\in N}\alpha_i=\mathcal{V}(N)-\sum_{i\in N}\mathcal{V}(i)$$

$x=(x_1,x_2,x_3)$

$x_1=-1+\alpha_1;\;\; x_2=2+\alpha_2;\;\; x_3=0+\alpha_3$

$\sum_{i=1}^{3}\alpha_i=4-\sum_{i=1}^{3}\mathcal{V}(i)=4-(-1+2+0)=3$, $\alpha_i \geq 0$

тогда α_i может быть: $\alpha_1=1,\ \alpha_2=1, \alpha_3=1 \Leftrightarrow (1,1,1);\quad (0,0,3)$ и т.д.

Пример 3. Проверить является ли дележ (-1, -1, 5) дележом в условиях хар.ф. примера 1.

$x_1=-1 \Rightarrow \alpha_1=0$;

$x_2=-1=2+\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2=-3$;

$x_3=0+\alpha_3=5 \Rightarrow \alpha_3=5$

- этот дележ не является дележом в условиях данной хар-ой ф-и, т.к. $\alpha_2<0$, что противоречит данным условиям.

Пример 4. Привести пример дележей в условиях 0-1 нормализ. хар. ф-и примера 1.

$x_1=\alpha_1;\;\; x_2=\alpha_2;\;\; x_3=\alpha_3$

$$\sum_{i=1}^{3}\alpha_i=1-(0+0+0)=1$$

может быть $\alpha=(0,0,1)$ и др.

Вывод: для хар.ф. в 0-1 нормализ. компонентами дележа являются сами α_i, т.к. $\mathcal{V}(i)=0$, а $\sum_{i\in N}\alpha_i=1$, т.к. $\mathcal{V}(N)=1$, а $\mathcal{V}(i)=0$

§5. Доминирование дележей

Нужно определить дележ, который является решением кооперативной игры.
Если игра несущественная, дележ единственный $x=(\mathcal{V}(1),\mathcal{V}(2),...,\mathcal{V}(n))$.

Во всякой существенной игре дележей множество, для того чтобы учесть предпочтение одних над другими и найти решение кооперативной игры введем понятие доминирования дележей.

Введем обозначение: $x(S)=\sum_{i\in S}x_i$

О1. Дележ x доминирует дележ y по коалиции S, т.е. $x \underset{S}{\succ} y$, если выполняются два условия:

1. выигрыш каждого игрока в дележе x больше выигрыша каждого игрока в дележе y: $x_i > y_i, \quad i \in S, S \subset N$

2. сумма выигрышей игроков из S при дележе x не превышает хар.ф на коалиции S: $x(S) \le \mathcal{V}(S)$.

О2. Говорят, что дележ x доминирует дележ y вообще, если он доминирует хотя бы на одной коалиции.

Свойства отношений доминирования

1. доминирование не возможно по одноэлементной коалиции и по коалиции по всем игрокам, т.е. на коалициях S(i) и S(N) нет доминирования. Доказывается с использованием свойств индивидуальной и коллективной рациональности.
2. отношение доминирования не обладает полностью свойствами эквивалентности(рефлект, сим., транзит.).Возможны лишь частичная симметрия и транзитивность.
3. **Теорема**

Если $\mathcal{V}$ и $\mathcal{V}^1$ такие что $\mathcal{V} \sim \mathcal{V}^1$, причем дележам x и y в условиях $\mathcal{V}$ соответствуют $x^1\ u\ y^1$ в условиях $\mathcal{V}^1$, то из доминирования $x \succ y \Rightarrow x^1 \succ y^1$.

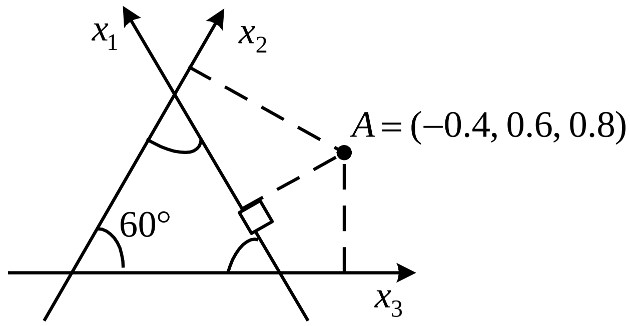
Т.е. соотношения доминирования инвариантны относительно стратегической эквивалентности – это означает, что клас. по стратег. эквивалентности может быть отнесена и к дележам.

§6. Геометрическая интерпретация дележей в условиях 0-1 редуцированной формы

Выше было сказано, что 0-1 редуцированная форма нужна чтобы можно было сравнивать харак. ф-и (даже если у выигрышей коалиций различная интерпретация размерностей)

Для наглядного представления отнош. доминирования используется геометрическая интерпретация дележей с использованием барицентрической системы координат:

1. оси x_1, x_2, x_3 составляют 60°
2. точки пересечения осей находятся на расстоянии 1 от осей.
3. ось x_1 - справа; x_2 - слева; x_3 - горизонтально
4. знак координаты точки берется положительным для оси x_2 - справа, x_1 - слева, x_3 - сверху.
5. значение координат – это расстояние до соответствующей оси, тогда ноль находится на оси.



Свойства барицентрической системы координат

1. сумма координат = 1.
2. все координаты ≥0 если точка лежит внутри треугольника , у которого i-ая вершина лежит против оси x_i. Это так называемый треугольник дележей.

По определению для игры в 0-1 редуц. форме дележом является любой вектор х координаты которого удовлетворяют условиям

$$x_i \geq \mathcal{V}_i \Rightarrow x_i \geq 0, i \in N \qquad (17)$$

$$\sum x_i = \mathcal{V}(N) \Rightarrow \sum_{i \in N} x_i = 1, i \in N \qquad (18)$$

Тогда для n=3 имеем $x_i \geq 0, \quad i = 1,2,3 \quad x_1 + x_2 + x_3 = 1$

Условия (17) и (18) в треугольнике дележей удовлетворяются автоматически. Поэтому барицентрическая система координат применяется для геометрической интерпретации и анализа игр (N, $\mathcal{V}$), n=3.

§7. Свойства доминирования дележей для классов страт. эквивалентности игр.

1. Несущ-ые игры имеют один дележ $(\mathcal{V}_1, \mathcal{V}_2, ..., \mathcal{V}_n)$ - свойства доминирования нет.
2. Игры с n=2 имеют коалиции S(i) и S(N), поэтому отношений доминирования нет.
3. Существенные (N, $\mathcal{V}$) n=3, 0-1 редуцир. форма с постоянной суммой, т.е. свойство дополнительности есть ($\mathcal{V}(S) + \mathcal{V}(N \setminus S) = \mathcal{V}(N), \quad S \subset N$)

Рассмотрим 2 дележа для (N, $\mathcal{V}$): $x = (x_1, x_2, x_3), \quad y = (y_1, y_2, y_3)$

Сравним дележи на коалиции (1,2). Пусть $x \underset{(1,2)}{\succ} y$, тогда

а) $x_1 > y_1$, $x_2 > y_2$

б) $x_1 + x_2 \leq \mathcal{V}(S)$

Проверим б): значение х.ф. на коалиции (1,2) – $\mathcal{V}$(1,2); используем условие дополнительности для S=(1,2)

$$\mathcal{V}(S) + \mathcal{V}(N \setminus S) = \mathcal{V}(N), \quad S \subset N$$

$$\mathcal{V}(1,2) + \mathcal{V}(3) = 1, \quad \mathcal{V}(3) = 0 \Rightarrow \mathcal{V}(1,2) = 1$$

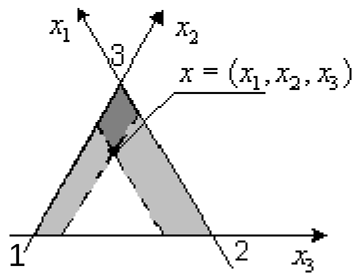
С другой стороны, по определению дележа в 0-1 редуц.форме имеем:

$$x_i \geq \mathcal{V}_i \Rightarrow x_i = 0 \qquad \sum_{i \in N} x_i = 1, i \in N$$

при n=3 имеем $x_1 + x_2 + x_3 = 1 \Rightarrow x_1 + x_2 = 1 - x_3;$

$$x_3 \geq 0 \Rightarrow x_1 + x_2 \leq 1 \Rightarrow x_1 + x_2 \leq \mathcal{V}(1,2) = 1.$$

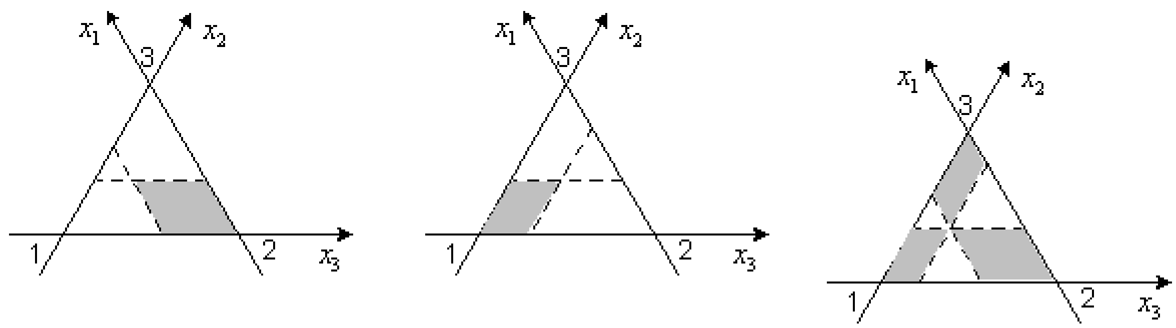
Проиллюстрируем условие а) – покомпонентное доминирование – геометрически.



Покажем в треугольники геометрическое место точек, соответствующих мн-ву дележей доминируемых дележом x на S=(1,2)

Условие $x_1 > x_1'$ означает, что прямая || стороне 23 и проходящая через x_1 отделяет 2 полуплоскости так , что точки удовл-щие условиям лежат ближе к оси 1, т.е ниже прямой. Аналогично определяются точки по компоненте x_2 такие что $x_2 > x_2'$, тогда мн-во дележей доминируемых дележом x по коалиции (1,2) есть пересечение мн-в точек и представляет собой верхний параллелограмм с открытыми внутренними сторонами.

Аналогично строятся мн-ва дележей доминининируемых x на коалициях (1,3) и (2,3)



Пример. Привести пример дележа y доминируемого дележом x на коалиции (2,3)

x=(0,3; 0,3; 0,4)   y=(0,6; 0,2; 0,2)

В соответствии с построением прямая проведенная через x и y при условии что $x \succ y$ не || ни одной оси. Если $x \not\succ y$ по коалиции S, то прямая соединяющая x и y будет || соответствующей оси.

Теорема2. Для того чтобы из 2х дележей ни один ни доминир др. необх. и дост. чтобы прямая проведенная через точки соот. x и y была || одной из сторон треугольника.

4. Существенные игры с переменной суммой (св-ва дополнительности нет); n=3 0-1 редуцир. форма.

Св-во дополнит-ти интерпретируется как соблюдение принципа постоянства суммы выигрышей коалиции S и N\S и если его нет, то суммы разные:

$\mathcal{V}(1,2)+\mathcal{V}(3)\neq 1=c_3$

$\mathcal{V}(1,3)+\mathcal{V}(2)\neq 1=c_2$

$\mathcal{V}(2,3)+\mathcal{V}(1)\neq 1=c_1$

$c_i, i=\overline{1,3}$ - разные и $c_i \leq 1$; если $c_i = 1 \forall i$, то это игра с пост. суммой.

Мы работаем с 0-1 редуц. формой - $\mathcal{V}(i)=0, i=\overline{1,3}$, тогда

$\mathcal{V}(1,2)=c_3$

$\mathcal{V}(1,3)=c_2$

$\mathcal{V}(2,3)=c_1$

Сравним 2 дележа $x=(x_1,x_2)$ и $y=(x_1',x_2')$. Пусть $x \underset{(1,2)}{\succ} y$, тогда вып-ся 2 условия:

а) $x_i > x_i'$: $x_1 > x_1', x_2 > x_2'$

б) $x_1+x_2 \leq \mathcal{V}(1,2)=c_3$; $x_1+x_2 \leq c_3$

Условия а) дадут нам область дележей для кот. компоненты x у игроков 1, 2 > чем у дележа y – геом. соотв. параллелограмм в треугольнике дележей.

Условия б) могут быть записаны так $x_1+x_2 \leq c_3$, из условия $\sum x_i = 1$

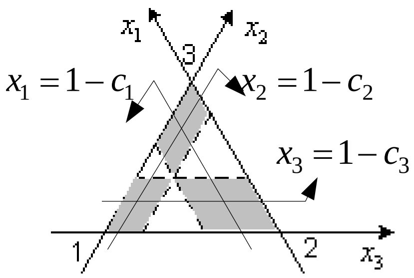
$x_1+x_2=1-x_3$; $\quad 1-x_3 \leq c_3$; $x_3 \geq 1-c_3$

получим ограничение на x_3 при доминировании на коалиции S(1,2).

Аналогично находим ограничения на $x_1 \geq 1-c_1$ при домин-ии на коал. (2,3) и огр. на $x_2 \geq 1-c_2$ при доминировании на коал. (1,3).

Накладываем полученные ограничения на полученные при доминировании на каждой коалиции мн-ва, соотв-ие домин. дележам:

1. построим параллелограммы, соответ-ие усл а):



2. теперь на полученный рис положим дополнительные огр. на x_i, полученные из-за того что условия дополнительности нет: $x_i \geq 1-c_i, \quad i=\overline{1,3}$

Получим геом. интерпретацию дележа $x=(x_1,x_2,x_3)$.

§6. С-ядро игры (N, $\mathcal{V}$).

Доминирование $x \succ y$ можно понимать как предпочтение дележа x дележу y со стороны коалиции S.

Пусть игроки пришли к такому распределению выигрыша коалиции x* при котором никакой др. дележ не доминирует x*. Такое распределение выигрыша устойчиво т.к. выгодно всем.

О. Мн-во дележей каждый из которых не доминируется никакими др. дележами наз-ся **С-ядром** кооперативной игры (N, $\mathcal{V}$) и обозначается С($\mathcal{V}$).

Теорема3. Для того, чтобы дележ $x \in C(\mathcal{V})$ необходимо и достаточно, чтобы для $\forall$ коалиции $S \subset N$ вып-сь неравенства

$$\sum_{i \in S} x_i \geq \mathcal{V}(S), \quad S \subset N \text{ или } x(S) \geq \mathcal{V}(S),\ S \subset N$$

(выигрыш коал S не меньше хар-кой ф-и на ней)

Пример. Джаз-оркестр

n=3, i=1 – певец, i=2 – пианист, i=3 – ударник.

Оркестр за совместное выступление может получить 1000$; за выступление певца с пианистом – 800$; за ударника и пианиста – 650$; пианиста – 300$; др. дуэты не рассматриваются т.к. присутствие пианиста обязательно. Кроме того, в баре певец и ударник - 500$; певец – 200$; 1 ударник не зарабатывает ничего. Какое распределение макс. (1000$) будет разумным учитывая возможности игроков в случае их индивидуальной и кооперативной работы.

1. Имеем кооперативную игру. Запишем х.ф.

$$\mathcal{V}(S) = \begin{cases} \mathcal{V}(1) = 200 \\ \mathcal{V}(2) = 300 \\ \mathcal{V}(3) = 0 \\ \mathcal{V}(1,2) = 800 \\ \mathcal{V}(1,3) = 500 \\ \mathcal{V}(2,3) = 650 \\ \mathcal{V}(N) = 1000 \end{cases}$$

2. Будем использовать в качестве критерия оптимальности дележей их устойчивости в смысле С-ядра. Запишем необх и дост. усл. того, что $x \in C(\mathcal{V})$:

$$\sum_{i \in S} x_i \geq \mathcal{V}(S), \quad S \subset N$$

Запишем эти условия для 0-1 редуц. формы $\mathcal{V}(S)$

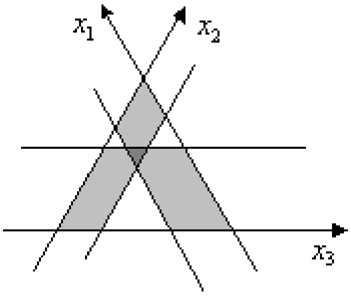
$$\mathcal{V}'(S) = \begin{cases} 0, \quad S = (i) \\ 3/5, \quad S = (1,2) \\ 3/5, \quad S = (1,3) \\ 7/10, \quad S = (2,3) \\ 1, \quad S = (N) \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 3/5 \\ x_1 + x_3 \geq 3/5 \\ x_2 + x_3 \geq 7/10 \end{cases}$$

т.к. $x_1 + x_2 + x_3 = 1$, найдем x_1, x_2, x_3 - дележ из С-ядра.

Построим геом. обл-ть, содержащую мн-во дележей $\in$ С-ядру, для этого преобразуем систему

$$\begin{cases} 1-x_3 \ge 3/5 \\ 1-x_2 \ge 3/5 \\ 1-x_1 \ge 7/10 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_3 \le 2/5 \\ x_2 \le 2/5 \\ x_1 \le 3/10 \end{cases}$$

Построим обл-ть опр-ую получ. огр. дележей:



Получ. геом. интерпр. С-ядра, найдем вершины этой области, реш. соотв. ур из системы с условием $\sum_{i \in S} x_i = 1$.

Т.о. оптимальными в смысле С-ядра могут быть:

1. дележи соотв. вершин обл-ти дележей:
   (0,3; 0,4; 0,3); (0,2; 0,4; 0,4); (0,3; 0,3; 0,4)
2. «ср. дележ» получ. если покомпонентно сложить дележи соотв. вершин обл-ти и разделитьна 3.
3. взять любой дележ из области.

При любом ответе, принадлежащим С-ядру дележ не будет дом-ся никакими др. дележами, значит он устойчив.

Рассмотрим классы игр с точки зрения сущ-ия С-ядра:

1. для несущественных (N,$\mathcal{V}$) С-ядро состоит из одного дележа
2. для существенных игр с пост. суммой имеем теорему

Теорема 4. Во всякой существенной игре с пост. суммой С-ядро пустое.

Док-во. Пусть $x \in C(\mathcal{V})$, тогда $x_i \ge \mathcal{V}(i)$, $i \in N$ и любая коалиция без i:

$$x(N \setminus i) \ge \mathcal{V}(N \setminus i), \quad S = N \setminus i$$

Сложим 1-ое и 2-ое условия и по св-ву доп-ти получим: $x(N) \ge \mathcal{V}(N)$, то по св-ву коллект-ой рац-ти дележа $x(N) \ge \mathcal{V}(N)$, т.о. в условиях в условиях должно быть точное равенство, но тогда игра несущественная $\Rightarrow x \notin$ С-ядру, т.е. С-ядро пустое. ч.т.д.

<u>Замечание</u> $C(\mathcal{V}) = \emptyset \not\Rightarrow$ невозможность кооперации игроков, просто в этом случае коопер. устойчивость должна быть определена др. способом (сценарий угроз и контругроз, концепция переговорного мн-ва и др.)

3. существенные игры с непост суммой, n=3, 0-1 редуц. форма (св-ва дополнительности нет). Х.ф. имеет вид:

$$\mathcal{V}(S)=\begin{cases} 0, & S=(i) \\ c_3, & S=(1,2) \\ c_2, & S=(1,3) \\ c_1, & S=(2,3) \\ 1, & S=(N) \end{cases}$$

По теореме3 $x \in C(\mathcal{V})$ если $x(S) \ge \mathcal{V}(S)$, т.е.

$$\begin{cases} x_2+x_3 \ge c_1 \\ x_1+x_3 \ge c_2 \\ x_1+x_2 \ge c_3 \end{cases}, \text{ т.к. } \sum_{i\in S} x_i = 1 \quad \Rightarrow \begin{cases} x_3 \le 1-c_3 \\ x_2 \le 1-c_2 \\ x_1 \le 1-c_1 \end{cases}$$

просуммируем левую и правую части $\sum_{i\in S} x_i \le 3-\sum_{i\in S} c_i$; $\sum_{i\in S} c_i \le 2$

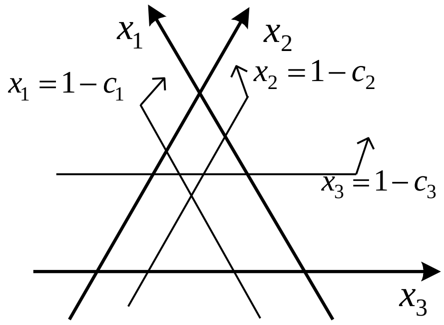
получим необ усл сущ-ия непустого С-ядра.

Вернемся к примеру и проверим пустое или нет С-ядро у игры Джаз-оркестр.

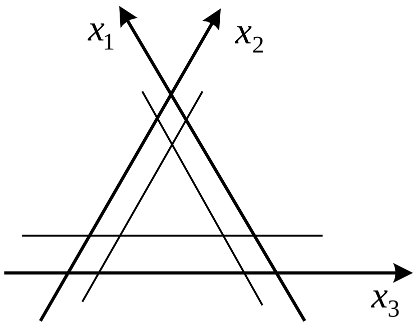
$c_1=0.7; \quad c_2=0.6; \quad c_3=0.6$, $\sum_{i\in S} c_i = 1.9 \Rightarrow$ С-ядро непустое.

Геометрическая интерпретация С-ядра.

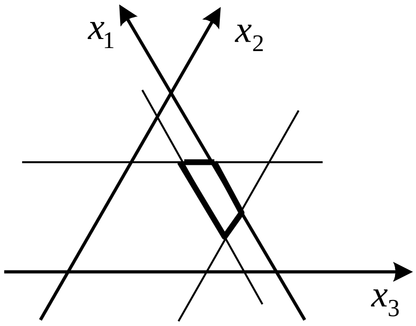
1. Непустое $C(\mathcal{V})$, n=3, 0-1 редуц. форма. Это треуг-к ограниченный прямыми $x_i = 1-c_i$

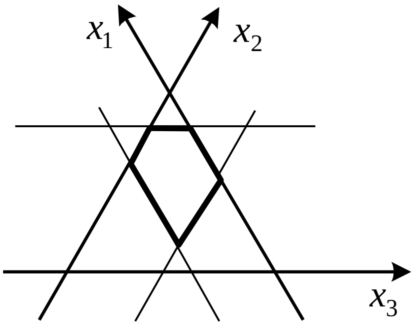


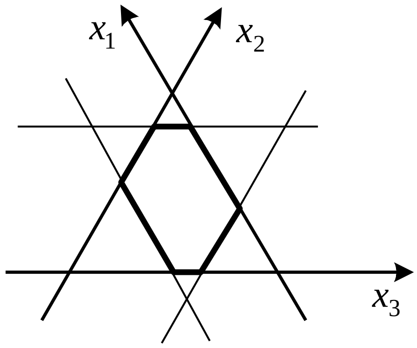
Пустое $C(\mathcal{V})$



2. Непустое $C(\mathcal{V})$ явл-ся 4-х, 5-и, 6-и-угольником в зависимости от того 1,2 или 3 точки пересечения прямых $x_i = 1-c_i$ нах-ся за пределами треуг-ка дележей.



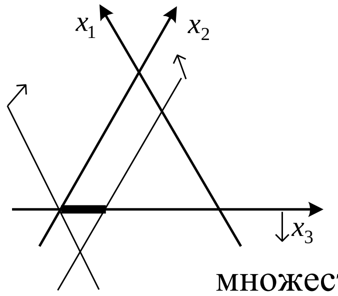




Непустое С-ядро может выродиться в сегмент на стороне треуг-ка, если среди c_i есть равные 0 и 1.

Пусть $c_3 = 1$, а $c_1 = 0$, тогда получим

$$\begin{cases} x_1 \le 1 \\ x_2 \le 1 - c_2 \\ x_3 \le 0 \end{cases} \Rightarrow$$



Вывод: С –ядро явл-ся множественным критерием оптим-ти в мн-ве всех дележей.Каждый дележ из $C(\mathcal{V})$ устойчив, однако нет признака или св-ва дележей в соотв-и с кот. можно предлагать или отвергать дележи из С-ядра. Это делают исходя из конкретной постановки задачи.