МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ І СПОРТУ УКРАЇНИ
КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ
ІМЕНІ МИХАЙЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
ЩОДО ВИКОНАННЯ ПРАКТИЧНИХ ЗАНЯТЬ ТА САМОСТІЙНОЇ РОБОТИ
З ДИСЦИПЛІНИ:
«**ДИСКРЕТНА МАТЕМАТИКА**»,
СТУДЕНТІВ ДЕННОЇ ФОРМИ НАВЧАННЯ ЗІ СПЕЦІАЛЬНОСТІ
6.050102 - “КОМП’ЮТЕРНІ СИСТЕМИ ТА МЕРЕЖІ”,
(У ТОМУ ЧИСЛІ СКОРОЧЕНИЙ ТЕРМІН НАВЧАННЯ)
ЧАСТИНА 1
МНОЖИНИ, ПОШУКОВІ ЗАДАЧІ НА ГРАФАХ

КРЕМЕНЧУК 2012

Методичні вказівки щодо виконання практичних робіт з дисципліни «Дискретна математика» студентів денної форми навчання зі спеціальності 6.050102 - “Комп’ютерні системи та мережі” (у тому числі скорочений термін навчання) частина 1 «Множини, пошукові задачі на графах».

Укладачі: ст. викл. В.Ю. Бельська

Рецензент доц. Ю.В. Лашко

Кафедра комп’ютерних та інформаційних систем

Затверджено методичною радою КрНУ імені Михайла Остроградського

Протокол № від «__ » _______ 2012 р.

Голова методичної ради _________________ проф. В.В. Костін

ЗМІСТ

ВСТУП

Основні способи подання інформації є дискретними: це слова і конструкції мов і граматик – природних і формалізованих: табличні масиви реальних даних у технічних системах та науково-природничих спостереженнях; дані господарської, соціальної, демографічної, історичної статистики тощо.

Для кількісного аналізу та обчислювальних перетворень неперервних процесів доводиться їх «дискретизувати». Тому зрозуміло, що математичні методи обробки, аналізу та перетворення дискретної інформації необхідні у всіх галузях наукової, господарської та соціальних сферах.

Дані методичні вказівки розраховані, у першу чергу, на студентів, які вивчають математичні методи для використання їх у природничих науках та комп'ютерних технологіях, а саме студентів спеціальності 6.050102 - "Комп'ютерні системи та мережі. У першій частині методичні вказівки містять приклади та пояснення їх практичного розв'язання з перших двох розділів нормативного курсу «Дискретна математика» зі спеціальностей комп'ютерних напрямків і є гарним помічником для підготовки студентів, а також викладачів, до проведення та виконання практичних завдань. Від студента вимагається знання математики у обсязі середньої школи. Кожний розділ містить не тільки методику вирішення основних задач, але і додаткові вправи і тестові завдання згідно тематики поданого матеріалу, що дозволяє покращити самостійну підготовку студентів та викладачів до проведення практичного заняття.

Знання, отримані у результаті вивчення дисципліни, та отримані практичні навики допоможуть студентам у вивченні дисциплін «Прикладна теорія цифрових автоматів», «Об'єктно – орієнтоване програмування», «Теорія ймовірностей та математична статистика», «Логічне програмування», «Методи оптимізації», «Комп'ютерні мережі» та інш.

ПЕРЕЛІК ПОЗНАЧЕНЬ, ОДИНИЦЬ, СКОРОЧЕНЬ ТА ТЕРМІНІВ

N – множина натуральних чисел

Z – множина цілих чисел

Q – множина раціональних чисел

R – множина дійсних чисел

U – універсальна множина

$\varnothing$ - порожня множина

$\Gamma: X \to Y$ - відображення

$A \subseteq B$ – нестроге включення

$A \subset B$ – строге включення

$A \times B$ – декартів добуток множин A і B

$A \cap B$ – перетин множин

$A \cup B$ –об’єднання множин

$\neg A$ – доповнення множини A

$A \setminus B$ – різниця множин A і B

G=(X, U, Г) – абстрактний граф

X – множина вершин графа

U – множина дуг графа

C – матриця суміжності ваг

c_{ij} – вага дуги u_{ij}

R – матриця суміжності вершин графа

V – модифікована матриця суміжності вершин графа

S – матриця інциденцій

$\mu(x_i, x_к)$- шлях з вершини графа x_i до вершини $x_к$

$l(x_i, x_к)$ – довжина шляху з вершини графа x_i до вершини $x_к$

НМ – нижня межа множини можливих гамільтонових контурів

(X_1,X_2) – розтин між множинами вершин графа X_1 та X_2

$v(X_1,X_2)$ – потужність розтину між множинами вершин графа X_1 та X_2

1. МНОЖИНИ

Практичне заняття № 1

Тема. Способи задання множин. Основні операції над множинами. Геометрична інтерпретація множин

Мета: набуття практичних навичок представлення множин різними способами, виконання основних операцій над множинами

Короткі теоретичні відомості.

Множина є настільки загальним і водночас початковим поняттям, що її строге визначення через більш прості поняття дати важко. Г. Кантор дав наступне інтуїтивне означення: *множина* – це сукупність деяких елементів, цілком визначених у випадку кожної конкретної множини.

Множина називається *скінченною*, якщо вона містить скінченне число елементів, і *нескінченною*, якщо вона містить необмежене число елементів.

Упорядкованою вважається така множина, в якій важливі не тільки її елементи, але і їх наступності у множині.

Множину можна задати простим *переліком* елементів $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$. Інший спосіб задання множини складається з опису елементів *визначеною властивістю*: $X=\{x: P(x)\}$, де $P(x)$ означає, що елемент х має властивість $P(x)$.

Множина A, всі елементи якої належать множині B, називається *підмножиною* множини B. *Нестроге включення* позначається $A \subseteq B$, означає , що A – підмножина множини B, що , можливо, співпадає з B. *Строге включення* позначається $A \subset B$ і означає, що A – підмножина множини B, але множина B містить хоча б один елемент, який не належить до множини A.

Універсальною називається множина, яка містить усі можливі елементи, що зустрічаються в даній задачі. Універсальна множина позначається U.

Порожньою називається така множина, яка не містить ніяких елементів. Така множина позначається символом $\varnothing$.

У алгебрі множин широко застосовується у програмуванні, зокрема, при роботі з базами даних і становить основу для побудови багатьох математичних структур.

У алгебрі множин визначені операції:

об’єднання (сума) $X \cup Y = \{x \in X \cup Y: x \in X$ *або* $x \in Y\}$;

перетин (добуток) $X \cap Y = \{x \in X \cap Y: x \in X$ *та* $x \in Y\}$;

різниця $X \backslash Y = \{x \in X \backslash Y : x \in X$ *та* $x \notin Y\}$;

доповнення (заперечення) $\overline{X} = U \setminus X$. $\overline{X} = \{x : x \in U \text{ и } x \notin X\}$.

Пріоритет операцій відносно одна до одної:

1. $\overline{A}$.
2. $A \cap B$.
3. $A \cup B$.
4. $A \backslash B$ (змінити пріоритет операції може тотожність $A \setminus B = A \bigcap \overline{B}$).

Геометричною інтерпретацією множин є діаграми Ейлера – Венна. Діаграмою Ейлера – Венна є площина, зображена у вигляді прямокутника, кожна точка якої є елементом універсальної множини. Фігури, зображені в середині площини є абстрактним зображенням підмножини заданого універсалу. Найбільш ефективним є зображення множин за допомогою кругів.

Приклади розв’язку задач

Приклад 1.1.1. Задайте переліченням елементів множину простих чисел між 10 та 20.

Розв’язок. Простим називається ціле число, яке націло ділиться на число 1 та саме на себе. Нехай *П* – шукана множина. Використовуючи означення простого числа, перебираємо усі числа між 10 та 20 знаходимо прості числа і записуємо їх у порядку збільшення як елементи множини *П*. Тобто *П*={ 11, 13, 17, 19 }.

Приклад 1.1.2. Задайте за допомогою описання множину натуральних чисел, що кратні 10.

Розв’язок. Нехай N_{10} шукана множина. Загальними особливостями елементів множини N_{10} є те, що вони належать до множини натуральних чисел N і до того ж кратні числу 10. Тоді шукану множину можна описати наступним чином $N_{10}=\{x| x\in N: x=10\cdot i, i\in N\}$.

Приклад 1.1.3. Визначте, елементом яких з наведених множин є число 2:

1. $\{x| x\in N: x>1\}$;
2. $\{x: x=y^2, y\in Z\}$, Z – множина цілих чисел;
3. $\{2, \{2\}\}$.

Розв'язок. Проаналізуємо описані множини. Перша множина –це усі натуральні числа більші за число 1, число 2 є натуральним і воно більше за число 1, тобто першій множині належить число 2. Друга множина складається з чисел, які є результатом піднесення до квадрату любого цілого числа, але число 2 не може бути результатом піднесення до квадрату якогось цілого числа, бо корінь квадратний з 2 є раціональним числом ≈1.4. Тобто 2 не належить до другої множини. Третя множина - це число 2 та підмножина, елементом якої є також число 2. Отже 2 належить першій та третій множинам.

Приклад 1.1.4. Визначте, які з наведених множин дорівнюють одна одній:

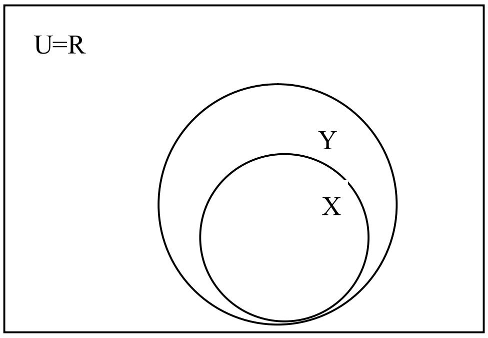
1. $A=\{$x| існує y такий, що $x=2y, y\in N\}$.
2. $C=\{1, 2, 3\}$.
3. $D=\{0, 2, -2, 3, -3, 4, -4,\ldots\}$.
4. $E=\{2x| x\in Z\}$.

Розв'язок. Серед наведених множин рівними є перша та четверта множина, оскільки елементи цих множин мають оду загальну властивість, а саме: складаються з цілих чисел кратних 2.

Приклад 1.1.5. Задано дві множини з одного універсалу $X=\{x \in R : 0 \le x \le 1\}$ та $Y=\{y \in R : 0 \le y \le 2\}$. Знайдіть множини, які є результатом виконаних операцій над множинами X та Y : $X\cup Y$; $X\cap Y$; $\overline{X \cap Y}$; $X\setminus Y$; $\overline{X \setminus Y}$.

Розв'язок. Проаналізуємо задані множини. X – це нескінченна множина раціональних чисел від 0 до 1, а Y - множина раціональних чисел від 0 до 2, тобто усі елементи множини X є також елементами множини Y, до того ж Y має елементи, які не співпадають з X, а саме усі раціональні числа більші за 1 але не більші ніж

2. Отже *X* є підмножиною множини *Y*, $X \subset Y$. Такий зв'язок геометрично можна зобразити наступним чином:



Виконавши операції над множинами отримуємо наступні результати:

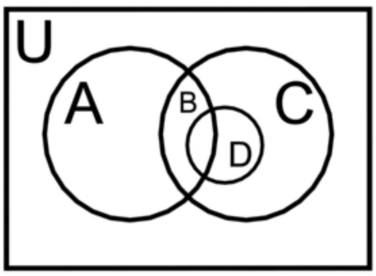
$X \cap Y = X$; $\overline{X \cap Y} = R \setminus X = \overline{X}$;

$X \setminus Y = \varnothing$; $\overline{X \setminus Y} = \overline{\varnothing} = R$;

$X \cup Y = Y$.

Приклад 1.1.6. Задано універсальну множину, як набір цілих чисел $U = \{1, 2, 3 \ldots 45\}$. Та 4 її підмножини $A = \{a_i \in U: a_i = 2*i,\ i \in N\}$, $B = \{b_j \in U: b_j = 6*j,\ j \in N\}$, $C = \{c_k \in U: c_k = 3*k,\ k \in N\}$, $D = \{d_s \in U: d_s = 15*s,\ s \in N\}$. Необхідно зобразити множини *U, A, B, C, D* на діаграмі Ейлера-Венна.

Розв'язок. Проаналізуємо множини *A, B, C, D*. Множина *A* складається з 45/2=22 (45-граничне число множини *U*) елементів натурального ряду, кратних числу 2, тобто елементами множини *A* є { 2, 4, 6, 8, …, 44}. Множина *B* складається з 45/6=7 елементів, кратних 6. Але оскільки число 6 кратне 2, то довільний



елемент множини *B* кратний 2, тобто належить множині *A*, а це означає, що множина *B* є підмножиною множини *A* ,$B \subset A$. Множина *C* містить 45/3=15 елементів кратних 3. У множин *A* та *C* є елементи, що належать як обом множинам так і елементи що належать одній множині, але не належать іншій, ця властивість притаманна множинам, що знаходяться у загальних положеннях. Перетином множин *A* та *C* є елементи, які одночасно кратні як числу 2 так і числу 3, тобто числа, які діляться на 2·3=6, а це загальна властивість усіх елементів множини *B*. Отже приходимо до висновку: множина *B* – результат перетину множин *A* і *C*, тобто $A \cap C = B$. Множина *D* містить 45/15=3 елементів кратних 15. Але число 15 також без залишку ділиться на 3, тобто множина *D* є підмножиною множини *C*. З множинами *A* та *B* множина *D* знаходиться у загальних положеннях. За результатами аналізу, зобразимо множини на діаграмі Ейлера-Венна.

Приклад 1.1.7. Необхідно визначити послідовність операцій у формулі
$E = \left(A \setminus B \cup \overline{A} \cap D \right) \setminus D$

Розв'язок. З урахуванням приоритетів це слід зробити так:
$E = \left(A \setminus \left(B \cup \left(\left(\overline{A} \right) \cap D \right) \right) \right) \setminus D$

Завдання для самостійного опрацювання

1. Задайте переліченням елементів такі множини:

   а) множину натуральних чисел, не більших за 7;

   б)множину початкових букв імен студентів, однієї групи;

   в) множину простих чисел між 10 та 20;

   г) множину райцентрів Полтавської області;

   д) множину абревіатур спеціальностей вашого факультету.

2. Задайте у вигляді $X=\{x\text{: } P(x)\}$ такі множини:

   а) множину натуральних чисел, не більших за 100;

   б) множину парних додатних чисел;

   в) множину натуральних чисел, що кратні 10.

3. Назвіть елементи множин:

   а) $\{x|\ x \in N,\ x>1\}$;

   б) $\{x|\ x$ –десяткова цифра $\}$.

4. Дана множина A={7, 13, 25, 34, 101, 112}. Які з наведених множин є підмножинами множини A?

   а) {1, 7,13};

   б) {0, 1, 12};

   в) {25, 112, 34};

   г) $\varnothing$;

   д) {7, 13, 25, 34, 101, 112, 113}.

5. Визначте, які з наведених множин дорівнюють одна одній:

   а) $A=\{x|$ існує y такий, що $x=2y,\ y \in N\}$;

б) $C=\{1, 2, 3\}$;

в) $D=\{0, 2, -2, 3, -3, 4, -4, \ldots\}$;

г) $E=\{2x \mid x\in Z\}$.

6. Зобразіть геометрично такі множини:

   а) A={0, 1, 2}, B={1, 2, 3, 4, 5};

   б) A={a, b, c, d, e}, B={d, a, e};

   в) N – натуральні числа, Z – цілі числа, R – дійсні числа;

   г) X – множина птахів, Y – множина звірів, Z – множина ссавців, F – множина кролів, G – множина живих організмів, які живуть в морях і океанах.

7. Зобразіть геометрично множини A, B, C, якщо $A\subseteq B$, $B\subseteq C$.

8. Для множин A={1, 2, 3, 4, 5}, B={0, 3,6} знайдіть:

   а) $A\cup B$; б) $A\cap B$; в) $A\backslash B$; г) $B\backslash A$.

9. В якому відношенні знаходяться множини A і B, якщо $A\backslash B=B\backslash A=\varnothing$?

10. Знайдіть множини A і B, якщо $A\backslash B=\{1, 5, 7, 8\}$, $B\backslash A=\{2, 10\}$, $A\cap B=\{3, 6, 9\}$.

11. Нехай A, B, C – множини. Покажіть, що:

    а) $(A\cap B)\subseteq A$; г) $(A\cup B)\subseteq(A\cup B\cup C)$;

    б) $A\subseteq(A\cup B)$; д) $(A\cap B\cap C)\subseteq(A\cap B)$.

    в) $(A\backslash B)\subseteq A$;

12. Доведіть, що $A\subseteq B$ правильно тільки тоді і тоді, коли правильно, що $\overline{B}\subseteq\overline{A}$.

Контрольні тестові питання для самоперевірки

1. Оберіть два вірних означення множини: множина це

   1) послідовність однотипних елементів;

   2) перелік елементів, з яких вона складається;

   3) послідовність попарно різних елементів, які сприймаються як одне ціле;

   4) послідовність елементів, які сприймаються як одне ціле.

2. Оберіть з наведених два вірних вислови

   1) Якщо $A\subset B$,то доповнення до цих множин пов’язані зворотньою залежністю;

   2) Якщо $A\subset B$,то доповнення до цих множин пов’язані аналогічною залежні-

стю;

3) Результатом об'єднання двох множин є порожня множина лише у випадку коли об'єднуються дві порожні множини;

4) Результатом перетину двох множин є порожня множина лише у випадку коли перетинаються дві порожні множини.

3. Оберіть з наведених два вірних вислови

   1) множина $A \cap B$ є підмножиною множини $A \cup B$;

   2) результатом різниці двох множин є порожня множина лише у випадку коли у операції різниці записані дві порожні множини;

   3) якщо $A \cap B = \varnothing$, то множини A і B рівні;

   4) якщо $A \setminus B = \varnothing$, то або множини A і B рівні або $A \subset B$.

4. В теорії множин закон комутативності виконуєьтся для наступних операцій

   1) об'єднання, перетин, доповнення;

   2) об'єднання, перетин, різниця, доповнення;

   3) об'єднання, перетин;

   4) об'єднання, доповнення, віднімання, додавання.

5. Існує декілька означень підмножини. Виберіть два вірних.

   1) X є підмножиною множини A, якщо X - послідовність однотипних елементів.

   2) X є підмножиною множини A, у випадку коли усі єлементи X належать множині A.

   3) X є підмножиною у випадку коли це послідовність елементів, які сприймаються як одне ціле.

   4) X є підмножиною множини A, у випадку коли усі єлементи X належать множині A, до того ж множина A містить також елементи відмінні від елементів множини X.

   5) Підмножина - набір різноманітних елементів.

Практичне заняття № 2

Тема. Використання законів та тотожностей для спрощення формул, які будують нові множини на основі існуючих

Мета: набуття практичних навичок використання законів та тотожностей для спрощення складних виразів на множинах

Короткі теоретичні відомості

У алгебрі множин автоматично виконуються такі закони і тотожності, які дозволяють віднести алгебру множин до так званих *булевих алгебр*:

1. Комутативні закони: $X \cap Y = Y \cap X$, $X \cup Y = Y \cup X$.

2. Асоціативні закони: $(X \cap Y) \cap Z = X \cap (Y \cap Z)$, $(X \cup Y) \cup Z = X \cup (Y \cup Z)$.

3. Дистрибутивні закони: $(X \cup Y) \cap Z = (X \cap Z) \cup (Y \cap Z)$,

$(X \cap Y) \cup Z = (X \cup Z) \cap (Y \cup Z)$.

4. Властивості порожньої та універсальної множин:

$X \cap U = X$, $X \cup U = U$, $X \cap \varnothing = \varnothing$, $X \cup \varnothing = X$.

5. Закони ідемпотентності:

$X \cap X = X$, $X \cup X = X$.

6. Закон інволюції $\overline{\overline{X}} = X$.

7. Закони протиріччя та виключення третього $X \cap \overline{X} = \varnothing$, $X \cup \overline{X} = U$,

якщо $Y \subseteq X$, те $X \cap Y = Y$, $X \cup Y = X$.

8. Закон елімінації $X \cap (X \cup Y) = X$, $X \cup (X \cap Y) = X$.

9. Закони де Моргана $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cap \overline{Y}$, $\overline{X \cap Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$.

На відміну від операцій перетину та об'єднання операція різниці не комутативна та двухмістна, тому при виконанні спрощень іноді є сенс замінити операцію різниці більш гнучкою операцією перетину. Це допомогає нам виконати операція доповнення. Формулу переходу від операції різниці до операції перетину можна створити з загального опису операції різниці $X \backslash Y = \{x: x \in X \text{ и } x \notin Y\} = \{x: x \in X \text{ и } x \in \overline{Y}\} = X \cap \overline{Y}$.

Приклади розв'язку задач

Приклад 1.2.1. Спростити вираз $\overline{(\overline{A}\cup B\cup C)}\cap\left(A\cap\left(B\cup\overline{C}\right)\right)\cap\overline{B}$.

Розв'язок. $\overline{(\overline{A}\cup B\cup C)}\cap\left(A\cap\left(B\cup\overline{C}\right)\right)\cap\overline{B}$ =(застосуємо закон де Моргана)= $\left(A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\right)\cap\left(A\cap\left(B\cup\overline{C}\right)\right)\cap\overline{B}$ =(асоціативність і комутативність)= $A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap A\cap\overline{B}\cap\left(B\cup\overline{C}\right)$=(закон ідемпотентності)= $A\cap\overline{B}\cap\overline{C}\cap\left(B\cup\overline{C}\right)$= (закон елімінації) = $A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$.

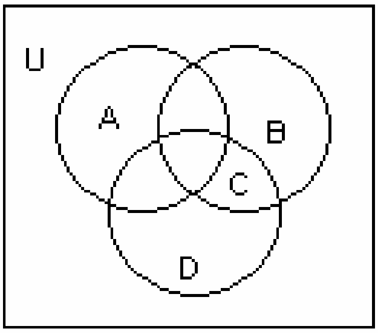
Відповідь: $A\cap\overline{B}\cap\overline{C}$.

Приклад 1.2.2. Дано універсальну множину $U=\{1,\ldots,60\}$ та 4 підмножини $A=\{a\in U : a=5\cdot i\}$, $B=\{b\in U : b=3\cdot j\}$, $C=\{c\in U : c=6\cdot k\}$, $D=\{d\in U : d=2\cdot n\}$. Зобразіть відношення між множинами за допомогою діаграми Ейлера – Венна. Знайдіть кількість елементів множин, які задано за допомогою формул алгебри множин

$$F_1=(\overline{\overline{D}\cup\overline{C}})\cap(\overline{D\cap C})\cup(\overline{A\cap D\cap\overline{C}})$$

$$F_2=(\overline{(A\cup\overline{B})\cap(\overline{C}\cup D)})\cap(\overline{\overline{A}\cap B\cap D}).$$

Розв'язок. Для зображення множин графічно виконаємо аналіз множин *A, B, C, D* та взаємозв'язку між ними. Множина *C* складається з елементів, які одночасно діляться як на число 3 так і на число 2 (саме на такі прості числа можна розкласти число 6), тобто *C* є областю перетину множин *B* та *D* $C=B\cap D$. Множини *A* і *B*, *A* і *C*, *A* і *D*, *B* і *D* знаходяться у загальних положеннях, бо мають як спільні елементи, так і елементи, що належать кожній з множин окремо.



Для зручності аналізу множин, виконаємо спрощення формул за законами та тотожностями алгебри множин.

F_1: $\overline{\overline{D}\cup\overline{C}}$ =(закон де Моргана)= $D\cap C$; $(\overline{A\cap D\cap\overline{C}})=(\overline{(A\cap D)\setminus C})$;

$(D\cap C)\cap(\overline{D\cap C})=C\cap\overline{C}$ =(закон виключення третього)=$\varnothing$;

$F_1=\varnothing\cup(\overline{(A\cap D)\setminus C})$=(властивості порожньої множини)

$=\overline{(A\cap D)\setminus C}=U\setminus((A\cap D)\setminus C)$.

F_2: $\overline{((A\cup\overline{B})\cap(\overline{C}\cup D))}=$ (закон де Моргана) = $\overline{(A\cup\overline{B})}\cup\overline{(\overline{C}\cup D)}=$ (закон де Моргана) $=(\overline{A}\cap B)\cup(C\cap\overline{D})=(\overline{A}\cap B)\cup(C\setminus D)=(\overline{A}\cap B)\cup\varnothing=$ (властивості порожньої множини) $=(\overline{A}\cap B)=B\setminus A$;

$\overline{(\overline{A}\cap B\cap D)}=\overline{\overline{A}\cap C}$; $F_2=\left(B\setminus A\right)\cap\overline{\overline{A}\cap C}=\left(B\setminus A\right)\setminus\left(C\setminus A\right)$.

Формули множин F_1 та F_2 максимально спрощені, тепер виконаємо підрахунок елементів, які наповнюють ці множини.

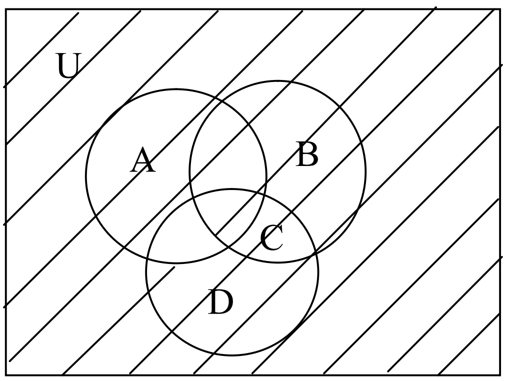
N(F_1)=N(U) – N(A∩D\C)=60 – (N(A∩D) – N(A∩D∩C)) = 60 – (6 – 2) = 60-4 = 56.
N(F_2)=N(B\A) – N((B\A) ∩(C\A))=(N(B) – N(A∩B)) – N((B∩C)\A) = (20 – 4) – (N(B∩C) – N(B∩C∩A))=16 – (N(C) - N(C∩A)) = 16 – (10 – 2) = 8.

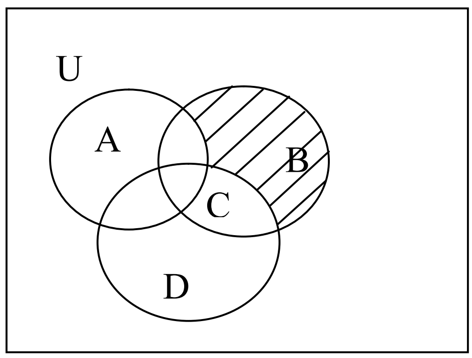
Відповідь: множина $F_1=U\setminus\left((A\cap D)\setminus C\right)$ складається з 56 елементів; множина $F_2=\left(B\setminus A\right)\setminus\left(C\setminus A\right)$ складається з 8 елементів.

Приклад 1.2.3. Беручи за умову опис множин з *прикладу 1.2.2.* зобразити на діаграмах Ейлера – Венна множини *A, B, C, D,* F_1 та *A, B, C, D,* F_2 .

Рішення. Для формування діаграм будемо враховувати формули множин F_1 та F_2 отримані після спрощення.

Заштрихуємо на першій діаграмі область, яка належить множині F_1, а на другій - область, яка належить множині F_2





Завдання для самостійного опрацювання

1. Спростіть вирази:

   а) $\overline{\overline{A}\cup C}\cup\left(B\cup B\cup C\right)\cap\left(\overline{B}\cup\overline{B\cup C}\right)$;

   б) $\left(A\cap\overline{B}\cap C\right)\cap\left(A\cup B\right)\cap\overline{C}$;

в) $A \cap \left(\left(B \cap \overline{C} \cup \overline{C \cup B}\right) \cap C\right) \cap \overline{A}$;

г) $\left(A \cap B \cap C\right) \cup \left(\overline{A} \cap B \cap C\right)$.

2. Доведіть за допомогою діаграм Ейлера – Венна:

   а) асоціативні закони;

   б) дистрибутивні закони;

   в) закони де Моргана.

3. Дано універсальну множину U та 4 підмножини A, B, C, D. Зобразіть відношення між множинами за допомогою діаграми Ейлера – Венна. Знайдіть кількість елементів множин, які задано за допомогою формул алгебри множин:

   а) U={1,2,…,45}, A={a ∈ U : a=5·i}, B={b ∈ U : b=3·j}, C={c ∈ U : c=9·k}, D={d ∈ U : d=10·n}, $F_1 = (\overline{\overline{A} \cup \overline{D}}) \cup (\overline{\overline{D} \cap C}) \cup (\overline{B} \cap \overline{C})$;

   б) U={1,2,…,75}, A={a ∈ U : a=1·i}, B={b ∈ U : b=3·j}, C={c ∈ U : c=9·k}, D={d ∈ U : d=17·n}, $F_2 = (\overline{\overline{A} \cup \overline{B} \cup C \cup \overline{D}}) \cap (\overline{B \cap \overline{C \cap D}})$.

Тестові питання для самоперевірки

1. Задано множини X1= {x1∈U: x1=3i}, та X2= { x2∈U: x2=2r}. Було побудовано множину Y={ y∈U: y=6j } на основі виконаної операції над множинами X1 та X2 . Серед наведених варіантів виберіть операцію побудови множини Y.

   1.1. X1 ∩X2. 1.2. X1 ∪ X2. 1.3. X1 \ X2

2. Задано множини X1={2, 3, 5, 8, 26 } та X2={3, 8, 10,35}. Було побудовано множину Y={10, 35} на основі виконаної операції над множинами X1 та X2 . Серед наведених варіантів виберіть операцію побудови множини Y.

   2.1.X1 ∩X2. 2.2. X2 \ X1. 2.3. X1 \ X2

3. Задано множини A={a∈U: a=3·i}, B={b∈U: b=9·k}, C={c∈U: c=6·n} i,k,n=1,2,… підмножини універсальної множини U={1,2,3,…,60}. Серед наведених варіантів виберіть той, який описує взаємозв′язок між множинами A

B C

3.1.A $\subset$ B, A i C- в загальних положеннях.

3.2.C $\subset$ A, A i B, B i C- в загальних положеннях.

3.3.B $\subset$ A, C $\subset$ A, B i C- в загальних положеннях.

3.4.A $\subset$ C, A i B, B i C- в загальних положеннях.

4. Задано множини X1={ x1$\in$U: x1=3i } та X2={ x2$\in$U: x2=6j }. Було побудовано множину Y={ y$\in$U: y=3i } на основі виконаної операції над множинами X1 та X2 . Серед наведених варіантів виберіть операцію побудови множини Y.

   4.1. X1 $\cap$X2. 4.2. X1 $\cup$ X2. 4.3. X2 \ X1

Практичне заняття № 3. Пошук розв'язку системи рівнянь, що складаються з формул алгебри множин

Приклади розв'язку задач .

Приклад 1.3.1. Дано множини A, B, C, D з однієї універсальної множини U. Відомо, що A та B знаходяться у загальному положенні, D=A$\cap$B, C$\subset$B, C$\cap$A=$\varnothing$, C$\cap$D=$\varnothing$. Необхідно вирішити систему рівнянь $\begin{cases} A = (C \cap D) \cup (B \cap C); \\ C = (A \cup B) \cap (A \cup C); \\ D \cap A = A \cap B \cup C \end{cases}$, використовуючи закони та тотожності алгебри множин.

Розв'язок. Рішенням кожного з рівнянь системи є множина – область перетину множин, які розташовані по обидві сторони символу '=', тобто, щоб знайти множину – розв'язок кожного з рівнянь необхідно виконати операцію перетину між лівою та правою частинами кожного з рівнянь.

$$\begin{cases} A = (C \cap D) \cup (B \cap \overline{C}); & \Rightarrow A \cap ((C \cap D) \cup (B \cap \overline{C})) \\ \overline{C} = (A \cup B) \cap (A \cup C); & \Rightarrow \overline{C} \cap ((A \cup B) \cap (A \cup C)) \\ D \cap A = A \cap B \cup C & \Rightarrow (D \cap A) \cap (A \cap B \cup C) \end{cases}$$

Далі, для пошуку множини – розв’язку усієї системи, необхідно знайти загальні рішення між множинами – розв’язками кожного з рівнянь, тобто виконати операцію перетину між множинами – розв’язками. Але, до того як перетнути розв’язки кожного з рівнянь, записані у вигляді формул, є сенс виконати спрощення формул, взявши до уваги початкове описання взаємного зв’язку між множинами.

$$\begin{cases} A \cap ((C \cap D) \cup (B \cap \overline{C})) = A \cap (\varnothing \cup (B \cap \overline{C})) = A \cap (B \cap \overline{C}) = D \cap \overline{C} = D \\ \overline{C} \cap ((A \cup B) \cap (A \cup C)) = \overline{C} \cap (A \cup (B \cap C)) = \overline{C} \cap (A \cup C) = A \\ (D \cap A) \cap (A \cap B \cup C) = D \cap (D \cup C) = D \end{cases}.$$

Отже, залишилось виконати перетин між отриманими множинами:

$D \cap A \cap D$= { D=A∩B , тобто D⊂A і D∩A= D } = D.

Відповідь: рішенням системи є множина D.

Примітка: з розглянутого прикладу слідує така методика вирішення систем рівнянь на основі множин:

а) у кожному рівнянні операцію рівності замінюємо операцією перетину, враховуючи, що ліва і права частина рівняння є суцільними множинами;

б) знаходимо рішення кожного з рівнянь;

в) виконуємо операцію перетину між множинами - рішеннями кожного з рівнянь.

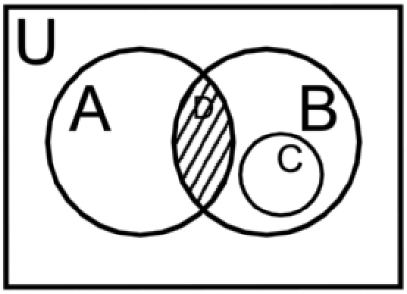
Приклад 1.3.2. Знайти рішення системи рівнянь з *прикладу 1.3.1.* за допомогою діаграм Ейлера – Венна.

Розв’язок. За основу для вирішення системи графічним методом візьмемо отримані формули після заміни операції рівності на операцію перетину.

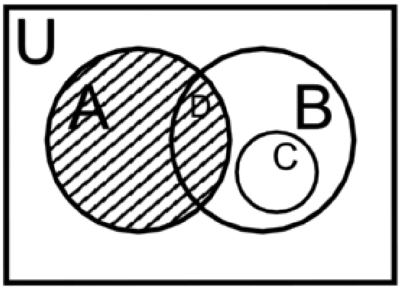
$$\begin{cases} A \cap ((C \cap D) \cup (B \cap \overline{C})); \\ \overline{C} \cap ((A \cup B) \cap (A \cup C)); \\ (D \cap A) \cap (A \cap B \cup C). \end{cases}$$

Побудуємо діаграми Ейлера – Венна для кожної з формул системи наступним чином: на загальній діаграмі для множин U, A, B, C, D заштрихуємо область, яку описано відповідною формулою кожного з рівнянь.

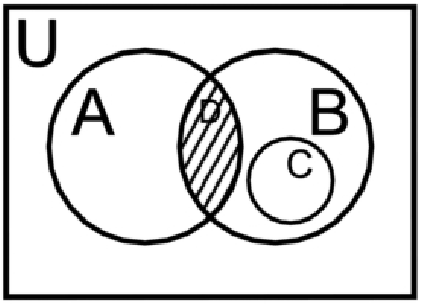
1.



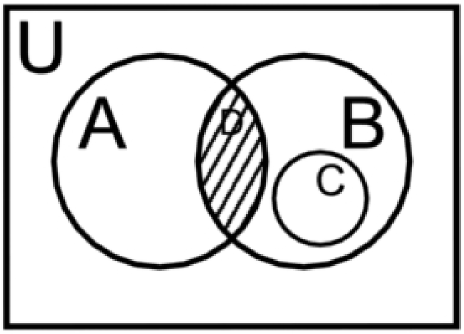
2.



3.



Проаналізувавши отримані діаграми, заштрихуємо на результуючій діаграмі область, заштриховану на усіх створених діаграмах без винятку. Ця область і є множиною – рішенням усієї системи рівнянь.



Приклад 1.3.3. Задано множини A, B, C, D , що знаходяться в загальному положенні. Необхідно за допомогою діаграм Ейлера-Венна знайти рішення системи рівнянь.

$$\begin{cases} A = B \cap \overline{C} \cup A \\ C \cap \overline{D} = \varnothing \\ A \cup \overline{C} = \overline{B \cap D} \\ C = (A \cup B) \cap (\overline{D \cap \varnothing}) \end{cases}$$

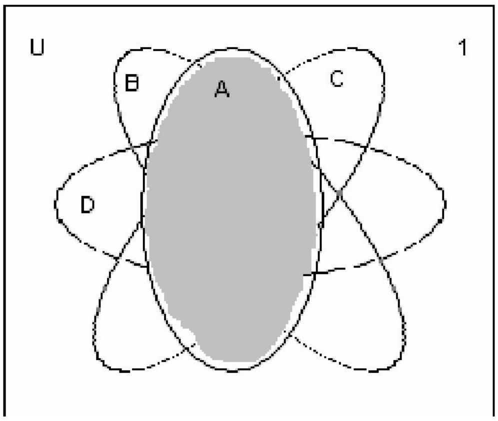
Розв'язок. В кожному з рівнянь операцію '=' замінюємо операцією перетину множин і виконуємо можливі перетворення з ціллю зменшення формул.

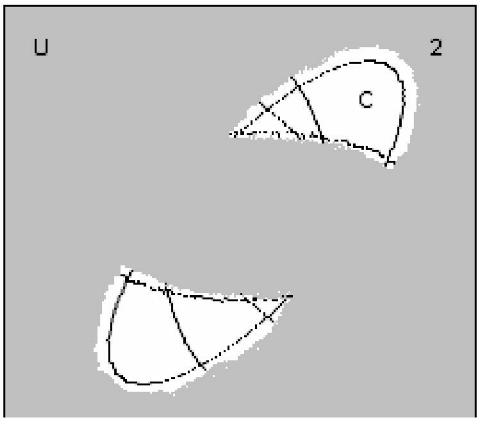
$$\begin{cases} A = B \cap \overline{C} \cup A \Rightarrow A \cap \left(\left(B \cap \overline{C}\right) \cup A\right) = \left\{A \subset \left(B \cap \overline{C}\right) \cup A\right\} = A \\ C \cap \overline{D} = \varnothing \qquad \Rightarrow \overline{C \cap \overline{D}} \cap \overline{\varnothing} = \overline{C \cap \overline{D}} \\ A \cup \overline{C} = \overline{B \cap D} \Rightarrow \left(A \cup \overline{C}\right) \cap \overline{B \cap D} = \left(A \cup \overline{C}\right) \setminus \left(B \cap D\right) \\ C = (A \cup B) \cap (\overline{D \cap \varnothing}) \Rightarrow C \cap \left((A \cup B) \cap (\overline{D \cap \varnothing}\right) = C \cap (A \cup B) \cap \overline{\varnothing} = C \cap (A \cup B) \end{cases}$$

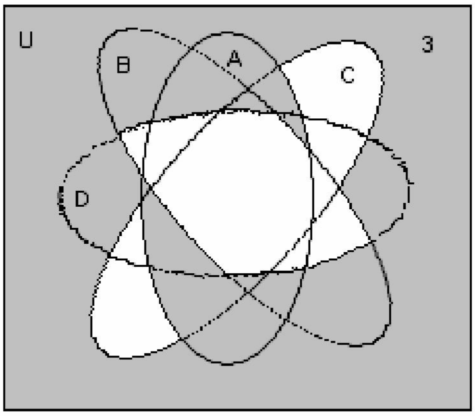
або

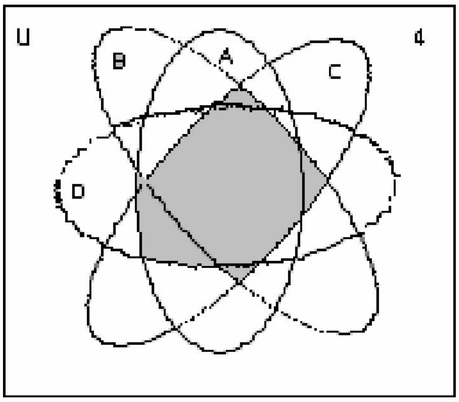
$$\begin{cases} A \\ \overline{C \cap \overline{D}} \\ \left(A \cup \overline{C}\right) \setminus \left(B \cap D\right) \\ C \cap (A \cup B) \end{cases}.$$

Для кожного з рівнянь будуємо діаграму, на якій зображені чотири множини у загальному відношенні, і маркуємо область множини, яку описує рівняння після перетворення.

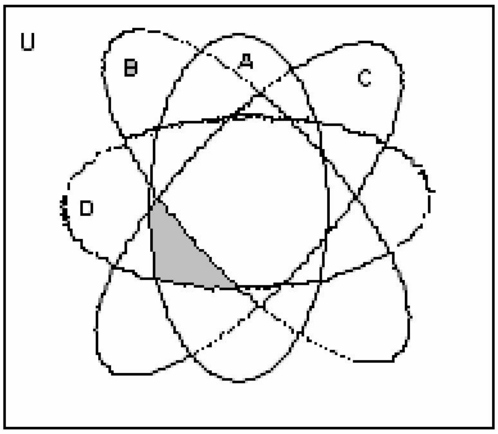








Будуємо підсумкову діаграму, на якій маркована область перетину усіх створених діаграм (маркованих областей діаграм).



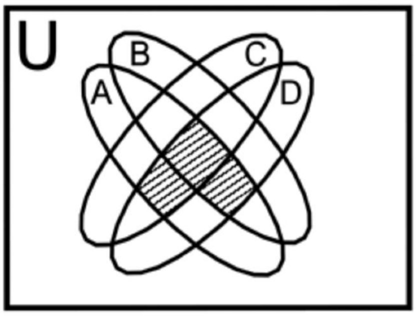
Приклад 1.3.4. Задано множини A, B, C, D , що знаходяться в загальному положенні. Необхідно за допомогою діаграм Ейлера-Венна знайти рішення системи рівнянь.

$$\begin{cases} A=(B\cup C)\cap D; \\ U=(A\cup D)\cap C\cap \overline{\varnothing}; \\ B=A\cup C\cup \varnothing; \\ B\cup A=A\cup D\cup C\cup B. \end{cases}$$

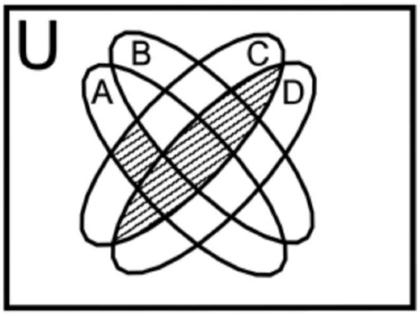
Розв'язок. Виконуємо описані дії у *прикладі 1.3.3.* А саме, виконуємо спрощення рівнянь та будуємо заштриховану область - рішення на кожній з діаграм.

$$
\begin{cases}
A = (B \cup C) \cap D; \Rightarrow A \cap ((B \cup C) \cap D) \\
U = (A \cup D) \cap C \cap \overline{\varnothing}; \Rightarrow U \cap ((A \cup D) \cap C \cap \overline{\varnothing}) = (A \cup D) \cap C \cap U = (A \cup D) \cap C \\
B = A \cup C \cup \varnothing; \Rightarrow B \cap (A \cup C \cup \varnothing) = B \cap (A \cup C) \\
B \cup A = A \cup D \cup C \cup B \Rightarrow (B \cup A) \cap (A \cup D \cup C \cup B) = B \cup A
\end{cases}
$$

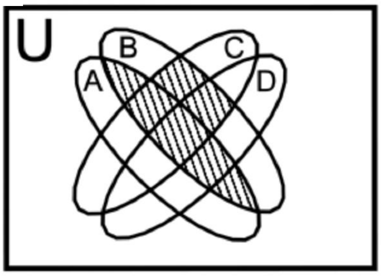
1



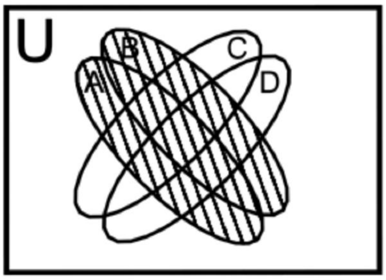
2



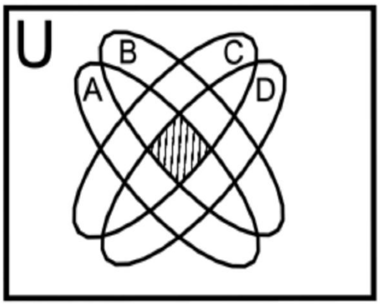
3



4



Тоді розв’язком системи є множина, зображена на п’ятій діаграмі.



Завдання для самостійного опрацювання

1. Відомо, що множини A та B знаходяться у загальних відношеннях, $C \subset A \cap B$. Побудуйте діаграму Ейлера-Венна для множин U, A, B, C. Аналітично знайдіть рішення системи рівнянь, результат нанесіть на діаграму
$$\begin{cases} A \cap B = C \cup A \\ A \cap B \cap C = \varnothing \\ (C \cap A) \cup (C \cap \overline{B}) = U \end{cases}.$$

2. Задано універсальну множину U={1, 2,…,50} та три підмножини універсальної множини A={ ai: ai=5*i}, B={bj: bj=6*j}, C={ck: ck=7*k}. Підрахуйте кількість елементів множини F, яка є рішенням системи
$$\begin{cases} (A \cap C) \cup (A \cap \overline{B}) = C \\ A = (B \cup A) \cap \overline{(B \cap C)} \cap \overline{\overline{B} \cup \overline{C}} \\ A \cap B = C \cup \varnothing \end{cases}.$$

3. Задано множини A, B, C, D з однієї універсальної множини. Відомо, що $A \subset B$, $C \subset D$, $A \cap C = \varnothing$, B і D B і C A і D знаходяться у загальних відношеннях. За допомогою діаграм Ейлера-Венна знайдіть рішення системи рівнянь
$$\begin{cases} \overline{A} = B \cap (C \cup D) \\ A \cup C = B \cup D \\ D = D \cup A \cup B \end{cases}$$

4. Задано множини A, B, C, D з однієї універсальної множини. Відомо, що $A \subseteq B$, $C \subseteq D$, $A \cap C = \varnothing$, B і D B і C A і D знаходяться у загальних відношеннях. За допомогою діаграм Ейлера-Венна знайдіть рішення системи рівнянь
$$\begin{cases} \overline{A \cap C} = (B \cup D) \cap A \\ A \cap (C \cup D) = B \\ \overline{C} = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$$

5. Задано множини A, B, C, D , що знаходяться в загальному положенні. Необхідно за допомогою діаграм Ейлера-Венна знайти рішення системи

рівнянь.

а) $\begin{cases} C = D \cup A \cup B \\ A \cap \overline{B} = \varnothing \\ \overline{A \cup B} \cup \overline{A \cup C} = D \\ A \cup B = B \cup C \cup D \end{cases}$; б) $\begin{cases} C = D \cup A \cup B \\ A \cap \overline{B} = D \\ \overline{A \cup B} \cup \overline{A \cup C} = D \\ A \cup B = B \cup C \cup D \end{cases}$ в) $\begin{cases} C = D \cup A \cap B \\ B \cap C = D \cup \varnothing \\ (A \cap B) \cup (B \cap C) = \varnothing \\ U = B \cap C \end{cases}$.

Тестові питання для самоперевірки

2. ТЕОРІЯ ГРАФІВ

Практичне заняття № 4. Способи уявлення графів. Підрахунок характеристик графа (цикломатичне та хроматичне числа)

Короткі теоретичні відомості.

Графом назвемо деяку множину точок площини X, що називаються вершинами, і множину спрямованих відрізків U, що з'єднують усі або деякі з вершин, названих дугами. Математичне визначення графа:

1) граф G - це пара множин X и U, G = (X,U);

2) граф G - це пара множин (X, Г), що складаються із множини вершин X й відображення Г, заданого на цій множині : G=(X, Г). Дане визначення збігається з визначенням відношення на множині.

Матриця R = || rij || порядку n×n називається матрицею суміжностей, де $r_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо вершина } i \text{ суміжна з вершиною } j; \\ 0, & \text{у іншому випадку}. \end{cases}$ Якщо кожній дузі приписати вагу, то можна скласти матрицю ваги C = || cij || порядку n×n, де

$$c_{ij} = \begin{cases} \text{вага дуги}, & \text{якщо вершина } i \text{ суміжна з вершиною } j; \\ \infty, & \text{у іншому випадку}. \end{cases}$$

Матриця S = || sij || порядку n×m називається матрицею інциденцій, де

$$s_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{якщо дуга } u_{ij} \text{ виходить з } x_i \text{ ;} \\ -1, & \text{якщо дуга } u_{ij} \text{ заходить в } x_i \text{ ;} \\ 0, & \text{у іншому випадку.} \end{cases}$$

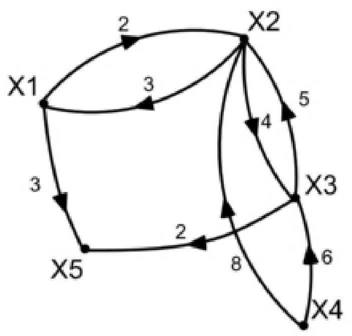
Слід зазначити, що у вигляді матриці інциденцій можна представити тільки орієнтований граф без петель.

Цикломатичне число. Нехай G – неорієнтований граф, який має n вершин, m ребер та r компонент зв`язності. Цикломатичним числом графа G називається число ν(G) = m - n + r. Цикломатичне число не може бути негативним і дорівнює нулю тільки в тому випадку, якщо граф не має циклів. Фізичний зміст: ν(G) дорівнює найбільшому числу незалежних циклів графа.

Хроматичне число. Граф G називається p – хроматичним, якщо його вершини можна замалювати p різними кольорами так, щоб ніякі дві суміжні вершини графа не було замальовано одним кольором. Найменше число p, при якому граф є p – хроматичним, називається хроматичним числом і позначається γ(G).

Приклади розв'язку задач .

Приклад 2.1.1. Задано граф у графічному вигляді.



Необхідно представити граф за допомогою відображення вершин та у вигляді матриць: суміжності, суміжності ваг, інциденцій.

Розв'язок. Представимо даний граф за допомогою прямого і зворотного відображення вершин, враховуючи, що відображенням вершини x1 $Г_{x1}$ є множина усіх вершин до яких приходить дуга з вершини x_1 , тобто, $\{x_2, x_5\}$, а зворотним відображенням вершини x_1 $Г_{x1}^{-1}$ є множина усіх вершин з яких дуги виходять і прибувають у вершину x_1, тобто, $\{x_2\}$.

$Г_{x2}=\{x_1, x_3\}$ $\qquad$ $Г_{x2}^{-1}=\{x_1, x_3, x4\}$

$\Gamma_{x3}=\{x_2, x_5\}$ $\Gamma_{x3}^{-1}=\{x_2, x_4\}$

$\Gamma_{x4}=\{x_3, x_2\}$ $\Gamma_{x4}^{-1}=\varnothing$

$\Gamma_{x5}=\varnothing$ $\Gamma_{x5}^{-1}=\{x_1, x_3\}$

Матриця суміжності даного графа має вигляд:

кінцева вершина / *вершина відправлення*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	0	1	0	0	1
x_2	1	0	1	0	0
x_3	0	1	0	0	1
x_4	0	1	1	0	0
x_5	0	0	0	0	0

.

Матриця суміжності ваг даного графа має вигляд:

кінцева вершина / *вершина відправлення*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	∞	1	∞	∞	3
x_2	3	∞	4	∞	∞
x_3	∞	5	∞	∞	2
x_4	∞	8	6	∞	∞
x_5	∞	∞	∞	∞	∞

.

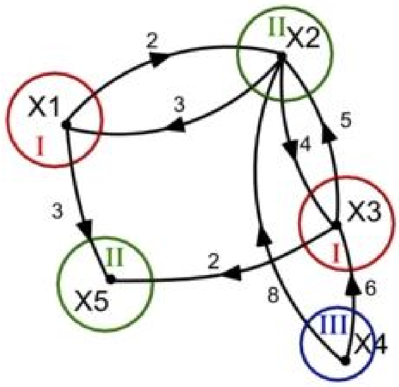
Матриця інциденцій графа має вигляд:

дуга / *вершина*	u_{12}	u_{15}	u_{21}	u_{23}	u_{32}	u_{35}	u_{42}	u_{43}
x_1	1	1	-1	0	0	0	0	0
x_2	-1	0	1	1	-1	0	-1	0
x_3	0	0	0	-1	1	1	0	-1
x_4	0	0	0	0	0	0	1	1
x_5	0	-1	0	0	0	-1	0	0

.

Приклад 2.1.2. Знайти хроматичне число графа з попереднього прикладу.

Розв'язок. Візьмемо за основу подальших досліджень графічне зображення графу та розфарбуємо його вершини так, щоб дві суміжні не мали один і той же колір. При фарбуванні будемо використовувати як найменшу кількість кольорів.



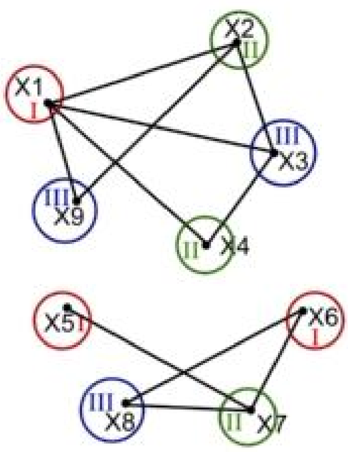
Як бачимо з малюнка, для описанного способу фарбування графа ми застосували три кольори. Зменшити кількість кольорів не можливо, тобто хроматичне число графа дорівнює трьом $\gamma(G)=3$.

Приклад 2.1.3. Граф задано у вигляді матриці суміжності:

кінцева вершина / *вершина відправлення*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_1	0	1	1	1	0	0	0	0	1
x_2	1	0	1	0	0	0	0	0	1
x_3	1	1	0	1	0	0	0	0	0
x_4	1	0	1	0	0	0	0	0	0
x_5	0	0	0	0	0	0	1	0	0
x_6	0	0	0	0	0	0	1	1	0
x_7	0	0	0	0	1	1	0	1	0
x_8	0	0	0	0	0	1	1	0	0
x_9	1	1	0	0	0	0	0	0	0

Знайдіть цикломатичне та хроматичне числа графу.

Розв'язок. Представимо граф у графічному вигляді. Як видно з малюнка даний



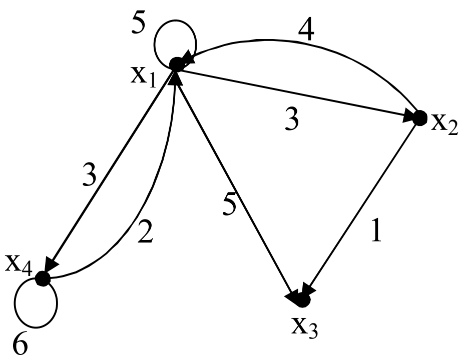
неорієнтований граф не зв'язний і складається з двох зв'язних підграфів. Тому число компонент зв'язності графу $r = 2$. Граф складається з 9 вершин ($n = 9$)та 11 ребер ($m = 11$). Тоді цикломатичне число графа $v(G)=m\text{-}n+r=11\text{-}9+2=4$.

Розфарбуємо вершини графа,

використовуючи принцип розфарбування з попереднього прикладу. Як бачимо з малюнка, мінімальна кількість кольорів фарбування дорівнює 3, тому хроматичне число графа $\gamma(G)=3$.

Завдання для самостійного опрацювання

1. Граф задано графічно



Представте граф у вигляді матриць суміжності, суміжності ваг, інциденцій. Побудуйте пряме та зворотнє відображення вершин графа.

2. Граф задано за допомогою матриці суміжності

кінцева вершина / *вершина відправлення*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9
x_1	0	1	0	1	0	0	0	0	1
x_2	1	0	0	1	0	0	0	1	1
x_3	0	0	0	1	0	0	0	0	0
x_4	1	1	1	0	0	0	0	0	0
x_5	0	0	0	0	0	0	1	1	0
x_6	0	0	0	0	0	0	1	1	0
x_7	0	0	0	0	1	1	0	1	0
x_8	0	1	0	0	1	1	1	0	1
x_9	1	1	0	0	0	0	0	1	0

. Представте граф графічно. Знайдіть хроматичне та цикломатичне числа графа.

3. Граф задано за допомогою матриці суміжності ваг

кінцева вершина / *вершина відправлення*	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
x_1	∞	1	∞	∞	3
x_2	∞	∞	14	45	5
x_3	∞	5	10	∞	2
x_4	∞	1	6	∞	∞
x_5	∞	∞	2	∞	1

. Представте граф графічно, у

вигляді матриці інциденцій та за допомогою відображення вершин. Знайдіть хроматичне число графа.

4. Граф задано у вигляді відображення вершин: $Г_{x1}$={x2, x3}, $Г_{x2}$={x1, x3}, $Г_{x3}$={x1, x2}, $Г_{x4}$={x5}, $Г_{x5}$={x4, x6}, $Г_{x6}$={x3, x4, x5}, $Г_{x7}$={x8, x9,x10}, $Г_{x8}$={x7, x9, x10}, $Г_{x9}$={x7, x8, x10}, $Г_{x10}$={x7, x8, x9}.Представте граф у графічному вигляді. Знайдіть цикломатичне та хроматичне числа графа.

Тестові питання для самоперевірки

1. Дві вершини графа, що пов'язані дугою чи ребром називаються

1) інцидентними

2) зв'язними

3) суміжними

4) пов'язаними

2. Оберіть вірні твердження про цикломатичне число графа.

1) Дорівнює числу кольорів, у які необхідно так розфарбувати вершини графа, щоб дві суміжні не були пофарбовані у один колір.

2) Допомогає знайти найкоротший шлях між довільними двома вершинами графа.

3) Показує число простих контурів на графі.

4) Допомогає знайти найкоротшу відстань між двома обраними вершинами графа.

3. Граф можна представити за допомогою (2 варіанти)

1) матриці суміжності ваг

2) матриці суміжності ланцюгів

3) матриці зв'язності графа

4) задання відображення його вершин

4. Дві вершини графа, між яким можна задати шлях або ланцюг називаються

1) суміжними

2) ланцюговими

3) зв'язними

4) інцидентними

5. Граф, у якого вершини пов’язані направленими відрізками, називається

1) напрямленим

2) орієнтованим

3) дуговим

4) базовим

Практичне заняття № 5. Вирішення задачі пошуку найкоротшого шляху за алгоритмом Дейкстри

Короткі теоретичні відомості.

Алгорит Дейкстри є «машинною» інтерпритацією метода Форда, тому ми можемо рахувати його індексним методом. Сам алгоритм базується на перетвореннях елементів трьох векторів A, B, D з урахуванням матриці суміжності ваг C.

Суть алгоритму.

1. Нехай:

C – матриця суміжності ваг вихідного графа;

зафіксовано вершину графа k;

A- логічний вектор, елемент a_i=1, якщо вершина x_i розглянута (на початку це вершина відправлення xk) і a_i=0, якщо вершина не розглянута;

B- поточне значення індексів вершин графа, тобто довжина найкоротших шляхів між вершинами x_k та x_i (на початку елементи вектора B відповідають k-тому рядку матриці C, за винятком елемента $в_k$, який дорівнює 0);

D- містить номери попередніх вершин,тобто d_i – номер вершини, яка стоїть перед і-ю у найкоротшому шляху в і-ту вершину(на початку всі елементи d_i=k, оскільки фіксованою є вершина x_k і її номер дорівнює k).

2. Основний етап. Виконуємо перерахунок елементів векторів A, B, D наступним чином:

а) серед елементів вектора В, які відповідають нульовим елементам вектора А обираємо найменший, нехай це елемент $в_i$;

б) вершина *і* рахується розглянутою, виконується перерахунок j-х елементів векторів В і D для нерозглянутих вершин ($a_j = 0$) за правилом: якщо $b_j > b_i + c_{ij}$, то $b_j = b_i + c_{ij}$, $d_j = i$;

3. Основний етап слід повторювати до тих пір поки усі вершини графа не будуть розглянутими (при ручному перерахунку допускається лише одна не розглянута вершина, оскільки немає сенсу обирати мінімальний елемент із одного значення).
4. Елементи вектора В містять найкоротші відстані із фіксованої вершини графа до відповідної, а елементи вектора С допомагають побудувати шляхи, довжина яких відповідає значеннім вектора В.

Приклади розв'язку задач .

Приклад 2.3.1. Задано граф за допомогою матриці суміжності ваг

$$C = \begin{pmatrix} \infty & 4 & 15 & 9 & \infty & \infty & 1 & \infty \\ 14 & \infty & 1 & 5 & \infty & 2 & 12 & \infty \\ 1 & 2 & \infty & 8 & \infty & \infty & 11 & \infty \\ \infty & 5 & 8 & \infty & 5 & \infty & \infty & \infty \\ 5 & \infty & \infty & \infty & \infty & 8 & 3 & \infty \\ \infty & 2 & \infty & \infty & 8 & \infty & 10 & 15 \\ 2 & 54 & 1 & \infty & 13 & 10 & \infty & 2 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 15 & 2 & \infty \end{pmatrix}.$$ Знайдіть найкоротші шляхи з вершини графа x_5 до інших вершин графа.

Розв'язок. Формуємо вектора А, В, D:

i	1	2	3	4	5	6	7	8
A_i	0	0	0	0	1	0	0	0
B_i	5	∞	∞	∞	0	8	**<u>3</u>**	∞
D_i	5	5	5	5	0	5	5	5

Вершина x_5 зафіксована тому усі елементи вектора А крім 5-го дорівнюють 0, вектор В – це 5-й рядок матриці D крім $в_5$, який дорівнює 0. Елементи вектора D, крім $d_5 = 0$, дорівнюють номеру єдиної розглянутої вершини, тобто 5. Обираємо серед елементів вектора В (значення $в_5$ не враховується). Це елемент $в_7$. Вершина x_7 вважається розглянутою.

Перераховуємо вектора A, B, D згідно алгоритму, який описано раніше.

i	1	2	3	4	5	6	7	8
A_i	0	0	0	0	1	0	1	0
B_i	5	57	**4**	∞	0	8	3	5
D_i	5	7	7	5	0	5	5	7
A_i	0	0	1	0	1	0	1	0
B_i	**5**	6	4	12	0	8	3	5
D_i	5	3	7	3	0	5	5	7
A_i	1	0	1	0	1	0	1	0
B_i	5	6	4	12	0	8	3	**5**
D_i	5	3	7	3	0	5	5	7
A_i	1	0	1	0	1	0	1	1
B_i	5	**6**	4	12	0	8	3	**5**
D_i	5	3	7	3	0	5	5	7
A_i	1	1	1	0	1	0	1	1
B_i	5	6	4	11	0	**8**	3	**5**
D_i	5	3	7	2	0	5	5	7
A_i	1	1	1	0	1	1	1	1
B_i	5	6	4	11	0	8	3	**5**
D_i	5	3	7	2	0	5	5	7

Знову серед елементів $в_i$ вибираємо найменший для нерозглянутих вершин (яким відповідає a_i=0). Це елемент $в_3$=4.Вершина 3–розглянута.

Розглянутою вважається вершина 5.

Розглянутою вважається вершина 7

Розглянутою вважається вершина 2

Розглянутою вважається вершина 2

Не розглянутою залишилась лише вершина x_4. Її вибір не змінить отриманих результатів, тобто алгоритм перерахунку завершено.

По останнім значенням елементів векторів A, B, D формуємо результати пошуку.

$$\mu(x_5 - x_1) = \{x_5, x_1\}, \quad l(\mu(x_5 - x_1)) = b_1 = 5;$$
$$\mu(x_5 - x_2) = \{x_5, x_7, x_3, x_2\}, \quad l(\mu(x_5 - x_2)) = b_2 = 6;$$
$$\mu(x_5 - x_3) = \{x_5, x_7, x_3\}, \quad l(\mu(x_5 - x_1)) = b_3 = 4;$$
Відповідь: $$\mu(x_5 - x_4) = \{x_5, x_7, x_3, x_2, x_4\}, \quad l(\mu(x_5 - x_4)) = b_4 = 11;$$
$$\mu(x_5 - x_6) = \{x_5, x_6\}, \quad l(\mu(x_5 - x_6)) = b_6 = 8;$$
$$\mu(x_5 - x_7) = \{x_5, x_7\}, \quad l(\mu(x_5 - x_7)) = b_7 = 3;$$
$$\mu(x_5 - x_8) = \{x_5, x_7, x_8\}, \quad l(\mu(x_5 - x_8)) = b_8 = 5.$$

Завдання для самостійного опрацювання

1. Граф задано матрицею суміжності ваг. Знайдіть за допомогою алгоритму Дейкстри найкоротший шлях з вершини графа x_2 до інших вершин

$$C = \begin{bmatrix} \infty & 10 & 17 & 34 & 1 & 2 \\ 3 & \infty & 20 & 15 & 23 & 4 \\ 12 & 3 & \infty & 4 & 67 & 3 \\ 12 & 4 & 54 & \infty & 5 & 76 \\ 1 & 23 & 3 & 13 & \infty & 3 \\ 34 & 4 & 9 & 10 & 1 & \infty \end{bmatrix}$$

2. Задано граф матрицею суміжності ваг $C = \begin{pmatrix} \infty & 8 & 2 & 1 & \infty \\ 8 & \infty & 3 & \infty & 1 \\ 2 & 3 & \infty & 10 & 5 \\ 1 & \infty & 10 & \infty & \infty \\ \infty & 1 & 5 & \infty & \infty \end{pmatrix}$. За допомогою алгоритму Дейкстри знайдіть найкоротші шляхи з вершини графа x_4 до інших вершин графа.

3. Задано граф матрицею суміжності ваг $C = \begin{pmatrix} \infty & 5 & 8 & \infty & 30 \\ 5 & \infty & \infty & 4 & 26 \\ 8 & \infty & \infty & 4 & 5 \\ \infty & 4 & 4 & \infty & 3 \\ 30 & 6 & 5 & 3 & \infty \end{pmatrix}$. Знайдіть найкоротший шлях з вершини графа x_1 до вершини x_5.

Тестові питання для самоперевірки

1. Задачу пошуку найкоротшого шляху на заданому графі вирішує метод:

   1) гілок та меж.

   2) Шимбела.

3) алгоритм Дейкстри.

4) метод Квайна-Мак-Класки.

2. Виберіть вірне продовження твердження: використовуючи алгоритм Дейкстри можна знайти

1) найкоротші шляхи між любими двома вершинами графа.

2) найкоротший гамільтонів контур.

3) найкоротші відстані між любими двома вершинами графа.

3) найкоротші шляхи з фіксованої вершини графа до усіх інших вершин.

3. Граф задано у вигляді матриці суміжності ваг $c = \begin{pmatrix} \infty & 3 & 1 & \infty & 1 & 12 \\ 3 & \infty & 2 & 8 & \infty & \infty \\ 1 & 2 & \infty & 2 & 4 & 8 \\ \infty & 8 & 2 & \infty & \infty & 19 \\ 1 & \infty & 4 & \infty & \infty & 5 \\ 12 & \infty & 8 & 19 & 5 & \infty \end{pmatrix}$. Для знаходження найкоротших шляхів з вершини x_2 було використано алгоритм Дейкстри. Виберіть з наведених варіантів векторів A B D ті, що слідують за

	1	2	3	4	5	6
A	0	1	1	0	0	0
B	3	0	2	4	∞	∞
D	3,2	0	2	3	2	2

1)

	1	2	3	4	5	6
A	1	1	1	0	0	0
B	3	0	2	4	4	15
D	3,2	0	2	3	1	1

2)

	1	2	3	4	5	6
A	0	1	1	1	0	0
B	3	0	2	4	∞	23
D	3,2	0	2	3	2	4

3)

	1	2	3	4	5	6
A	1	1	1	1	0	0
B	3	0	2	4	6	23
D	3,2	0	2	3	1	4

Практичне заняття № 6. Вирішення задачі пошуку найкоротших відстаней між довільними двома вершинами графа за методом Шимбела

Короткі теоретичні відомості.

Метод Шимбела відносять до матричних методів, тобто до методів у основу яких покладено пошук розв’язку шляхом перетворень матриці суміжності ваг даного графа. Але на відміну від методів Форда та алгоритму Дейкстри, за методом Шимбела можна знайти найкоротші довжини між довільними двома вершинами графа та не можливо знайти шляхи, які відповідають знайденим довжинам. Перелік вершин для найкоротших шляхів губиться у ході перерахунку матриць.

За методом Шимбела необхідно виконувати зведення матриці до ступеню з перетворенням основних операцій множення елементів та додавання отриманих добутків наступним чином:

операція множення двох елементів a и b при зведенні матриці у ступінь відповідає їхній алгебраїчній сумі, тобто a+b=b+a заміняємо на a·b=b·a;

сума двох елементів при звичайному зведенні матриці у ступінь замінюється вибором мінімального елементу, тобто a+b=min(a, b).

У якості основної матриці для перетворень необхідно узяти представлення графу за допомогою матриці суміжності ваг, у якої по діагоналі занесені нулі.

Тобто для отримання матриці A у другому ступіні по Шимбелу необхідно виконати наступні дії:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & 0 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a'_{12} & a'_{13} \\ a'_{21} & 0 & a'_{23} \\ a'_{31} & a'_{32} & 0 \end{pmatrix}$$

де

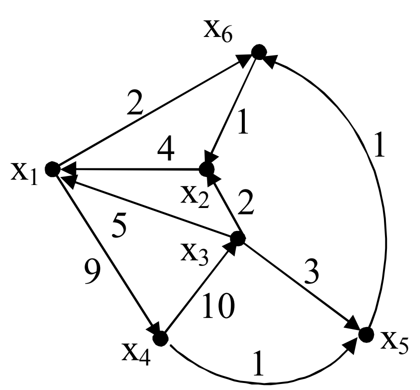
$$\begin{aligned} a'_{12} &= \min\{0 + a_{12}; a_{12} + 0; a_{13} + a_{32}\}; \\ a'_{13} &= \min\{0 + a_{13}; a_{12} + a_{23}; a_{13} + 0\}; \\ a'_{21} &= \min\{a_{21} + 0; 0 + a_{21}; a_{23} + a_{31}\}; \\ a'_{23} &= \min\{a_{21} + a_{13}; 0 + a_{23}; a_{23} + 0\}; \\ a'_{31} &= \min\{a_{31} + 0; a_{32} + a_{21}; 0 + a_{31}\}; \\ a'_{32} &= \min\{a_{31} + a_{12}; a_{32} + 0; 0 + a_{32}\}. \end{aligned}$$

За допомогою зазначених операцій, довжини найкоротших шляхів між вузлами мережі визначаються зведенням матриці суміжності ваг у ступінь. Причому елементи матриці A^t визначають довжини найкоротших шляхів (ланцюгів), що складаються не більш ніж із t дуг (ребер). Якщо в процесі множення виявиться, що $A^{t-1}=A^t$, то це говорить про те, що довжини мінімальних шляхів (між будь-якими двома вершинами графа), що складаються не більш ніж із t-1 дуг (ребер), збігаються з довжинами шляхів (ланцюгів), що складаються не більш ніж із t дуг (ребер). Отже, подальше множення матриць немає сенсу, тому що не приводить до зміни елементів матриці A^{t-1}, і довжини найкоротших шляхів об'єднано у матрицію A^{t-1}.

Приклади розв'язку задач .

Приклад 2.4.1. Задано орієнтований граф графічно. Необхідно знайти найкоротші відстані між довільними двома вершинами графа.

Розв'язок. Представимо граф у вигляді матриці суміжності ваг



	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	∞	∞	∞	9	∞	2
x_2	4	∞	∞	∞	∞	∞
x_3	5	2	∞	∞	3	∞
x_4	∞	∞	10	∞	1	∞
x_5	∞	∞	∞	∞	∞	1
x_6	∞	1	∞	∞	∞	∞

Елементи головної діагоналі матриці незалежно від їх значень замінюємо на нуль, отриману матрицю A обираємо за основу перетворень.

A	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x_1	0	∞	∞	9	∞	2
x_2	4	0	∞	∞	∞	∞
x_3	5	2	0	∞	3	∞
x_4	∞	∞	10	0	1	∞
x_5	∞	∞	∞	∞	0	1
x_6	∞	1	∞	∞	∞	0

Далі починаємо піднесення матриці до ступеню.

A^2=A·A=

$$\begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & 9 & \infty & 2 \\ 4 & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 5 & 2 & 0 & \infty & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 10 & 0 & 1 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 1 \\ \infty & 1 & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & 9 & \infty & 2 \\ 4 & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 5 & 2 & 0 & \infty & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 10 & 0 & 1 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 1 \\ \infty & 1 & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 19 & 9 & 10 & 2 \\ 4 & 0 & \infty & 13 & \infty & 6 \\ 5 & 2 & 0 & 14 & 3 & 4 \\ 15 & 12 & 10 & 0 & 1 & 2 \\ \infty & 2 & \infty & \infty & 0 & 1 \\ 5 & 1 & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

Порівнюємо елементи матриць A та A^2. Як видно елементи матриць не співпадають, тому виконуємо піднесення матриці до третього ступеню.

A^3=A·A^2=

$$\begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & 9 & \infty & 2 \\ 4 & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 5 & 2 & 0 & \infty & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 10 & 0 & 1 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 1 \\ \infty & 1 & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 19 & 9 & 10 & 2 \\ 4 & 0 & \infty & 13 & \infty & 6 \\ 5 & 2 & 0 & 14 & 3 & 4 \\ 15 & 12 & 10 & 0 & 1 & 2 \\ \infty & 2 & \infty & \infty & 0 & 1 \\ 5 & 1 & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 19 & 9 & 10 & 2 \\ 4 & 0 & 23 & 13 & 14 & 6 \\ 5 & 2 & 0 & 14 & 3 & 4 \\ 15 & 12 & 10 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & \infty & \infty & 0 & 1 \\ 5 & 1 & \infty & 14 & \infty & 0 \end{pmatrix}$$

A^4=A·A^3=A^2·A^2=

$$\begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & 9 & \infty & 2 \\ 4 & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 5 & 2 & 0 & \infty & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 10 & 0 & 1 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 1 \\ \infty & 1 & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 19 & 9 & 10 & 2 \\ 4 & 0 & 23 & 13 & 14 & 6 \\ 5 & 2 & 0 & 14 & 3 & 4 \\ 15 & 12 & 10 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & \infty & \infty & 0 & 1 \\ 5 & 1 & \infty & 14 & \infty & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 19 & 9 & 10 & 2 \\ 4 & 0 & 23 & 13 & 14 & 6 \\ 5 & 2 & 0 & 14 & 3 & 4 \\ 7 & 3 & 10 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & \infty & 15 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 24 & 14 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

A^5=A·A^4=A^2·A^3=

$$\begin{pmatrix} 0 & \infty & \infty & 9 & \infty & 2 \\ 4 & 0 & \infty & \infty & \infty & \infty \\ 5 & 2 & 0 & \infty & 3 & \infty \\ \infty & \infty & 10 & 0 & 1 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 0 & 1 \\ \infty & 1 & \infty & \infty & \infty & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 19 & 9 & 10 & 2 \\ 4 & 0 & 23 & 13 & 14 & 6 \\ 5 & 2 & 0 & 14 & 3 & 4 \\ 7 & 3 & 10 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & \infty & 15 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 24 & 14 & 15 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 19 & 9 & 10 & 2 \\ 4 & 0 & 23 & 13 & 14 & 6 \\ 5 & 2 & 0 & 14 & 3 & 4 \\ 7 & 3 & 10 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 2 & \infty & 15 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 24 & 14 & 15 & 0 \end{pmatrix}$$

Матриці A^4 та A^5 співпадають.

Відповідь: результуючою матрицею коротких відстаней вважаємо матрицю A^4. Ступінь матриці указує, що кожен короткий шлях складається не більш ніж з 4-х дуг.

Приклад 2.4.1. Задано неорієнтований граф у вигляді матриці суміжності ваг $\begin{pmatrix} \infty & 3 & \infty & 24 & 1 \\ 3 & \infty & \infty & 39 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 2 \\ 24 & 39 & \infty & \infty & 1 \\ 1 & \infty & 2 & 1 & \infty \end{pmatrix}$. Знайдіть найкоротші відстані між кожними двома вершинами графа.

Розв'язок. Як відомо, матриця суміжності або матриця суміжності неорієнтованого графа симетрична. Ця властивість не зникає при піднесенні матриці до ступеню, тому достатньо виконувати перетворення лише з елементами , які розташовані вище головної діагоналі або з елементами, які розташовані лише нижче головної діагоналі матриці і переносити отримані результати симетрично вверх або вниз.

Елементи головної діагоналі матриці незалежно від їх значень замінюємо на нуль, отриману матрицю А обираємо за основу перетворень.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & \infty & 24 & 1 \\ 3 & 0 & \infty & 39 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 2 \\ 24 & 39 & \infty & 0 & 1 \\ 1 & \infty & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Далі починаємо піднесення матриці до ступеню.

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & \infty & 24 & 1 \\ 3 & 0 & \infty & 39 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 2 \\ 24 & 39 & \infty & 0 & 1 \\ 1 & \infty & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & \infty & 24 & 1 \\ 3 & 0 & \infty & 39 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 2 \\ 24 & 39 & \infty & 0 & 1 \\ 1 & \infty & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A \cdot A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 3 & \infty & 24 & 1 \\ 3 & 0 & \infty & 39 & \infty \\ \infty & \infty & 0 & \infty & 2 \\ 24 & 39 & \infty & 0 & 1 \\ 1 & \infty & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 6 & 0 & 3 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Матриці A^2 та A^3 співпадають.

Відповідь: результуючою матрицею коротких відстаней вважаємо матрицю A^2. Ступінь матриці указує, що кожен короткий шлях складається не більш ніж з 2-х дуг.

Завдання для самостійного опрацювання

1. Задано граф за допомогою матриці суміжності ваг $\begin{pmatrix} \infty & 5 & 10 & \infty & 20 \\ \infty & \infty & 1 & 10 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 2 & 11 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & 1 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$.

   Конкретизуйте тип заданого графу та знайдіть найкоротші відстані між двома довільними вершинами графа.

2. Задано граф у вигляді матриці суміжності ваг $\begin{pmatrix} \infty & \infty & \infty & 9 & 2 \\ 3 & \infty & \infty & 3 & \infty \\ \infty & \infty & \infty & 14 & 2 \\ \infty & 39 & \infty & \infty & 1 \\ 1 & \infty & 21 & 1 & \infty \end{pmatrix}$.

   Конкретизуйте тип заданого графу та знайдіть найкоротші відстані між двома довільними вершинами графа.

3. Задано граф матрицею суміжності ваг $C = \begin{pmatrix} \infty & 6 & 7 & 1 & 20 & \infty \\ \infty & \infty & 3 & 2 & 2 & \infty \\ 7 & 3 & \infty & 6 & \infty & 20 \\ 1 & 2 & 6 & \infty & 6 & 4 \\ 1 & 2 & \infty & 16 & \infty & 5 \\ \infty & \infty & 20 & 40 & 5 & \infty \end{pmatrix}$. Знайдіть найкоротші відстані між будь якими двома вершинами, враховуючи, що любий найкоротший шлях між вершинами створено не більше ніж з двох дуг або ребер.

Тестові питання для самоперевірки

1. Метод Шимбела дозволяє знайти

   1) Найкоротший гамільтонів контур

   2) Найкоротшу відстань між фіксованою вершиною та названою.

   3) Найкоротший шлях між вершинами графа.

   4) Найкоротші відстані між будь-якими двома вершинами графа.

2. Ступінь матриці найкоротших відстаней показує

   1) довжину найкоротшого шляху у матриці.

   2) максимальне число вершин у любому з найкоротших шляхів.

   3) максимальне число дуг між двома довільними вершинами графа.

   4)максимальне число дуг у довільному з найкоротших шляхів.

3. Граф задано у вигляді матриці суміжності ваг $c = \begin{pmatrix} \infty & \infty & 1 & 20 \\ 2 & \infty & 15 & 8 \\ 1 & 21 & \infty & 1 \\ 1 & 3 & 25 & 0 \end{pmatrix}$. Знайдено матрицю найкоротших відстаней по двох дугах $c^2 = \begin{pmatrix} 0 & 22 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$. Серед наведених матриць виберіть матрицю найкоротших відстаней по трьох дугах С

   1) $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 2) $\begin{pmatrix} 0 & 15 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 3) $\begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ 4) $\begin{pmatrix} 0 & 22 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 3 & 8 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Практичне заняття № 7. Тестові завдання до першого модулю

Практичне заняття № 8. Пошук найкоротшого гамільтонового контура за методом гілок та меж

Короткі теоретичні відомості.

Класична постановка задачі: використовуючи задану систему транспортних сполучень (доріг і т.п.) у конкретній зоні обслуговування, відвідати всі пункти у такій послідовності, щоб пройдений маршрут був найкоротшим із всіх можливих.

Постановка задачі у термінах теорії графів : задано орієнтовний мультиграф. Необхідно знайти гамільтонів контур мінімальної довжини.

Обчислювальна складність задач Гамільтона і комівояжера має порядок (n-1)!. Внаслідок такої значної обчислювальної складності для розв'язку задачі комівояжера створено багато алгоритмів, як автономних, так і таких, що базуються на інших оптимізаційних алгоритмах, - потокових, що будують мінімальний остів тощо.

При цьому точні алгоритми, що гарантують одержання маршруту комівояжера у будь-якому випадку, є трудомісткими і застосовні до мереж не дуже високої розмірності. Наприклад метод Літла оптимальний для вирішення задачі комівояжера, яка існує не більш ніж для 40 міст. Наближені алгоритми у більшості випадків застосовні до більш громіздких мереж, однак іноді призводять до неоптимального маршруту.

Основна ідея методу Літла досить проста. Спочатку будується деяка оцінка знизу (НГ- нижня оцінка) довжин усіх гамільтонових контурів. Після цього множина всіх гамільтонових контурів розбивається на дві підмножини. Перша підмножина складається з гамільтонових контурів, що включають деяку дугу (i,j) , а інша підмножина складається з контурів, що не включають цю дугу $\left(\overline{i,j}\right)$. Для кожної з підмножини за тим самим правилом, що і для початкової множини гамільтонових маршрутів, визначається нижня межа. Кожна нова нижня межа виявляється не менше нижньої межі, визначеної для всієї множини. Порівнюючи нижні межі, можна визначити підмножину гамільтонових контурів, усередині якої з більшою ймовірністю міститься оптимальний маршрут. Ця підмножина за анологічним правилом розбивається ще на два, і знову знаходяться нижні межі, і так доти, поки не залишається єдиний цикл. Процес розбивки підмножин супроводжується побудовою деякого бінарного дерева.

Розглянемо розв'язок цієї задачі на *прикладі 2.5.1.* Нехай необхідно розв'язати задачу комівояжера з матрицею витрат $C = \begin{pmatrix} \infty & 10 & 5 & 8 & 1 \\ 8 & \infty & 15 & 2 & 14 \\ 5 & 14 & \infty & 1 & \infty \\ 4 & 16 & 10 & \infty & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & \infty \end{pmatrix}$.

Розв`язок.

1. Занесемо до рядків та стовпців матриці нульові елементи шляхом віднімання найменших елементів з відповідних рядка та стовпця.

	1	2	3	4	5	h_i
1	∞	10	5	8	1	1
2	8	∞	15	2	14	2
3	5	14	∞	1	∞	1
4	4	16	10	∞	2	2
5	1	4	1	1	∞	1
						7

	1	2	3	4	5	
1	∞	9	4	7	0	
2	6	∞	13	0	12	
3	4	13	∞	0	∞	
4	2	14	8	∞	0	
5	0	3	0	0	∞	
h_j	0	3	0	0	0	3

Початкове значення нижньої межі (сума всіх констант приведення матриці) НМ=7+3=10.

2. Оцінимо отримані нулі матриці вагою (штраф за невикористання проїзду), яка складається із суми найменших елементів із стовпця та рядка, на перетині яких знаходиться нуль (нуль, що оцінюється, у виборі мінімального не фігурує).

	1	2	3	4	5
1	∞	6	4	7	0^4
2	6	∞	13	0^6	12
3	4	10	∞	0^4	∞

4	2	11	8	∞	0^2
5	0^2	0^6	0^4	0^0	∞

Обираємо нуль з найбільшою вагою. Якщо таких нулів декілька, вибираємо будь-який. Наприклад, нуль (2,4).

3. Оцінимо нижню межу множини усіх гамільтонових контурів, які виключають обрану дугу (2,4). Для аналізу такого варіанту немає потреби виписувати матрицю витрат, достатньо врахувати при підрахунку нижньої межі вагу обраного нуля матриці: НМ=НМ+вага нуля=10+6=16.

	1	2	3	4	5	h_i
1	∞	6	4	7	0	0
2	6	∞	13	∞	12	6
3	4	10	∞	0	∞	0
4	2	11	8	∞	0	0
5	0	0	0	0	∞	0
						6

$\overline{(2,4)}$	1	2	3	4	5	
1	∞	6	4	7	0	
2	0	∞	7	∞	6	
3	4	10	∞	0	∞	
4	2	11	8	∞	0	
5	0	0	0	0	∞	
h_j	0	0	0	0	0	0

Для побудови матриці $\overline{(2,4)}$(виключення дуги (2,4) з гамільтонового контуру), необхідно елемент матриці (2,4) замінити на нескінченність, що призведе до повторного приведення рядка матриці на 6 одиниць (вага нуля).

4. Оцінимо нижню межу множини усіх гамільтонових контурів, які включають обрану дугу (2,4). Для аналізу такого варіанту необхідно виконати наступні перетворення вихідної матриці:

1) викреслити рядок (2-й) та стовпець(4-й) на перетині яких міститься обраний нуль;

2) заборонити до вибору елемент матриці(4,2), який відповідає замкненню шляху в один елементарний цикл;

3)над перетвореною матрицею виконаємо крок приведення матриці 1(якщо це необхідно).

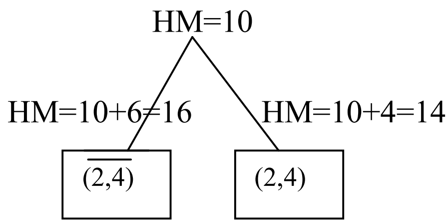
Тоді нижня межа цього вибору буде дорівнювати сумі констант приведення перетвореної матриці та попереднього значення нижньої межі.

	1	2	3	5	h_i
1	∞	6	4	0	0
3	4	10	∞	∞	4
4	∞	11	8	0	0
5	0	0	0	∞	0
					4

(2,4)	1	2	3	5	
1	∞	6	4	0	
3	0	6	∞	∞	
4	2	11	8	0	
5	0	0	0	∞	
h_j	0	0	0	0	0

НМ=10+4=14.

На цьому етапі маємо дерево пошуку наступного вигляду



5. Серед листків дерева розв’язків обираємо лист з найменшою нижньою межею. У нашому випадку це лист (2,4), який відповідає варіанту включення дуги (2,4) у очікуваний гамільтонів контур. Подальші дослідження слід виконувати у матриці (2,4), починаючи з пункту 2.

(2,4)	1	2	3	5	h_i
1	∞	6	4	0^4	0
3	0^6	6	∞	∞	0
4	2	11	8	0^2	0
5	0^0	0^6	0^4	∞	0
h_j	0	0	0	0	0

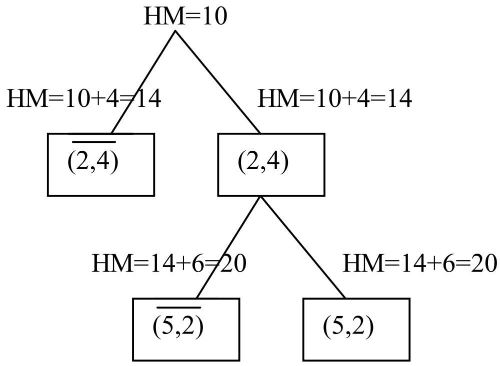
(5,2)	1	3	5	h_i
1	∞	4	0	0
3	0	∞	∞	0
4	2	8	∞	2
				2

(5,2)	1	3	5
1	∞	4	0
3	0	∞	∞
4	0	6	∞
h_j	0	4	0

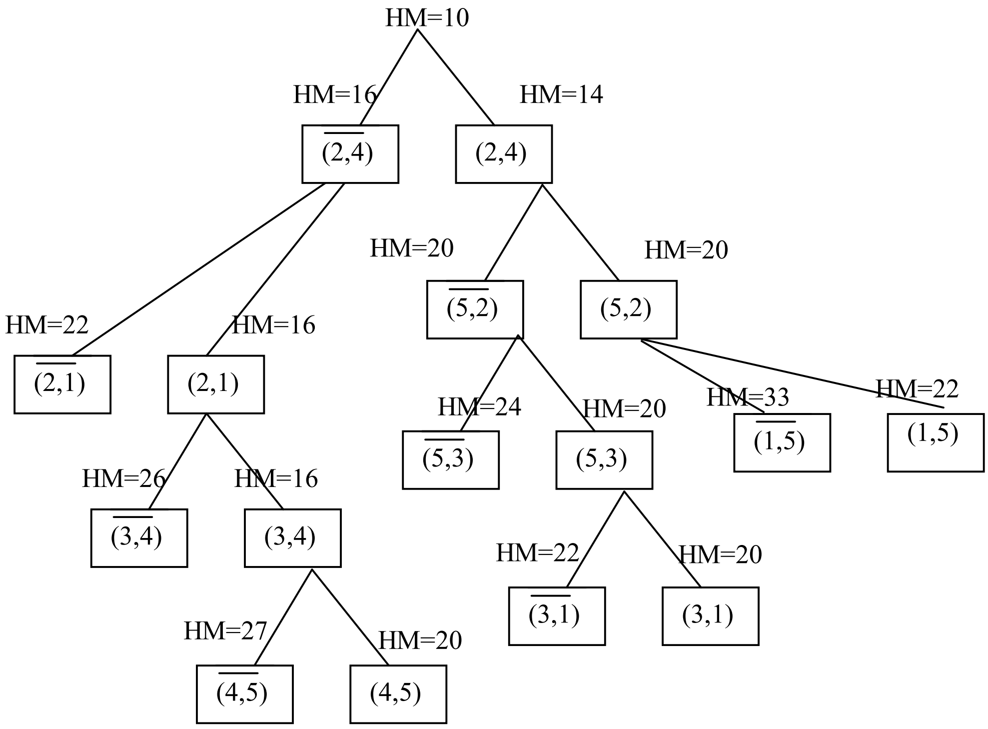
НМ(5,2)=14+6=20

НМ($\overline{(5,2)}$)=14+6=20

Порівнюючи НМ листків отриманого дерева розв’язків, знову обираємо лист з найменшою нижньою межею і виконуємо кроки 2-5 з відповідною обраному листку матрицею.



Виконавши незначну кількість подібних кроків до розглянутого отримуємо наступне дерево розв’язків



Як бачимо, на дереві існує два «кінцевих» листка з найменшою вагою 20. Їм відповідають наступні матриці

(4,5)	2	3		(3,1)	2	5
1	∞	0		1	0	∞
5	0	∞		4	∞	0

Матриця (4,5) потребує автоматичного включення до результуючого гамільтонового контура дуг (1,3) та (5,2). У результаті маємо найкоротший гамільтонів контур 1→3→4→5→2→1 завдовжки(ціною) НМ=20 ум. од.

Матриця (3,1) потребує автоматичного включення до результуючого гамільтонового контура дуг (1,2) та (4,5). У результаті маємо ще один найкоротший гамільтонів контур 1→2→4→5→3→1 завдовжки(ціною) НМ=20 ум. од.

Відповідь: існує два найкоротших гамільтонових контура довжиною 20 ум. од. $\mu_1 = \{x_1, x_3, x_4, x_5, x_2, x_1\}$ та $\mu_2 = \{x_1, x_2, x_4, x_5, x_3, x_1\}$.

Завдання для самостійного опрацювання

1. Знайти найкоротший гамільтонів контур на графі, який задано матрицею суміжності ваг $C = \begin{pmatrix} \infty & 2 & 10 & 15 & 3 \\ 15 & \infty & 1 & 8 & 15 \\ 30 & 10 & \infty & 8 & 5 \\ 10 & 1 & 2 & \infty & 20 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & \infty \end{pmatrix}$.

2. Знайти найкоротший гамільтонів контур на графі, який задано матрицею суміжності ваг $C = \begin{pmatrix} \infty & 10 & 5 & 8 & 10 & 1 \\ 8 & \infty & 15 & 14 & 3 & 2 \\ 5 & 14 & \infty & 18 & 10 & 1 \\ 4 & 16 & 10 & \infty & 12 & 2 \\ 1 & 4 & 1 & 1 & \infty & 1 \\ 10 & 18 & 15 & 12 & 1 & \infty \end{pmatrix}$.

3. Знайти найкоротший гамільтонів контур на графі, який задано матрицею суміжності ваг $C = \begin{pmatrix} \infty & 12 & 10 & \infty & 3 \\ 5 & \infty & 0 & 8 & 1 \\ \infty & 0 & \infty & 8 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & \infty & 20 \\ 20 & 1 & 2 & 1 & \infty \end{pmatrix}$.

Тестові питання для самоперевірки

1. Побудова бінарного дерева рішення необхідна для вирішення задачі пошуку

   1) найкоротшого гамільтонова контура;

   2) найкоротшого шляху від фіксованої вершини до інших вершин графа;

   3) максимального потоку у транспортній мережі;

   4) найкоротших відстаней між довільними двома вершинами графа.

2. Гамільтонів контур – це

   1) підграф заданого графу;

   2) частковий граф заданого графу;

   3) бінарне дерево побудоване на основі заданого графу;

   4) незв'язний граф без петель.

3. Побудова бінарного дерева розв'язку виконується у

   1) алгоритмі Йоу, Даніельсона, Дхавана;

   2) методі Форда;

   3) методі гілок та меж;

   4) алгоритмі Дейкстри.

4. Контур – це

   1) шлях між двома вершинами графа у мільтиграфі;

   2) шлях, у якому вершина відправлення співпадає з вершиною прибуття;

   3) шлях, у якому кожна вершина графа зустрічається лише один раз;

   4) шлях між двома вершинами графа без можливого включення петель.

5. Нижня межа у методі гілок та меж оцінює

   1) можливий гамільтонів контур;

   2) множину можливих шляхів між указаними вершинами графа;

   3) гамільтонів шлях від фіксованої вершини графа до інших вершин;

   4) можину можливих гамільтонових шляхів.

Практичне заняття № 9. Пошук всіх гамільтонових шляхів та контурів за алгебраїчним алгоритмом Йоу, Даніельсона, Дхавана

Короткі теоретичні відомості.

В алгоритмі послідовно будуються всі прості шляхи простого орграфа за допомогою послідовного перемноження матриць, що містять символи вершин x_1, x_2,…,x_n. Нехай задано матрицю суміжності графа R. Будуємо модифіковану матрицю суміжності графа V, елементи якої знаходять наступним чином:

$$v_{ij} = \begin{cases} j, & \text{якщо вершина } i \text{ суміжна з вершиною } j\,; \\ 0, & \text{у іншому випадку}. \end{cases}.$$

Внутрішнім добутком вершин шляху (x_1, x_2, x_3,…,x_{k-1}, x_k) називається формальний алгебраїчний вираз (слово) $x_2 \cdot x_3 \cdot \ldots \cdot x_{k-1}$, що не містить початкової і кінцевої вершин шляху. При k=2 добуток вважається рівним 1.

Простим називається шлях, у якому відсутнє повторення вершин.

Запропонований алгоритм будує послідовність матриць P_1, P_2,…, P_{n-1}, $V \cdot P_{n-1}$, де P_s – матриця, елемент $p_s(i, j)$ якої дорівнює сумі внутрішніх добутків вершин шляхів х вершини графа x_i до x_j довжини $s(1 \le s \le n-1)$.

Перша матриця P_1=R (матриця суміжності). Якщо матриця P_s вже обчислена, то для отримання матриці P_{s+1} спочатку будується матриця $P^0_{s+1} = V \cdot P_s = \left\| p^0_{s+1}(i, j) \right\|$, $p^0_{s+1}(i, j) = \sum_k v(i,k) \cdot p_s(k, j)$. Її елемент $p^0_{s+1}(i, j)$ дорівнює сумі внутрішніх добутків всіх таких ланцюгів (не тільки простих) з вершини x_i до вершини x_j довжини s+1, серед яких непростими є в точності ті ланцюги, внутрішні добутки яких містять вершину x_i. Далі отримуємо матрицю P_{s+1} шляхом виключення з сум $p^0_{s+1}(i, j) = \sum_k v(i,k) \cdot p_s(k, j)$ матриці P^0_{s+1} доданків, що містять x_i, та замінивши діагональні елементи матриці нулями.

При s=n-1 матриця P_{n-1} дає всі гамільтонові шляхи, що мають довжину n-1, у графі G між любими парами вершин. Гамільтонові контури перелічуються членами внутрішніх добутків вершин, що містяться на діагональних елементах матриці $V \cdot P_{n-1}$.

Приклад 9.1 Знайти матрицю гамільтонових шляхів для графу, який задано матрицею суміжності $R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$

Розв'язок. Будуємо модифіковану матрицю суміжності *V* за матрицею *R*.

$$R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad V = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

. Вважаємо $P_1=R$.

Обчислюємо матрицю $P_2^0 = V \cdot P_1$ і замінюючи в ній підкреслені діагональні елементи нулями, одержуємо P_2.

$$P_2^0 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \underline{4} & 3+4 & 2 & 2 & 2+3+4 \\ 4 & \underline{3+4+5} & 0 & 5 & 3+4 \\ 0 & 5 & \underline{2} & 2+5 & 2 \\ 0 & 1+5 & 1+2 & \underline{1+2+5} & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & \underline{2+4} \end{bmatrix} \end{array} \quad P_2^0 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 3+4 & 2 & 2 & 2+3+4 \\ 4 & 0 & 0 & 5 & 3+4 \\ 0 & 5 & 0 & 2+5 & 2 \\ 0 & 1+5 & 1+2 & 0 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Далі знаходимо $P_3^0 = V \cdot P_2$ і після заміни діагональних елементів нулями – матрицю простих 3-шляхів P_3.

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
P_3^0 = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} &
\begin{bmatrix}
\underline{24} & 35+\underline{41}+45 & \underline{41}+42 & 25+32+35 & 23+24+32+42 \\
54 & \underline{35+41+45+54} & 41+\underline{42}+\underline{52} & \underline{32}+35+\underline{52} & \underline{32+42} \\
24+54 & 54 & \underline{52} & 25+52 & \underline{23}+24 \\
\underline{24}+\underline{54} & 13+\underline{54+14} & 12+25 & \underline{12+25+52} & 12+13+\underline{14+24}+23 \\
24 & 41+42 & 41+42 & \underline{25} & \underline{23+24}
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
P_3 = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & 35+45 & 42 & 25+32+35 & 23+24+32+42 \\
54 & 0 & 41 & 35 & 0 \\
24+54 & 54 & 0 & 25+52 & 24 \\
0 & 13 & 12+25 & 0 & 12+13+23 \\
24 & 41+42 & 41+42 & 0 & \underline{0}
\end{bmatrix}
\end{array}.
$$

Виконуючи аналогічні дії, отримуємо матрицю простих 4-шляхів P_4

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
P_4 = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & 354 & 425 & 235+325+352 & 423+324 \\
354 & 0 & 541 & 0 & 413 \\
524+254 & 541 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 135 & 0 & 0 & 123+132 \\
0 & 413 & 241+412 & 0 & \underline{0}
\end{bmatrix}
\end{array}.
$$

Відповідь: матрицею гамільтонових шляхів є матриця P_4, за якою можна побудувати усі можливі гамільтонові шляхи.

Приклад 9.2 Знайти найкоротший гамільтонов контур для графу, який задано

матрицею суміжності ваг
$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\
R = \begin{array}{c} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array} &
\begin{bmatrix}
0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 1 & 0
\end{bmatrix}
\end{array}.
$$

Розв’язок. Як відомо, гамільтонові контури перелічуються членами внутрішніх добутків вершин, що містяться на діагональних елементах матриці $V \cdot P_4$. Тобто, достатньо знайти один діагональний елемент матриці P_5^0(наприклад елемент $P_5^0(1,1)$), щоб розв’язати вихідну задачу. Щоб отримати перший діагональний елемент зазначеної матриці достаньо знати елементи першого стовпця матриці P_4. Тобто, на відміну від розв’язку попередньої задачі, будемо виконувати усі розрахунки лише з першими стовпцями матриць P_i та P_i^0.

Будуємо модифіковану матрицю суміжності V за матрицею R.

$$R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \quad V = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \\ 5 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 0 & 4 & 0 \end{bmatrix} \end{array}. \text{ Вважаємо } P_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Тоді

$$P_2^0 = V \cdot P_1 = \begin{bmatrix} \underline{4} \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \; P_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \; P_3^0 = V \cdot P_2 = \begin{bmatrix} \underline{24} \\ 54 \\ 24+54 \\ \underline{24}+\underline{54} \\ 24 \end{bmatrix}, \; P_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 54 \\ 24+54 \\ 0 \\ 24 \end{bmatrix},$$

$$P_4^0 = V \cdot P_3 = \begin{bmatrix} \underline{254}+\underline{324}+\underline{354} \\ \underline{324}+354+\underline{524} \\ 254+524 \\ \underline{254}+\underline{524} \\ \underline{254} \end{bmatrix}, \; P_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 354 \\ 254+524 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Нарешті перший діагональний елемент матриці P_5^0

$$P_5^0(1,1)=2354+3524+3254.$$

Тобто, на вихідному графі існують три гамільтонових контури, а саме

$$\mu_1=\{1, 2, 3, 5, 4, 1\}, \; \mu_2=\{1, 3, 5, 2, 4, 1\}, \; \mu_3=\{1, 3, 2, 5, 4, 1\}.$$

Знайдемо довжину усіх гамільтонових контурів і оберемо у якості найкоротшого той контур, довжина якого найменша.

Завдання для самостійного опрацювання

1. Знайти на заданому графі гамільтонові шляхи між 3-ю та 4-ю вершинами графа, якщо граф задано матрицею суміжності ваг $C = \begin{pmatrix} \infty & 2 & 10 & 15 & 3 \\ 15 & \infty & 1 & 8 & 15 \\ 30 & 10 & \infty & 8 & 5 \\ 10 & 1 & 2 & \infty & 20 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & \infty \end{pmatrix}$.

   Визначити найдовший та найменший шляхи зі знайдених.

2. Знайти найкоротший та найдовший гамільтонові контури на графі, який задано матрицею суміжності ваг $C = \begin{pmatrix} \infty & \infty & 5 & 8 & 10 & \infty \\ 8 & \infty & 5 & \infty & 3 & 2 \\ \infty & 14 & \infty & \infty & 1 & 1 \\ 4 & \infty & 10 & \infty & 12 & 2 \\ \infty & \infty & 1 & 1 & \infty & 1 \\ 10 & \infty & \infty & 12 & 1 & \infty \end{pmatrix}$.

3. Граф задано матрицею суміжності ваг $C = \begin{pmatrix} \infty & 12 & 10 & \infty & 3 \\ 5 & \infty & \infty & 8 & 1 \\ \infty & 0 & \infty & 8 & \infty \\ 1 & \infty & 2 & \infty & 20 \\ 20 & 1 & \infty & 1 & \infty \end{pmatrix}$. Знайдіть прості шляхи, довжина яких дорівнює 3, обрав за вершину відправлення 5-ту вершину графа.

Тестові питання для самоперевірки

1. Пошук найкоротшого гамільтонова контура виконують методи

   1) Шимбела та Форда;

   2) гілок та меж і Йоу, Даніельсона, Дхавана;

   3) Дейкстри та Йоу, Даніельсона, Дхавана;

   4) гілок та меж і резолюцій;

2. Пошук усіх можливих гамільтонових шляхів виконує

   1) метод Шимбела;

   2) алгоритм Дейкстри;

3) алгоритм Йоу, Даніельсона, Дхавана;

4) правило резолюцій.

3. Простим називається шлях, у якому:

1) відсутнє повторення вершин;

2) вершина відправлення співпадає з вершиною прибуття;

3) відсутні підконтури;

4) вершини графа зустрічаються хоча б один раз.

4. Модифікована матриця суміжності вершин графа V містить

1) назву вершини відправлення відповідної дуги графа або 0;

2) назву вершини прибуття відповідної дуги графа або 0;

3) ваги дуг графа або 0;

4) ваги дуг графа або ∞.

5. Щоб отримати матрицю P_s з матриці P_3^0 слід виключити

1) діагональні елементи;

2) елементи, розташовані вище головної діагоналі;

3) доданки, що містять вершину відправлення та замінити діагональні елементи нулями;

4) елементи, розташовані нижче головної діагоналі.

Практичне заняття № 10. Пошук максимальної течії s/t-мережі за теоремою Форда - Фалкерсона

Короткі теоретичні відомості.

*Мережею(*s/*t-мережею)* будемо називати орієнтований зв'язний граф без петель, серед вершин якого можна виділити дві особливі s - джерело та t – стік. Кожна дуга мережі пов'язана з двома числами, що записані через кому біля дуги. Перше число $c_{i,j}$ називається пропускною спроможністю дуги, а друге $\varphi_{i,j}$ – течія з вершини x_i до вершини x_j.

Нехай задано мережу G=(X,U), |X| = n(число вершин мережі), |Y|=m (число дуг у мережі). Зафіксуємо точку x_i та позначимо через $x_i \rightarrow X$ множину дуг, що виходять з вершини x_i, через $X \to x_i$ – множину дуг, що заходять до вершини x_i.

Течією у мережі G з вершини s до вершини t величини v називається невід'ємна величина φ така, що

$\varphi_{ij} \le c_{ij}$, для будь-якої дуги графа;

$$Q(x_i) = \sum_{u_{ki} \in x_i \to X} \varphi_{ki} - \sum_{u_{ik} \in X \to x_i} \varphi_{ik} = \begin{cases} -v, i = s; \\ 0\,, i \ne s \text{ та } \quad i \ne t; \\ v\,, \quad i = t. \end{cases}$$

Число $Q(x_i)$ називається *чистою течією* з вершини x_i відносно φ.

Нехай X – множина всіх вершин мережі. Розіб`ємо її на дві підмножини X_1 та X_2 таким чином, щоб:

$$s \in X_1 \text{ та } s \notin X_2, a \;\; t \in X_2 \;\text{ та }\; t \notin X_1;$$
$$X_1 \bigcup X_2 = X, X_1 \bigcap X_2 = X.$$

Розтином s/t-мережі назвемо множину всіх дуг, що йдуть з множини вершин X_1 до множини вершин X_2, позначимо (X_1, X_2). Потужність (величина) розтину дорівнює сумі пропускних спроможностей дуг, що створюють розтин, та позначається $v(X_1, X_2)$.

Приклад 10.1 Граф задано за допомогою матриці суміжності ваг. $C = \begin{array}{c} s \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ t \end{array} \begin{pmatrix} \infty & \infty & 3 & 14 & 18 \\ \infty & \infty & 15 & 2 & \infty \\ \infty & 12 & \infty & 10 & 8 \\ \infty & 10 & 12 & \infty & 35 \\ \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{pmatrix}$. Необхідно побудувати довільний розтин та визначити його потужність.

Розв'язок. Розіб'ємо множину усіх вершин графа на дві підмножини за правилами, враховуючи, що джерело належить множині X_1, а стік – до множини X_2. Інші вершини розподіляємо довільним чином але без повторень.

$X_1=\{s,\ 1,3\}$, $X_2=\{t,2\}$, $(X_1,\ X_2)=\{(s,3),(s,t),(1,2),(3,2),(3,t)\}$, $v(X_1,\ X_2)=c_{s,3}+c_{s,t}+c_{1,2}+c_{3,2}+c_{3,t}=14+18+15+12+35=94$.

Якщо вершини графа розподілити іншим чином між множинами X_1 ат X_2, то кількістна характеристика розтину (потужність) може або збільшитися або зменшитися.

Теорема Форда-Фалкерсона: максимальна течія мережі дорівнює потужності найменшого розтину в ній.

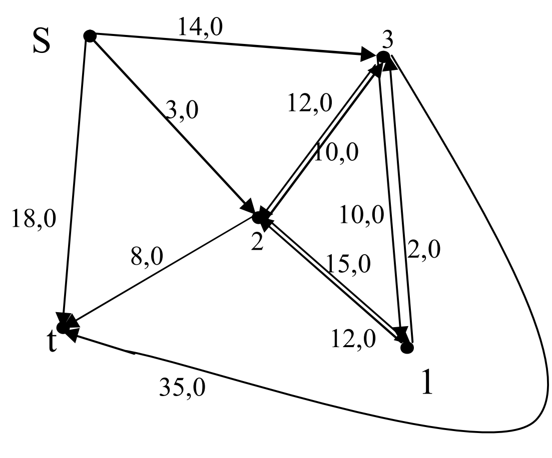
Приклад 10.2 Враховуючи умову та розв'язок попереднього приклада, побудувати ще один розтин та оцінити наближене значення максимальної течії мережі.

Розв'язок. Як і в попередньому прикладі, побудуємо множини X_1 та X_2 шляхом іншого розподілу вершин графа між множинами.

$X_1=\{s,\ 1\}$, $X_2=\{t,2,3\}$, $(X_1,\ X_2)=\{\ (s,2),(s,3),(s,t),(1,2),(1,3)\}$, $v(X_1,\ X_2)=c_{s,3}+c_{s,t}+c_{1,2}+c_{3,2}+c_{3,t}=3+14+18+15+2=52$.

Порівнюємо потужності двох розтинів і обираємо розтин з найменшою потужністю $v(X_1,\ X_2)=52$. Враховуючи теорему Форда-Фалкерсона можна сказати, що максимальна течія мережі не перевищує потужності меншого з двох розтинів, тобто не більша за 52 умовні одиниці.

Приклад 10.3 Знайти значення максимальної мережі, яку задано матрицею суміжності ваг (приклад 10.1).

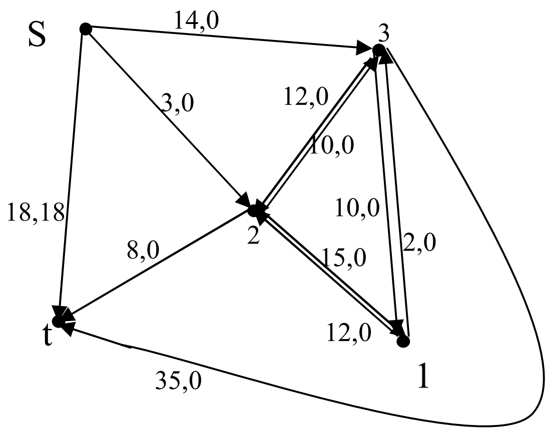


Розв'язок. Для наглядності, виконаних у подальшому, операцій представимо граф графічно.

Кожній дузі графа припишемо пару чисел c_{ij} та φ_{ij}. Домовимося, що початкове значення течії мережі дорівнює нулю, тобто $\varphi_{ij}=0$ для усіх дуг мережі. Для розмітки будь-якої k-ї вершини будемо використовувати позначення k (i^+, ε(k)) або k (i^-, ε(k)), де i- номер вершини, з якої ми потрапили до вершини k, '+' – використано існуючий напрямок дуги, '-' – використано зворотній напрямок дуги, ε(k) – додатна величина, на яку можна збільшити течію (для дуги зі знаком '+')

або зменшити (для дуги зі знаком ‘-’). Таким чином, вершина k може отримати помітку $(i^+, \varepsilon(k))$ $\varepsilon(k)=\min(\varepsilon(i), c_{ik}-\varphi_{ik})$, якщо на дузі u_{ik} $c_{ik}-\varphi_{ik}>0$, і помітку k $(i^-, \varepsilon(k))$ $\varepsilon(k)=\min(\varepsilon(i), \varphi_{ki})$, якщо на дузі u_{ki} $\varphi_{ki}>0$. Слід зазначити, що вершина S завжди має особливу помітку (s^+, ∞).

Кожен етап полягає у розставленні поміток вершин мережі, доки або не буде помічено вершину t , тоді відновлюємо шлях між вершинами s та t і змінюємо величину течії на дугах побудованого шляху, або переконуємося, що вершину t помітити неможливо, тоді будуємо розтин між вершинами множин X_1 та X_2. Множина X_1 складається з вершин, помічених на останньому етапі розмітки, а X_2 – з вершин, які не отримали помітку на останньому етапі. Отриманий розтин має мінімальну потужність.

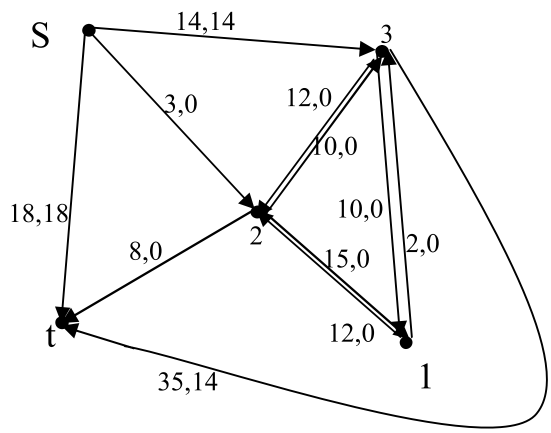


1-й етап.

$S(s^+,\infty)$	$3(s^+,14)$ $2(s^+,3)$ $t(s^+,18)$	$t\leftarrow s$ $\varepsilon(t)=18$

2-й етап.

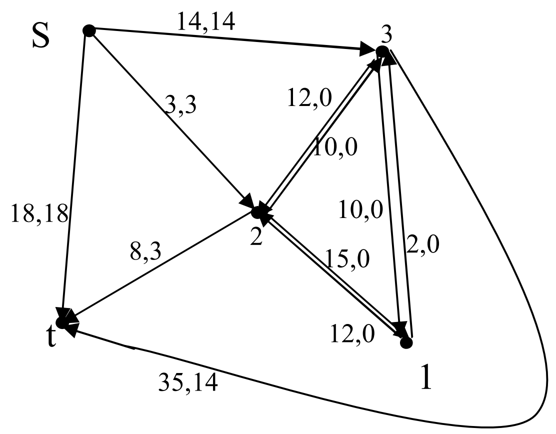
$S(s^+,\infty)$	$\underline{3(s^+,14)}$ $2(s^+,3)$	$2(3^+,12)$ $t(3^+,14)$ $t\leftarrow 3\leftarrow s$ $\varepsilon(t)=14$



3-й етап.

$S(s^+,\infty)$	$2(s^+,3)$	$1(2^+,3)$ $3(2^+,3)$ $t(2^+,3)$ $t\leftarrow 2\leftarrow s$ $\varepsilon(t)=3$

4-й етап.



$S(s^{+},\infty)$

Як бачимо, на останньому етапі можлива помітка лише вершини S, тому множина $X_1=\{S\}$. Усі непомічені вершини складають множину $X_2=\{1,2,3,t\}$. Будуємо розтин між множинами X_1 та X_2 $(X_1,X_2)=\{(s,2),\ (s,3),\ (s,t)\}$, його потужність складає $v(X_1,X_2)= C_{s2}+C_{s3}+C_{st}= 3+ 14+ 18=35$ умовних одиниць течії.

Висновок: максимальна течія у мережі дорівнює потужності мінімального розтину, тобто дорівнює 35 умовних одиниць.

Завдання для самостійного опрацювання

1. Побудувати два довільних розтини мережі, якщо її задано матрицею суміжності ваг C: $\begin{array}{c|cccccc} & S & 1 & 2 & 3 & 4 & t \\ \hline S & \infty & 15 & 3 & \infty & 40 & \infty \\ 1 & \infty & \infty & 8 & 6 & 12 & \infty \\ 2 & \infty & \infty & \infty & 18 & \infty & 18 \\ 3 & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & 55 \\ 4 & \infty & \infty & 10 & 13 & \infty & 15 \\ t & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty & \infty \end{array}$. Наближено оцініть максимальну течію мережі.
2. Знайдіть максимальну течію мережі, яка представлена матрицею суміжності ваг у попередньому завданні.
3. Знайдіть максимальну течію мережі, яку задано переліком дуг та відповідно пропускної спроможності перелічених дуг $\{ u_{s1}=9,\ u_{s2}=7,\ u_{s3}=10,\ u_{s4}=12,\ u_{13}=6,\ u_{14}=8,\ u_{23}=6,\ u_{24}=6,\ u_{3t}=14,\ u_{43}=8,\ u_{4t}=10\}$.

Тестові питання для самоперевірки

1. Мережа задана таблицею, у якій зазначена дуга(як вершина відправлення та вершина прибуття) та пропускна спроможність дуги:

i	s	s	s	1	2	2	3	1	3	4
j	1	3	2	3	3	4	4	t	t	t
c_{ij}	16	4	20	8	5	20	4	10	5	15

Множину вершин графа розбили на дві підмножини Y_1 Y_2. Серед наведених варіантів виберіть той, який є побудовою розтину мережі

1) Y_1={s, 1,4}, Y_2={2,3,t}, (Y_1,Y_2)={(s,3),(s,2),(1,3),(1,t),(4,t)}.

2) Y_1={s, 1,4}, Y_2={2,3,t}, (Y_1,Y_2)={(s,3),(s,2),(2,3),(3,4),(3,t)}.

3) Y_1={2,3,t}, Y_2={s, 1,4}, (Y_1,Y_2)={(s,3),(s,2),(1,3),(1,t),(4,t)}.

4) Y_1={s,3,t}, Y_2={1,2,4}, (Y_1,Y_2)={(s,1),(s,2),(3,4)}.

2. Виберіть варіант продовження теореми Форда – Фалкерсона: максимальна течія мережі дорівнює потужності

1) найбільшого розтину транспортної мережі.

2) найменшого розтину транспортної мережі.

3) довільного розтину транспортної мережі.

4) рівномірного розтину мережі.

3. Потік у мережі відповідає властивостям (2 варіанти)

1) Не перевищує найменшу пропускну спроможність дуг.

2) Частковий потік не перевищує пропускну спроможність відповідних дуг.

3) Сумарний вхідний потік не менший за сумарний вихідний потік для довільної вершини графа.

4) Сумарний вхідний потік не більший за сумарний вихідний потік для довільної вершини графа.

5) Сумарний вхідний потік дорівнює сумарному вихідному потоку для довільної вершини графа.

4. Враховуючи транспортну мережу з питання №1 оберіть можливий крок розмітки вершин графа (2 варіанти)

1) S(S-,∞), 1(1+,16), 2(S+,4), 3(S+,20), t(2-,4).

2) S(S+,∞), 1(S+,16), 2(S+,20), 3(S+,4), t(2+,20).

3) S(S+,∞), 1(S+,16), 2(S+,20), 3(S+,4), t(1+,10).

4) S(S+,∞), 1(S+,16), 2(S+,20), 3(S+,4), t(4+,15).

5) S(S+,∞), 1(S+,16), 2(S+,20), 3(S+,4), 4(3+,4), t(4+,4).

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Комп’ютерна дискретна математика: Підручник/ Бондаренко М.Ф., Білоус Н.В., Руткас А.Г. – Харків: Компанія СМІТ, 2004. – 480 с.
2. Горбатов В.А. Основы дискретной математики. – М.: Высшая школа, 1986.– 312 с.
3. Капітонова Ю.В. та ін. Основи дискретної математики/ Ю.В.Капітонова, С.Л. Кривий, О.А. Летичевский та ін. – К.: Наукова думка, 2002. – 578 с.
4. Клини С. Математическая логика. – М.: Мир,1973. – 480 с.
5. Касаткин В.Н. Необычные задачи математики. – К.: Радянська школа, 1987. -125 с.:іл.
6. Кузин Л.Т. Основы кибернетики: в 2-х т.– Т. 2. Основы кибернетических моделей: Учебное пособие для вузов. – М.: Энергия, 1979. – 584 с.: ил.
7. Кузнєцов О.П., Адельсон –Вельский Г.М. Дискретная математика для инженера. – М.: Энергия, 1980. -344с.
8. Лихтарников Л.М., Сукачева Т.Г. Математическая логика. – М.: Высшая школа, 1999. – 200 с.
9. Ловас Л., Палмер М. Прикладные задачи теории графов. Теория паросочетаний в математике , физике, химии.
10. Новиков Ф.Ф. Дискретная математика для программистов. Учебник для вузов. 2-е изд. – Спб.: Питер, 2005. – 364 с.: ил.
11. Цой С., Цхай С.М. Прикладная теория графов. – Алма-Ата: Наука, 1971. – 500 с.: ил.
12. Федоренко Н.Д., Демченко В.В. Основи дискретного аналізу: Навчальний посібник. – К.: КНУБА, 2003. – 108 с.
13. Яблонский С.В. Введение в дискретную математику. – М.: Наука, 1986. – 384 с.

Методичні вказівки щодо виконання практичних робіт з дисципліни «Дискретна математика» студентів денної форми навчання зі спеціальності 6.050102 - “Комп’ютерні системи та мережі” (у тому числі скорочений термін навчання) частина 1 «Теорія множин, пошукові задачі на графах».

Укладачі: ст. викл. В.Ю. Бельська,

Відповідальний за випуск доц. Г.Ю.Сисюк

Підп. до др.________________.Формат 60×84 1/16. Папір тип. Друк ризографія.

Ум. друк. арк._____. Наклад_________прим. Зам. №___________. Безкоштовно.

Видавничий відділ КДПУ

39614, м. Кременчук, вул. Першотравнева, 20