

## УДК 528.073

О.М. МАРЧЕНКО, Ю.О. ЛУК'ЯНЧЕНКО

Кафедра вищої геодезії та астрономії, Національний університет "Львівська політехніка", вул. С. Бандери 12, Львів, Україна, 79013, e-mail: qlukianchenko@gmail.com.

РЕДУКУВАННЯ ВЕРТИКАЛЬНИХ ГРАДІЄНТІВ СИЛИ ТЯЖІННЯ  
НА СФЕРИЧНУ ПОВЕРХНЮ

Протягом 2009–2013 рр. вперше проводились супутникові вимірювання тензора других похідних потенціалу сили тяжіння у рамках супутникової місії GOCE. В результаті цього були отримані різноманітні набори даних, такі як: тензори других похідних у різних системах, параметри орбіти супутника, первинні моделі гравітаційного поля Землі. Порівняно з прямим підходом, просторовим підходом та підходом часових серій побудова сферичної рівномірної сітки градієнтів дає можливість розробити ортогональні співвідношення, використовуючи продовження вгору/вниз на сферичну поверхню. У цій роботі розглядаються другі похідні гравітаційного потенціалу  $V_{zz}$  (тип даних EGG TRF2 [Gruber Th., 2010]). Дані наведені в системі координат LNOF (локальна система, орієнтована на північ) вздовж траси супутника. Подальшим кроком є редукування градієнтів на сферичну поверхню та створення рівномірної сітки. Редукування вертикальних гравітаційних градієнтів на сферу є важливим кроком під час опрацювання цієї інформації для подальшого її використання. Наприклад, аномалії сили тяжіння також задаються, як правило, по широті та довготі (на сфері). У роботі наведено спосіб такої редукції за допомогою розкладу в ряд Тейлора. Виконано експериментальні обчислення та показано рисунки з отриманими результатами. Наведено переваги задання градієнтів на сфері на відміну від розташування вздовж орбіти супутника, що значно спрощує процес побудови моделей гравітаційного поля Землі. Також в роботі подано певні рекомендації щодо використання моделі EGM2008 під час обчислення редукційної поправки.

*Ключові слова:* редукція; вертикальний градієнт сили тяжіння; місія GOCE; супутникова градієнтометрія.

## Вступ

Сьогодні розв'язання різноманітних задач виконується з надзвичайно великою кількістю надлишкових вимірів. Часто невідомі параметри залежать від великої кількості різних змінних. За громіздких обчислень доцільно зводити кількість таких змінних до мінімуму. Розглянемо вертикальні гравітаційні градієнти  $V_{zz}$ , які безпосередньо є об'єктом дослідження цієї роботи. Отже, ця функція, а саме градієнт, залежить від трьох основних аргументів: широти, довготи та радіус-вектора, очевидно, що також необхідно знати ряд певних констант. Такий градієнт можна задати таким рівнянням:

$$V_{zz} = \frac{GM}{R^3} \sum_{l=L_{\min}}^{L_{\max}} (l+1)(l+2) \left(\frac{R}{r}\right)^{l+3} \times \\ \times \sum_{m=0}^l (C_{lm} \cos(m\lambda) + S_{lm} \sin(m\lambda)) P_{lm}(\cos \vartheta). \quad (1)$$

Очевидно, що за сталого радіус-вектора ( $r$ ) функція  $V_{zz}$  залежатиме лише від двох аргументів: широти і довготи, що, своєю чергою, спростить обчислення. Отже, основним завдан-

ням цієї роботи є приведення усіх вимірів на певну сферу заданого радіуса.

Вхідними даними у роботі є дискретний набір виміряних других похідних гравітаційного потенціалу  $V_{zz}$ , в яких уже присутні поправки за прямі та непрямі припливні ефекти, приладові неточності. Градієнти розташовані вздовж траси супутника, тобто можна сказати, що ці градієнти розташовані у деякому шарі атмосфери нашої планети, товщина якого не перевищує кілька десятків кілометрів, що відповідає роботі Новака П. [Novak P., 2012].

## Мета

Оскільки градієнти сили тяжіння отримані за допомогою місії GOCE є новим типом вимірювальних даних, то це дасть змогу покращити вже відомі параметри гравітаційного поля Землі. Виміри виконуються у просторі і залежать від трьох координат, тому під час їхнього опрацювання потрібно використовувати доволі громіздкі формули, де фігуруватиме радіус кожного виміру. Приведення цих даних на сферу

дасть змогу значно спростити та прискорити обчислення. Отже, необхідно розробити алгоритм редукування вимірних градієнтів сили тяжіння на сферу за порівняно невеликих відстаней, а саме – кількох десятків кілометрів.

### Методика

Нехай вимірний градієнт позначається  $V_{zz}$ , далі задамо сферу певного радіуса. З метою зменшення відстані редукації оберемо радіус сфери, що дорівнює середньому радіус-вектору усіх вимірних градієнтів. Позначимо такий радіус  $R_0$ , тоді редукаційна поправка може бути подана таким виразом:  $\frac{\partial V_{zz}}{\partial r} \times \Delta R$ . Зредукований

на сферу градієнт позначмо  $V_{zzR0}$ . Для початку розглянемо рівняння, яке відображає закон зміни градієнта з висотою у межах певної точності. Отже, знайдемо зміну градієнта на один метр з висотою і позначимо таку зміну  $\frac{\partial V_{zz}}{\partial r}$ :

$$\frac{\partial V_{zz}}{\partial r} = -\frac{GM}{R^4} \sum_{l=L_{\min}}^{L_{\max}} (l+1)(l+2)(l+3) \left(\frac{R}{r}\right)^{l+4} \times \sum_{m=0}^l (C_{lm} \cos(m\lambda) + S_{lm} \sin(m\lambda)) P_{lm}(\cos \vartheta), \quad (2)$$

що, своєю чергою, є похідною від вертикального градієнта по радіусу, де сам градієнт подано формулою (1). Отже, значення градієнта на сфері можна отримати за допомогою виразу (3), що, своєю чергою, є випадком розкладу у ряд Тейлора, обмеженого першим членом [Novak P., 2012]:

$$V_{zzR0} = V_{zz} - \frac{\partial V_{zz}}{\partial r} \times \Delta R, \quad (3),$$

де  $\Delta R$  – різниця радіусів поточної точки та сфери  $\Delta R = r - R_0$ ;  $r$  – радіус поточної точки. Для знаходження такої зміни використаємо модель EGM2008 до 2 порядку, оскільки така кількість коефіцієнтів абсолютно задовольняє бажану точність такої редукації (табл. 1, 2) за точності градієнтів  $0.117536298E-10$  та за різниці радіусів до 10 кілометрів.

Процедура редукації істотно спрощує подальшу роботу з градієнтами під час моделювання гравітаційного поля Землі, а саме – побудову матриці нормальних рівнянь, оскільки під час обчислення її елементів вже не потрібно враховувати залежність від радіуса, більше того

постійний радіус дає можливість розташувати дані в такий спосіб, що більшість елементів нормальних рівнянь дорівнюватиме нулю.

На рис. 1 показано розподіл градієнтів у деякому шарі (не враховується радіус точки). Тому спостерігається характерне зменшення градієнтів у районі Північного полюса. Це свідчить про те, що апогей орбіти супутника знаходиться у цьому районі. Своєю чергою, збільшення висоти вимірів веде до зменшення значень градієнтів, оскільки друга похідна  $V_{zz}$  від потенціалу по радіусу є кривою, то зрозуміло, що із продовженням потенціалу вгору він стає все гладшою функцією. А як відомо, чим гладша поверхня, тим менша її кривина. Своєю чергою, на рис. 2 показано зредуковані градієнти на сферу, радіус якої дорівнює середньому із радіусів вхідних градієнтів. Тобто тепер усі градієнти розташовані на одній поверхні і радіус в усіх точках постійний і відхилення, спричинені збільшенням висоти в апогеї, вже відсутні. А це означає, що усі відхилення вже спричинені якимись іншими чинниками, а не різницею висот. Одним з найбільших чинників є гірські утворення та тектонічні розломи. Це підтверджується рис. 2, на якому чітко проявляються тектонічні структури різних типів.

Для того, щоб впевнитись у достовірності результатів, були побудовані модельні градієнти за допомогою EGM2008 на точки тієї самої сфери. На рис. 3 показані різниці змодельованих та зредукованих градієнтів. Бачимо, що середнє значення близьке до нуля, а відхилення чітко проявляються у характерних місцях (гірські утворення, тектонічні розломи тощо). З вищесказаного можна зробити висновок, що ця методика може застосовуватися для редукування градієнтів у межах заданої точності. За необхідності завжди можна використати більше членів розкладу ряду Тейлора та збільшити порядок моделі, яка використовується для обчислення похідних у цьому ряді.

Далі планується розробити методику побудови рівномірної сітки, що, своєю чергою, дасть можливість розробити спосіб пришвидшеної побудови нормальних рівнянь, який ґрунтуватиметься на властивостях такої сітки. Разом така редукація та регулярна сітка є важливими кроками у сучасних методах побудови гравітаційних моделей Землі.

Таблиця 1

Значення  $\frac{\partial V_{zz}}{\partial r} \times \Delta R$  для різних порядків моделі EGM2008  
за різниці радіусів 937 м та  $R_0 = 6622000.0$  м

Ступінь/порядок	1	2	3	4	5	180
$\frac{\partial V_{zz}}{\partial r} \times \Delta R \times 10^{10} \text{ 1/c}^2$	-11.6583	-11.7176	-11.7176	-11.7174	-11.7174	-11.7252

Таблиця 2

Значення  $\frac{\partial V_{zz}}{\partial r} \times \Delta R$  для різних порядків моделі EGM2008  
за різниці радіусів 11202 м та  $R_0 = 6622000.0$  м

Ступінь/порядок	1	2	3	4	5	180
$\frac{\partial V_{zz}}{\partial r} \times \Delta R \times 10^{10} \text{ 1/c}^2$	-138.3923	-137.4270	-137.4313	-137.4337	-137.4236	-137.4015

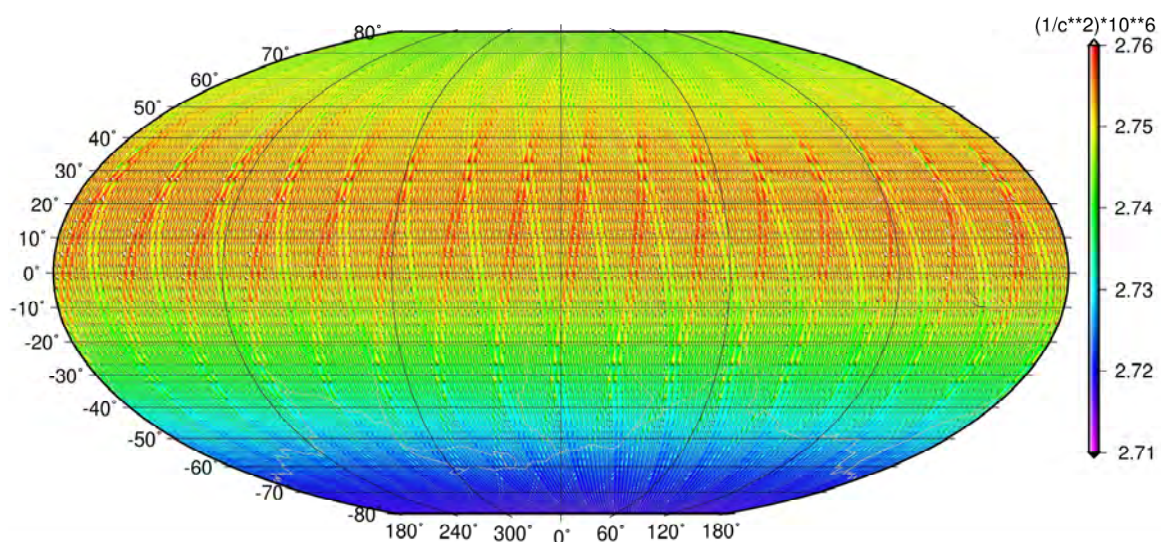


Рис. 1. Розподіл вимірних градієнтів за період в один місяць

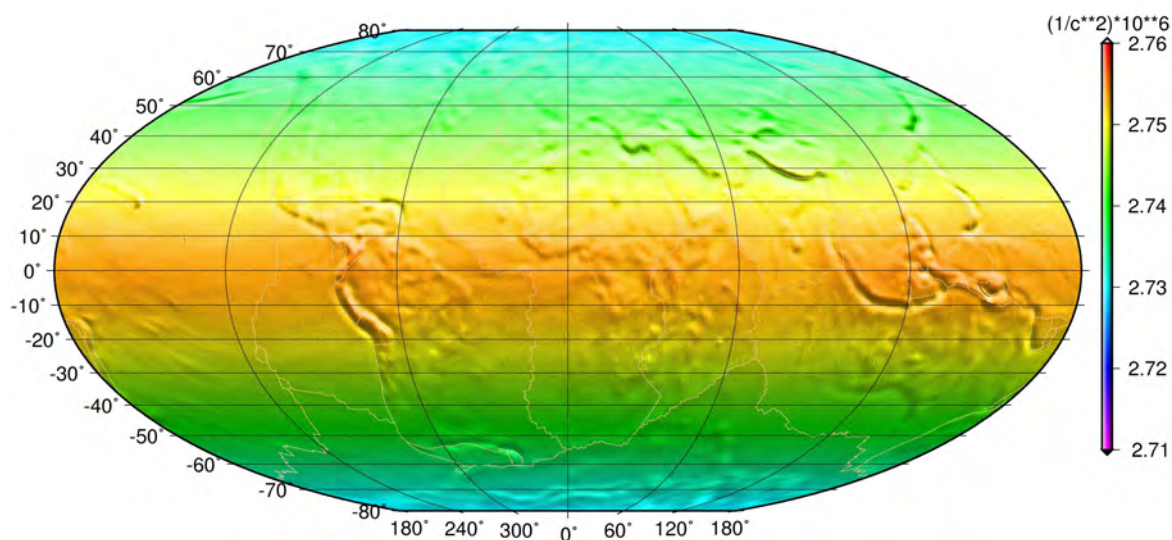


Рис. 2. Зредуковані градієнти на сферу

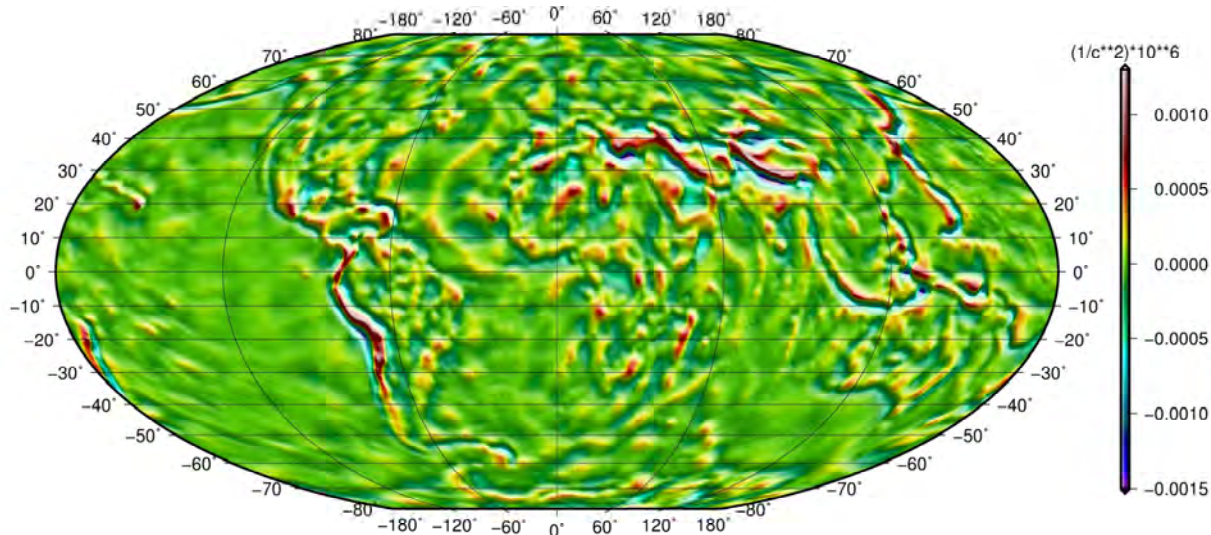


Рис. 3. Різниця між зредукованими градієнтами та змодельованими за допомогою моделі EGM2008

### Результати

Отримано методику редукування вертикальних гравітаційних градієнтів на сферу за порівняно невеликих відстаней редукацій – до 10 кілометрів. Побудовано масив вертикальних градієнтів на сфері, з яким набагато простіше працювати під час побудови моделі гравітаційного поля. Різниця (рис. 3) між отриманими градієнтами та змодельованими за допомогою EGM2008 180 ступеня/порядку є доволі незначними, що вказує на якісне редукування градієнтів на сферу.

### Наукова новизна і практична значущість

У цій роботі опрацьовуються дані, отримані за допомогою місії GOCE, яка вперше зробила реальним вимірювання гравітаційних градієнтів вздовж супутникової орбіти на висоті близько 250 км. Оскільки проект тривав близько 4,5 року і виміри проводились кожної секунди, то легко переконатись у їхній надзвичайно великій кількості. Це, своєю чергою, веде до великих затрат часу на опрацювання такої інформації. Своєю чергою, наведена процедура у цій роботі значно спрощує подальшу побудову нормальних рівнянь та визначення гармонічних коефіцієнтів, що є важливим практичним аспектом.

### Висновки

У роботі розглянуто та запропоновано методику попереднього опрацювання гравітаційних градієнтів у вигляді редукування градієнтів на сферу що, своєю чергою, полегшує подальші обчислення. А саме за відстаней редукації до

10 км можна використовувати модель гравітаційного поля EGM2008 до 2 порядку/ступеня, а за відстаней до 50 км, достатньо використовувати модель до 10 порядку.

### СПИСОК ВИКОРИСТАНИХ ДЖЕРЕЛ

- Bouman J. GOCE gravitational gradients along the orbit / J. Bouman, S. Fiorot, M. Fuchs, T. Gruber, E. Schrama, C. Tscherning, M. Veicherts, P. Visser // J Geod (2011) 85:791–805.
- Fano U. Irreducible Tensorial Sets/ Fano U. Racah G. // Academic Press, New York, 1959.
- Goldberg J.N. Spin-s Spherical Harmonics and Edth/ Goldberg J.N. et al // J. Math. Phys., Vol. 8. – P. 2155–61, 1967.
- Gruber Th. GOCE High Level Processing Facility GOCE Level 2 Product Data Handbook / Th. Gruber, R. Rummel, O. Abrikosov, R. van Hees // 2010. – The European GOCE Gravity Consortium EGG-C. – 77 p.
- Haagmans R. An Alternative Concept for Validation of GOCE Gradiometry Results Based on Regional Gravity, In: Gravity and Geoid 2002 / Haagmans R, Prijatna K, Omang O. // 3<sup>rd</sup> Meeting of the IGGC. Tziavos (ed.), Gravity and Geoid 2002. – P. 281–286, Ziti Editions, 2003.
- Heck B. Zur lokalen Geoidbestimmung aus terrestrischen Messungen Vertikaler Schweregradienten. Dissertationen Reihe C 259 / Heck B. // Deutsche Geodätische Kommission, München, 1979.
- Heiskanen W. Physical Geodesy, Freeman and Co./ Heiskanen W., Moritz H.// San Francisco and London, 1967.
- Novak P. On the downward continuation of gravitational gradients(GOCE-GDC project) / Novak P., Sebera; J., Val'ko M., Baur O. // 2012. – GGHS, Venice, Italy.



- Pail R. GOCE gravity models // Institute of Astronomical and Physical Geodesy TU München.
- Pail R. Assessment of three numerical solution strategies for gravity field recovery from GOCE satellite gravity gradiometry implemented on a parallel platform / R. Pail, G. Plank // Journal of Geodesy (2002) 76: 462–474.
- Rummel R. Gravity Gradiometry: From Loránd Eötvös to Modern Space Age / Rummel R. // Acta Geod. Geoph. Hung, 2002. – Vol. 37(4). – P. 435–444.
- Srivastava H.M, Some Families of Generating Functions for the Jacobi Polynomials/ Srivastava H.M, Gupta L.C // Comp. Math. Appl. – 1995. – Vol. 29, No.4. – P. 29–35.
- Tóth Gy. The Eötvös spherical horizontal gradiometric boundary value problem – gravity anomalies from gravity gradients of the torsion balance. In: Gravity and Geoid 2002 / Tóth Gy // 3<sup>rd</sup> Meeting of the IGGC. Tziavos (ed.), Gravity and Geoid. – 2002. – P. 102–107, Ziti Editions, 2003.

А.Н. МАРЧЕНКО, Ю.А. ЛУКЬЯНЧЕНКО

Кафедра высшей геодезии и астрономии, Национальный университет “Львовская политехника”, ул. С. Бандеры 12, Львов, Украина, 79013, e-mail: qlukianchenkop@gmail.com.

### РЕДУЦИРОВАНИЕ ВЕРТИКАЛЬНЫХ ГРАДИЕНТОВ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ НА СФЕРИЧЕСКУЮ ПОВЕРХНОСТЬ

В течение 2009–2013 гг. впервые проводились спутниковые измерения тензора вторых производных потенциала силы тяжести в рамках спутниковой миссии GOCE. В результате этого были получены разнообразные наборы данных, такие как: тензоры вторых производных в различных системах, параметры орбиты спутника, первичные модели гравитационного поля Земли. По сравнению с прямым подходом, пространственным подходом и подходом временных серий построение сферической равномерной сетки градиентов позволяет разработать ортогональные соотношения используя продолжения вверх / вниз на сферическую поверхность. В данной работе рассматриваются вторые производные гравитационного потенциала  $V_{zz}$  (тип данных EGG TRF2 [Gruber Th., 2010]). Данные приведены в системе координат LNOF (локальная система, ориентированная на север) вдоль трассы спутника. Дальнейшим шагом является редуцирование градиентов на сферическую поверхность и создание равномерной сетки. Редуцирование вертикальных гравитационных градиентов на сферу является важным шагом при разработке данной информации для дальнейшего ее использования. Например, аномалии силы тяжести также задаются только по широте и долготе (на сфере). В работе приведен способ такой редукции с помощью разложения в ряд Тейлора. Выполнены экспериментальные вычисления и представлены рисунки с полученными результатами. Приведены преимущества задания градиентов на сфере в отличие от расположения вдоль орбиты спутника, что значительно упрощает процесс построения моделей гравитационного поля Земли. Также в работе даны определенные рекомендации по использованию модели EGM2008 при исчислении редукционной поправки.

*Ключевые слова:* редукция; вертикальный градиент силы тяжести; миссия GOCE; спутниковая градиентометрия.

A.N. MARCHENKO, YU.O. LUKYANCHENKO

Department “Higher geodesy and astronomy” of National university Lviv polytechnic, 12 Bandera street, Lviv, Ukraine, 79013, e-mail: qlukianchenkop@gmail.com.

### REDUCTION OF THE GRAVITY VERTICAL GRADIENTS TO A SPHERICAL SURFACE

The GOCE mission has produced gravity gradient data during 2009–2013 years. Various data sets were obtained, such as: tensor of second derivatives in different systems, satellite orbit parameters, the models of the gravitational field of the Earth. In contrast to the direct approach, space-wise approach, and time-wise approach the construction of the spherical grid of gradients where orthogonality relationships are carried out, was developed via upward/downward continuation to sphere. This paper considers the vertical gravity gradients  $V_{zz}$  (EGG TRF2 [Gruber Th., 2010]) in particular. The data sets are oriented in LNOF (Local North Oriented Frame) along the satellites track. On the following step the gravity gradients are reduced to the spherical surface and regular grid is built for further processing. Reduction of gradients to the sphere is very important step in processing of these data. For example

gravity anomalies, also, are related to the sphere. This paper considers way of reduction of gradients, using a Taylor's series. The article performs experimental calculating and illustrated the corresponding results. The advantages of reduced gradients are demonstrated. Paper gives some recommendations in the application of EGM2008 for calculating of necessary corrections.

*Key words:* reduction, vertical gravity gradient; GOCE mission; satellite gradiometry.

#### REFERENCES

- Bouman J., Fiorot S., Fuchs M., Gruber T., Schrama E., Tscherning C., Veicherts M., Visser P. GOCE gravitational gradients along the orbit. *J Geod* (2011) 85:791–805.
- Fano U., Racah G. Irreducible Tensorial Sets. Academic Press. New York, 1959.
- Goldberg J.N. Spin-s Spherical Harmonics and Edth. Goldberg J.N. et al. *J. Math. Phys.*, Vol. 8, pp. 2155–61, 1967.
- Gruber Th., Rummel R., Abrikosov O., R. van Hees. GOCE High Level Processing Facility GOCE Level 2 Product Data Handbook, ч, 2010, The European GOCE Gravity Consortium EGG-C, 77 p.
- Haagmans R., Prijatna K., Omang O. An Alternative Concept for Validation of GOCE Gradiometry Results Based on Regional Gravity, In: *Gravity and Geoid*, 2002, 3<sup>rd</sup> Meeting of the IGGC. Tziavos (ed.), *Gravity and Geoid* 2002, pp 281-286, Ziti Editions, 2003.
- Heck B. Zur lokalen Geoidbestimmung aus terrestrischen Messungen Vertikaler Schweregradienten. Dissertationen Reihe C 259. Deutsche Geodätische Kommission, München, 1979.
- Heiskanen W., Moritz H. *Physical Geodesy*, Freeman and Co. San Francisco and London, 1967.
- Novak P., Sebera J., Val'ko M., Baur O. On the downward continuation of gravitational gradients(GOCE-GDC project). 2012, GGHS, Venice, Italy.
- Pail R. GOCE gravity models. Institute of Astronomical and Physical GeodesyTU München.
- Pail R., Plank G. Assessment of three numerical solution strategies for gravity field recovery from GOCE satellite gravity gradiometry implemented on a parallel platform. *Journal of Geodesy* (2002) 76: 462–474
- Rummel R., Gravity Gradiometry: From Loránd Eötvös to Modern Space Age. *Acta Geod. Geoph. Hung.*, Vol. 37(4), pp. 435–444, 2002.
- Srivastava H.M, Gupta L.C. Some Families of Generating Functions for the Jacobi Polynomials. *Comp. Math. Appl.*, Vol. 29, no.4, pp. 29–35, 1995.
- Tóth Gy. The Eötvös spherical horizontal gradiometric boundary value problem – gravity anomalies from gravity gradients of the torsion balance. In: *Gravity and Geoid* 2002, Tóth Gy, 3<sup>rd</sup> Meeting of the IGGC. Tziavos (ed.), *Gravity and Geoid* 2002, pp. 102–107, Ziti Editions, 2003.

Надійшла 21.02.2014 р.