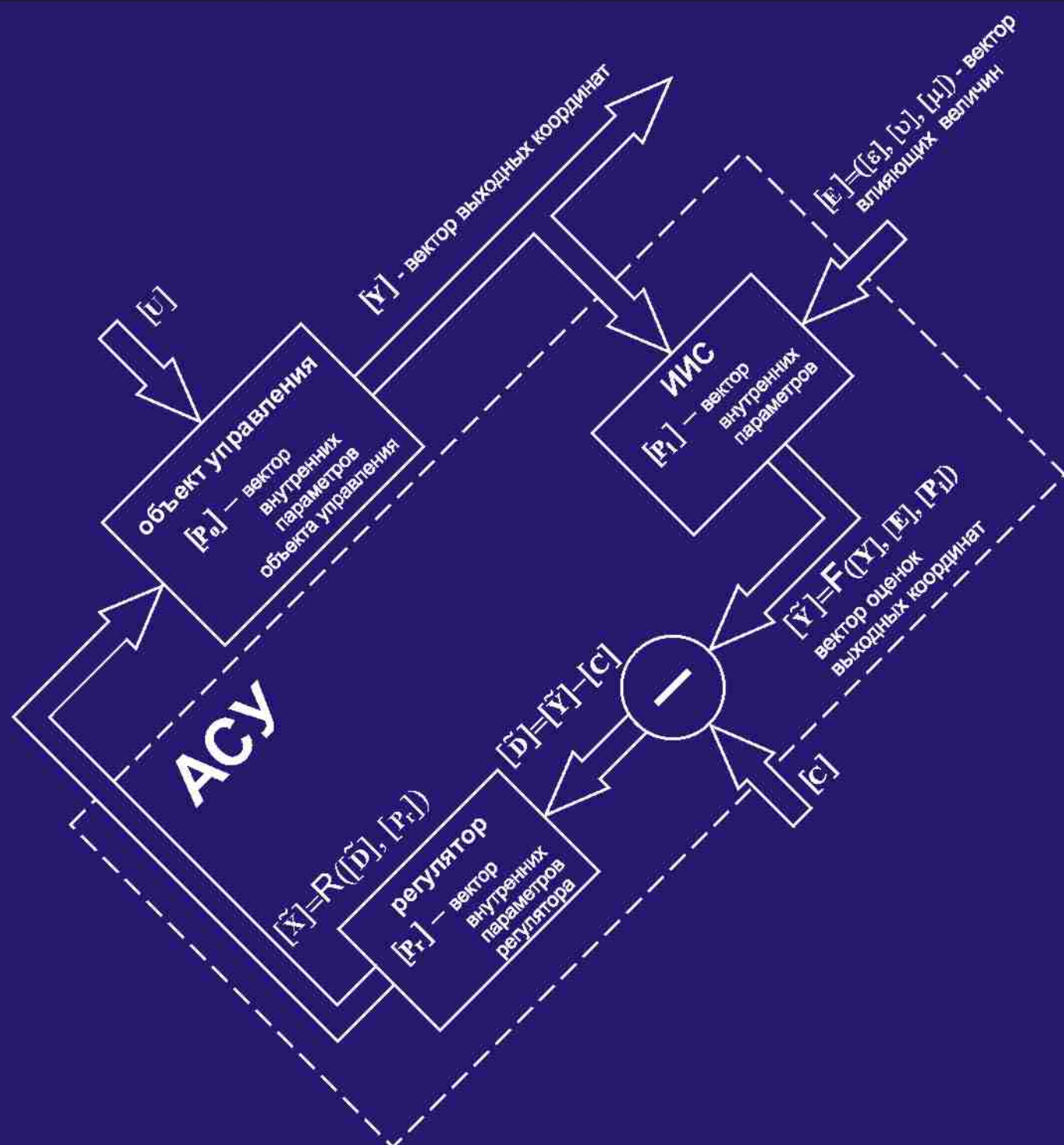


# СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ И МЕТОДЫ АНАЛИЗА ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ СИСТЕМ АСУ ТП



Федеральное агентство по образованию РФ  
Ангарская государственная техническая академия

Б.Ф. Кузнецов

СТОХАСТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ  
И МЕТОДЫ АНАЛИЗА  
ИНФОРМАЦИОННО-ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ  
СИСТЕМ АСУ ТП



Ангарск 2007

УДК 006.91:519.876.5

ISBN 5-89864-069-X

ББК 30.10

К 89

**Кузнецов Б.Ф.**

Стохастические модели и методы анализа информационно – измерительных систем АСУ ТП / Ангарск: Ангарская государственная техническая академия, 2007. – 180 с.: ил.

Монография посвящена общим теоретическим основам анализа погрешностей информационно-измерительных систем АСУ ТП. Рассмотрены особенности функционирования компонентов измерительных каналов с учетом реальных условий эксплуатации. Приводятся стохастические модели погрешностей измерений, построенных на основе теории стохастических процессов.

Книга предназначена для студентов, аспирантов, научных и инженерных работников, а также специалистов различных отраслей народного хозяйства, связанных с разработкой и эксплуатацией информационно-измерительных систем.

**Kuznecov B. F.**

Stochastic models and methods of the analysis information - measuring systems of automatic control system technological process / Angarsk: Angarsk state technical academy, 2007. - 180 p.

The monography is devoted to the common theoretical bases of the analysis of errors for information-measuring systems of automatic control system technological process. Features of functioning of components of measuring channels in view of real conditions of operation are considered. Stochastic models of errors of the measurements based the theory of stochastic processes are resulted.

The book is intended for students, post-graduate students, scientific and engineering workers, and also the experts of various branches of a national economy connected with development and operation of information-measuring systems.

**Рецензенты:**

доктор техн. наук, профессор Газбенко В.Е.

кандидат физ. мат. наук, профессор Гудков О.И.

кандидат техн. наук, доцент Хрусталеv Ю.П.

© Кузнецов Б.Ф., 2007

© Ангарская государственная техническая академия, 2007

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	6
Список сокращений.....	10
Список обозначений.....	11
ГЛАВА 1. Измерения. Информационно - измерительные системы.....	12
1.1 Погрешности измерений .....	12
1.2 Средства измерений.....	17
1.3 Особенности функционирования информационно – измерительных систем в составе АСУ ТП .....	20
ГЛАВА 2. Измеряемая и влияющая величины.....	25
2.1 Классификация сигналов.....	25
2.2 Описание случайных сигналов.....	29
2.2.1 Корреляционная функция.....	32
2.2.2 Функция спектральной плотности мощности.....	35
2.3 Модели измеряемых сигналов и влияющих величин.....	36
2.3.1 Модели измеряемых сигналов .....	37
2.3.2 Модели влияющих величин .....	41
2.4 Динамические характеристики случайной составляющей математической модели входных воздействий.....	45
ГЛАВА 3 Математические модели измерительных каналов.....	48
3.1 Основные положения.....	48
3.2 Измерительный канал как динамическая система.....	48
3.2.1 Динамические характеристики линейного измерительного преобразователя непрерывного действия.....	48
3.2.2 Динамические характеристики линейного измерительного преобразователя циклического действия.....	52
3.3 Измерительные каналы с нелинейными преобразователями .....	54
ГЛАВА 4 Динамические погрешности измерительных каналов .....	62
4.1 Вычисление динамической погрешности линейного ИП непрерывного действия.....	63
4.2 Динамическая погрешность измерительного канала с ИП циклического действия.....	68
4.3 Динамическая погрешность измерительных каналов	

с нелинейными измерительными преобразователями .....	70
4.3.1 Модель динамической погрешности нелинейного ИП при гармоническом входном сигнале .....	71
4.3.2 Модель нелинейного измерительного преобразователя при входном сигнале в виде случайного процесса для степенной функции нелинейности .....	74
4.3.3 Модели динамической погрешности для измерительных преобразователей с другими видами нелинейностей .....	84
ГЛАВА 5 Модель дополнительной погрешности	
измерительных каналов .....	90
5.1 Мультипликативная скалярная модель с независимыми сигналами .....	91
5.2 Мультипликативная скалярная модель с зависимыми сигналами .....	95
5.3 Векторная мультипликативная модель .....	103
5.4 Модели мультипликативной дополнительной погрешности при учете динамических свойств каналов. ....	105
5.5 Модели аддитивной дополнительной погрешности при учете динамических свойств каналов .....	117
5.6 Векторная модель аддитивно-мультипликативной дополнительной погрешности .....	120
ГЛАВА 6 Параметрическая оптимизация измерительных преобразователей.	
Коррекция динамической погрешности .....	123
6.1 Случайная составляющая статической погрешности измерительного канала. Связь с параметрами ДХ измерительного преобразователя .....	124
6.2 Оптимизация параметров преобразователей .....	129
6.3 Вычисление допусков на аргументы функции суммарной погрешности .....	134
6.4 Коррекция динамической погрешности измерительных преобразователей .....	136
6.5 Анализ работы неравноточных измерительных каналов в динамическом режиме .....	140
ГЛАВА 7 Имитационное моделирование стохастических входных воздействий измерительных каналов .....	
7.1 Постановка задачи моделирования случайных процессов .....	148
7.2 Датчики случайных чисел .....	150
7.3 Метод формирования случайных чисел с заданным	

одномерным законом распределения .....	152
7.4 Метод формирования гауссовских случайных процессов с заданной функцией автокорреляции.....	153
7.5 Метод формирования систем гауссовских случайных процессов с заданным коэффициентом взаимной корреляции .....	153
7.6 Метод формирования систем гауссовских случайных процессов с заданными функциями автокорреляции и взаимной корреляции .....	157
7.7 Метод скользящего упорядочения для формирования случайного процесса с заданным ОЗРВ И АКФ .....	159
7.8 Метод максимального подобия для скалярных процессов .....	161
7.9 Метод максимального правдоподобия для системы случайных процессов .....	165
ГЛАВА 8 Имитационное моделирование измерительных каналов .....	167
8.1 Основные принципы моделирования погрешности измерительных каналов.....	167
8.2 Полиномиальная модель погрешности измерительного канала .....	168
8.3 Модели измерительного канала с ИП циклического действия .....	172
Литература.....	176
Приложение 1 Типовые функции АКФ и соответствующие им функции СПМ ....	181
Приложение 2 Динамическая погрешность для измерительного преобразователя с передаточной функцией вида $W(j\omega) = 1/(1 + j\omega\tau)$ .....	183
Приложение 3 Динамическая погрешность для измерительного преобразователя с передаточной функцией вида $W(j\omega) = e^{j\omega\tau}$ .....	184
Приложение 4 Динамическая погрешность сложных измерительных преобразователей .....	185
Приложение 5 Примеры элементарных функциональных преобразований базовых случайных величин.....	187
Приложение 6 Передаточные функции формирующих фильтров.....	189

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Важной задачей в АСУ ТП является задача повышения эффективности управления и в частности повышение точности управляющего воздействия. Выработка управляющего воздействия, при автоматическом управлении технологическим процессом, осуществляется на основе информации о переменных состоянии управляемого объекта. В свою очередь получение данной информации возможно на основе выполнения процедуры измерения. Вполне очевидно, что эффективность управления технологическим процессом во многом определяется качеством информации, получаемой от измерительных приборов и систем. Под качеством измерений в первую очередь, как правило, понимается их точность.

В последнее время требования к измерениям в большинстве областей науки и техники, в частности в технологических измерениях, претерпевают значительные изменения, в основном в направлении повышения точности результатов измерений при ужесточении условий эксплуатации средств измерения.

Одной из основных особенностей работы измерительных средств в составе информационно-измерительных систем АСУ ТП является реализация динамического режима измерения. В соответствии с РМГ 29-99 [1] под динамическим режимом измерения понимается такие измерения, когда измеряемая величина изменяется в процессе измерения. Однако такое определение не полностью раскрывает все его особенности и характеризует динамический режим измерения в «узком смысле» и определяет только динамическую погрешность результатов измерения. Действительно, при выполнении процедуры измерения может изменяться не только измеряемая величина, но и влияющие величины. Кроме того, при функционировании средств измерения в составе АСУ ТП, выходной сигнал непосредственно участвует в формировании управляющего воздействия на объект управления. Очевидно, что более корректным будет определение динамических измерений в «широком смысле», следующее: динамический режим измерения это измерения при которых выходной сигнал средства измерения является функцией времени. Однако существующие методы анализа погрешностей измерительных каналов не учитывают в полной мере всех особенностей динамического режима измерения в «широком смысле».

В данной книге изложены методы анализа погрешностей измерительных преобразователей и систем с учетом выше изложенных особенностей их функционирования. Акценты сделаны на практическом применении методов в метрологической практике. В частности рассмотрены основные модели измеритель-

ных сигналов и влияющих величин, методы расчета динамической погрешности для линейных и нелинейных измерительных преобразователей непрерывного действия и динамических погрешностей преобразователей циклического действия. Рассмотрены основные модели дополнительных погрешностей и методы их расчета. Структура изложения материала приведена на рис.1



*Рис. 1 Структура изложения материала в книге*

В первой главе монографии приведены основные понятия и определения касающиеся измерений, измерительных приборов и систем. Здесь же рассматриваются особенности функционирования информационно-измерительных систем в составе АСУ ТП.

Вторая глава работы посвящена классификации и способам описания измерительных сигналов. Особое внимание уделено случайным процессам и способами их описаний, в частности понятиям автокорреляционной функции, взаимокорреляционной функции и функции спектральной плотности мощности. На основе ряда практических примеров обосновывается общая математическая модель измерительного сигнала и модель влияющей величины.



Третья глава книги содержит описание математических моделей измерительных каналов. Рассматривается математическое описание измерительного канала как линейной динамической системы. Приводится анализ типовых функций нелинейности статических передаточных характеристик измерительных преобразователей и основные математические модели нелинейных динамических систем. Здесь же, на ряде конкретных примеров, рассматриваются основные модели дополнительной погрешности.

Четвертая глава работы посвящена вопросам моделирования динамической погрешности измерительных каналов. Рассматриваются аналитические методы анализа погрешностей линейных измерительных преобразователей и систем неперывного и циклического действия. Большая часть материала данной главы посвящена наиболее сложному вопросу – анализ динамической погрешности нелинейных измерительных преобразователей. На основе аналитической модели, для простейших случаев, показано увеличение динамической погрешности для нелинейных преобразователей.

Пятая глава работы содержит описание методов анализа и математических моделей дополнительной погрешности. Рассмотренные случаи аддитивной и мультипликативной погрешности для скалярных и векторных моделей, показаны особенности учета статистической взаимосвязи между входными воздействиями измерительных каналов.

Шестая глава книги содержит описание методов параметрической оптимизации измерительных преобразователей по критерию минимальной суммарной погрешности, рассматривается вопрос коррекции динамической погрешности и приводится методика вычисления оптимальных параметров корректирующего звена. Здесь приводится анализ работы неравноточных параллельных измерительных каналов в динамическом режиме.

Седьмая глава монографии посвящена вопросам имитационного моделирования случайных процессов. Приведена классификация методов имитационного моделирования, рассмотрены условия применимости. Основное внимание в данной главе уделено двум методам – методу скользящего упорядочивания и методу индуцированного упорядочивания, позволяющим получить случайные процессы с заданным одномерным законом распределения вероятностей и заданной функцией автокорреляции.

В заключительной восьмой главе монографии на основе обобщения материала приводится имитационная модель измерительного канала позволяющая проводить анализ погрешности без ограничений на виды входного воздействия,

влияющих величин и структуры каналов.

В приложении приведены справочные материалы по моделям измерительных сигналов и влияющих величин, аналитические выражения для динамической погрешности для ряда моделей измерительного сигнала, а так же передаточные функции формирующих фильтров для имитационного моделирования случайных процессов.

Кроме автора при работе над монографией принимали участия к.т.н. Пудалов А.Д. (разделы: 2.5.1, 2.5.2, глава 5), к.т.н. Латышенко Д.Ю. (разделы: 3.3, 4.3, 7.1, 7.8).

Пользуясь случаем автор выражает глубокую благодарность и признательность действительному члену Метрологической академии, профессору Рудольфу Львовичу Пинхусовичу, чьи идеи явились основой данной работы.

Свои отзывы и критические замечания читатель может послать по адресу:  
665835, г. Ангарск Иркутской области, ул. Чайковского 60,  
Ангарская государственная техническая академия  
Кафедра «Промышленной электроники и информационно-измерительной техники», Кузнецову Б.Ф. (e-mail: [bf@agta.irmail.ru](mailto:bf@agta.irmail.ru), [bf@inbox.ru](mailto:bf@inbox.ru))

*Автор*

## СПИСОК СОКРАЩЕНИЙ

АСУ	- автоматизированная система управления;
АСУ ТП	- автоматизированная система управления технологическим процессом;
ИИС	- информационно – измерительная система;
ИК	- измерительный канал;
ИП	- измерительный преобразователь;
МО	- математическое ожидание;
ТОУ	- технологический объект управления;
ТП	- технологический процесс;
СПМ	- спектральная плотность мощности
АКФ	- автокорреляционная функция
ВКФ	- взаимокорреляционная функция
СХ	- статическая характеристика
ДХ	- динамическая характеристика
ОЗРВ	- одномерный закон распределения вероятностей
ПСЧЭ	- пьезосорбционный чувствительный элемент

## СПИСОК ОБОЗНАЧЕНИЙ

$x(t)$	- мгновенное значение входного измерительного сигнала
$\overset{\circ}{x}(t)$	- мгновенное центрированное значение входного измерительного сигнала
$\varepsilon(t)$	- мгновенное значение влияющей величины
$\overset{\circ}{\varepsilon}(t)$	- мгновенное центрированное значение влияющей величины сигнала
$\mu_x$	- математическое ожидание случайной величины $x$
$\sigma_x^2$	- дисперсия случайной величины $x$
$x(k)$	- решетчатый случайный процесс (дискретизированный по времени)
$S(\omega)$	- спектральная плотность мощности случайного процесса
$W(j\omega)$	- комплексная передаточная функция динамического звена
$\delta_{дин}, \Delta_{дин}$	- относительная динамическая погрешность, абсолютная динамическая погрешность
$\delta_{доп}, \Delta_{доп}$	- относительная дополнительная погрешность, абсолютная дополнительная погрешность
$\delta_{ст}, \Delta_{ст}$	- относительная статическая погрешность, абсолютная статическая погрешность
$\delta_{\Sigma}, \Delta_{\Sigma}$	- суммарная относительная погрешность, суммарная абсолютная погрешность
$\delta_{\Sigma зад}$	- заданное значение суммарной погрешности;
$\rho, \rho(\tau)$	- нормированный коэффициент корреляции, нормированная корреляционная (автокорреляционная) функция
$R, R(\tau)$	- коэффициент корреляции (ковариация), корреляционная (автокорреляционная) функция (автоковариационная функция)
$M\{\cdot\}$	- символ операции вычисления математического ожидания
$D\{\cdot\}$	- символ операции вычисления дисперсии
$\hat{B}$	- оценка значения величины $B$
$V\{\cdot\}$	- символ операции вычисления вариации
$v_x$	- вариация случайной величины $x$

## ГЛАВА 1

### ИЗМЕРЕНИЯ. ИНФОРМАЦИОННО - ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ

#### 1.1 Погрешности измерений

Погрешность результата измерения (погрешность измерения) – отклонение результата измерения от истинного (действительного) значения измеряемой величины. Формально погрешность можно представить выражением:

$$\Delta = x - x^*, \quad (1.1)$$

где  $\Delta$  – абсолютная погрешность измерения;  $x$  – результат измерения физической величины;  $x^*$  – истинное значение измеряемой физической величины (физическая величина, представленная ее истинным значением).

Классификация погрешностей измерений может осуществляться по разным классификационным признакам (основаниям), например:

- по источникам возникновения (например, инструментальные погрешности, субъективные погрешности),
- по характеру проявления или изменения от измерения к измерению (случайные, систематические и грубые),
- по значимости (значимые, пренебрежимо малые),
- по причинам, связанным с режимом измерения (статические и динамические),
- по уровню имеющейся информации (определенные и неопределенные),
- по формам выражения (абсолютные и относительные погрешности),
- по формам используемых оценок (среднеквадратическое значение, доверительные границы погрешности и др.).

Рассмотрим более подробно некоторые из классификаций. Поскольку деление погрешностей по источникам их возникновения не является самоцелью, а используется для выявления составляющих, наиболее часто используется и представляется достаточно логичной следующая классификация (в соответствии с [1]):

- погрешности средств измерений (они же "аппаратурные погрешности" или "инструментальные погрешности");
- методические погрешности или "погрешности метода измерения";

- погрешности из-за отличия условий измерения от нормальных ("погрешности условий");
- субъективные погрешности измерения ("погрешности оператора", или же "личные" либо "личностные погрешности").

*Инструментальная погрешность измерения* (инструментальная погрешность) – составляющая погрешности измерения, обусловленная погрешностью применяемого средства измерений.

*Погрешность метода измерений* (погрешность метода) – составляющая систематической погрешности измерений, обусловленная несовершенством принятого метода измерений. В примечаниях [1] говорится, что иногда погрешность метода может проявляться как случайная. Если погрешность от некоторого источника может проявляться как систематическая и как случайная, не имеет смысла связывать характер погрешности с ее источником. Далее там же сказано, что погрешность метода иногда называют теоретической погрешностью – по видимому из этого обстоятельства последовал вывод о систематическом характере этой погрешности. Фраза первого примечания «Вследствие упрощений, принятых в уравнениях для измерений, нередко возникают существенные погрешности, для компенсации действия которых следует вводить поправки» базируется на предположении о систематическом характере погрешности.

*Погрешность (измерения) из-за изменений условий измерения* – составляющая систематической погрешности измерения, являющаяся следствием неучтенного влияния отклонения в одну сторону какого-либо из параметров, характеризующих условия измерений, от установленного значения.

Как и в предыдущем случае, определение содержит не совсем корректное указание на систематический характер погрешности. Кроме того, погрешности связывают с неучтенным отклонением влияющей величины в одну сторону (а как быть с ее колебанием при многократных измерениях?). «Неучтенное или недостаточно учтенное действие (влияние)» не имеет никакого смысла в определении источника погрешности – это проблема обнаружения и оценки погрешности. Под неправильной установкой средств измерений, нарушением правил их взаимного расположения, скорее всего, понимают возможность нежелательного воздействия на средства измерений силы тяжести, взаимное воздействие на приборы их собственных полей (точнее, присущих этим полям влияющих величин).

Наиболее логичным представляется термин «погрешности из-за отличия условий измерения от идеальных (нормальных)». Фактически эти погрешности имеют место тогда, когда не удается выдержать нормальные условия измерений.

Нормальные условия связаны с понятием влияющих физических величин, то есть тех, которые не являются измеряемыми, но оказывают влияние на результаты измерений, воздействуя на объект и/или средства измерений. Пределы допустимых изменений таких величин или их отклонений от номинальных значений нормируют либо нормальной областью значений (для обеспечения нормальных условий измерения) или рабочей областью значений (для обеспечения рабочих условий измерений). При нормальных условиях измерений возникают погрешности, вызванные отличием влияющих величин от номинальных (идеальных) значений. Однако нормальные условия назначают таким образом, чтобы "погрешности условий" оказались пренебрежимо малыми, например, по сравнению с инструментальными составляющими. В таком случае "погрешности условий" можно считать практически равными нулю.

Погрешности условий могут возникать либо из-за закономерно изменяющегося отличия влияющей величины от ее номинального значения, либо из-за стохастических колебаний около него. Например, если рассматривать температурные погрешности, то они могут возникать из-за стабильного отличия температуры от нормальной (при измерениях длины температура 25 °С, а не 20 °С вызовет постоянную температурную погрешность), а постепенный рост температуры в помещении от начала к концу рабочей смены приведет к переменной температурной погрешности. Кроме того, как бы мы ни старались поддерживать постоянную температуру, никакие технические устройства не обеспечат ее абсолютной стабильности в помещении. Невозможно полностью компенсировать воздействия ряда случайных факторов вне и внутри рабочего помещения (изменение теплообмена при движении воздушных масс, воздействии солнечных лучей, вносе и выносе деталей, перемещении операторов и заказчиков, включении и выключении приборов и т.д.). В результате возникают стохастические колебания температуры и случайно изменяющаяся составляющая температурной погрешности.

*Субъективная погрешность измерения (субъективная погрешность)* – составляющая систематической погрешности измерений, обусловленная индивидуальными особенностями оператора.

К систематическим погрешностям измерений можно отнести те составляющие, для которых можно считать доказанным наличие функциональных связей с вызывающими их аргументами. Для них можно предложить следующее определение: систематическая погрешность – закономерно изменяющаяся составляющая погрешности измерений. Формально это записывается в виде:

$$\Delta_s = F(\varphi, \psi, \dots),$$

где  $\varphi, \psi$  – аргументы, вызывающие систематическую погрешность.

Главной особенностью систематической погрешности является принципиальная возможность ее выявления, прогнозирования и однозначной оценки, если удастся узнать вид функции и значения аргументов.

В зависимости от характера измерения систематические погрешности подразделяют на элементарные и изменяющиеся по сложному закону. Элементарные погрешности можно условно разделить на постоянные, прогрессирующие и периодические. Прогрессирующими называют монотонно возрастающие или монотонно убывающие погрешности. Периодические погрешности – погрешности, изменение которых можно описать периодической функцией. Погрешности, изменяющиеся по сложному закону, образуются при объединении нескольких систематических погрешностей.

*Случайными погрешностями* в строгом смысле термина можно считать только те, которые обладают статистической устойчивостью (ведут себя как центрированная случайная величина). Причиной появления таких погрешностей чаще всего является совокупное действие ряда слабо влияющих дестабилизирующих факторов, связанных с любыми источниками погрешностей, причем функциональные связи этих факторов (аргументов) с погрешностями либо отсутствуют (в наличии только стохастические зависимости), либо не могут быть выявлены из-за неопределенности действующих факторов и большого их числа.

В некоторых метрологических источниках грубые погрешности измерений относят к случайным, что соответствует неверной трактовке понятия случайности и маскирует различия механизмов возникновения собственно случайных и грубых погрешностей.

Поскольку речь идет не столько о средствах измерений, сколько об их работе в специфическом режиме, динамическую погрешность не следует считать инструментальной. Эту погрешность нужно рассматривать более широко – как составляющую итоговой (интегральной) погрешности, обусловленную динамическим режимом измерений.



Качественные характеристики погрешностей в простейшем случае ограничиваются указанием их детерминированного или стохастического характера. Для систематических погрешностей дополнительно может быть указан характер зависимости (постоянная, прогрессирующая, периодическая), а при более полной информации – функция, описывающая изменение погрешности.

Для случайных погрешностей качественной характеристикой может быть аппроксимация функции плотностей распределения вероятностей. В метрологии приняты и наиболее часто применяются нормальное распределение (распределение Гаусса), равномерное, трапециевидное и распределение Релея. При необходимости используют и другие аппроксимации.

Случайная составляющая погрешности вызывает рассеяние результатов измерений, которое обычно обусловлено проявлением случайных причин и носит вероятностный характер. Рассеяние результатов в ряду измерений – несовпадение результатов измерений одной и той же величины в ряду равноточных измерений, как правило, обусловленное действием случайных погрешностей. Количественными оценками рассеяния результатов в ряду измерений могут быть:

- размах;
- средняя арифметическая погрешность (по модулю);
- среднеквадратическая погрешность или стандартное отклонение (среднеквадратическое отклонение, экспериментальное среднеквадратическое отклонение);
- доверительные границы погрешности (доверительная граница или доверительная погрешность).

Более строгими в математическом смысле оценками погрешностей можно считать среднее арифметическое значение погрешности в серии результатов, среднеквадратическое отклонение погрешности от фиксированного значения результата измерения, границы погрешности.

Среднеквадратическая погрешность результатов единичных измерений в ряду измерений (среднеквадратическая погрешность измерений; среднеквадратическая погрешность; СКП) – оценка рассеяния единичных результатов измерений в ряду равноточных измерений одной и той же физической величины около среднего их значения. В метрологической практике широко распространен термин среднеквадратическое отклонение (СКО) единичных результатов в ряду измерений от их среднего арифметического значения. Это отклонение иногда называют стандартной погрешностью измерений. Если в результаты измерений

введены поправки для устранения систематических погрешностей, то отклонения от среднего арифметического значения можно рассматривать как случайные погрешности.

*Предельная погрешность* измерения в ряду измерений (предельная погрешность) – максимальная погрешность измерения (плюс, минус), допускаемая для данной измерительной задачи.

## 1.2 Средства измерений

*Средства измерительной техники (измерительная техника)* – обобщающее понятие, охватывающее технические средства, специально предназначенные для измерений. В примечании поясняется, что к средствам измерительной техники относят средства измерений и их совокупности (измерительные системы, измерительные установки), измерительные принадлежности, измерительные устройства.

*Измерительные принадлежности* – вспомогательные средства, служащие для обеспечения необходимых условий для выполнения измерений с требуемой точностью. Приведенные в [1] примеры включают термостат, специальные противовибрационные фундаменты, треногу для установки прибора по уровню и другие устройства, предназначенные для защиты объекта измерений и средств измерений от действия влияющих величин. В перечислении отсутствуют принадлежности к концевым мерам угла или длины, оправки, установочные призмы и иные технические средства, которые по технической сути значительно ближе к «принадлежностям».

*Средство измерений* – техническое средство, предназначенное для измерений, имеющее нормированные метрологические характеристики, воспроизводящее и (или) хранящее единицу физической величины, размер которой принимают неизменным (в пределах установленной погрешности) в течение известного интервала времени. Основным признаком в данном определении являются нормированные метрологические характеристики, что подразумевает и возможность воспроизведения единицы физической величины с требуемой точностью, и ее сохранение на протяжении всего периода метрологической пригодности средства измерений.

В зависимости от функционального назначения и конструктивного исполнения различают такие виды средств измерений, как меры, измерительные пре-

образователи, измерительные приборы, индикаторы, измерительные установки, измерительные системы, измерительно-вычислительные комплексы.

*Мера физической величины (мера величины; мера)* – средство измерений, предназначенное для воспроизведения и (или) хранения физической величины одного или нескольких заданных размеров, значения которых выражены в установленных единицах *и известны с необходимой точностью*.

*Набор мер* – комплект мер разного размера одной и той же физической величины, предназначенных для применения на практике как в отдельности, так и в различных сочетаниях (например, наборы концевых мер длины, угловых концевых мер, наборы разновесов). *Магазин мер* – набор мер, конструктивно объединенных в единое устройство, в котором имеются приспособления для их соединения в различных комбинациях (например, магазин электрических сопротивлений).

*Измерительный преобразователь* – техническое средство с нормированными метрологическими характеристиками, служащее для преобразования измеряемой величины в другую величину или измерительный сигнал, удобный для обработки, хранения, дальнейших преобразований, индикации или передачи. Примеры измерительных преобразователей – термopара, пружина динамометра, микрометрическая пара винт-гайка.

Отличительной особенностью измерительного преобразователя является выдача им измерительной информации в форме, не поддающейся непосредственному восприятию оператором. По характеру входного и выходного сигналов различают аналоговые, цифро-аналоговые, аналого-цифровые преобразователи. По месту, занимаемому в измерительной цепи различают преобразователи первичные и промежуточные. Преобразователи с пропорциональным преобразованием сигнала измерительной информации называют масштабными.

*Первичный измерительный преобразователь (первичный преобразователь)* – измерительный преобразователь, на который непосредственно воздействует измеряемая физическая величина, т. е. первый преобразователь в измерительной цепи измерительного прибора (установки, системы). В одном средстве измерений может быть несколько первичных преобразователей, например, ряд термopар измерительной установки, предназначенной для контроля температуры в разных точках холодильной емкости.

*Датчик* – конструктивно обособленный первичный преобразователь, от которого поступают измерительные сигналы (он «дает» информацию). Датчики

метеорологического зонда или стационарной метеостанции передают измерительную информацию о температуре, давлении, влажности и других параметрах атмосферы, причем они могут находиться на значительном расстоянии от принимающего его сигналы средства измерений.

*Измерительный прибор (прибор)* – средство измерений, предназначенное для получения значений измеряемой физической величины в установленном диапазоне. Измерительный прибор предназначен для получения измерительной информации от измеряемой физической величины, ее преобразования и выдачи в форме, поддающейся непосредственному восприятию оператором. Прибор включает в себя один или несколько измерительных преобразователей и присоединенное к ним устройство отображения измерительной информации типа шкала-указатель, указатель-диаграммная бумага, числовое табло. В зависимости от системы представления информации различают показывающие или регистрирующие приборы, причем регистрирующие могут быть записывающими либо печатающими, а в зависимости от формы выходного сигнала различают приборы с аналоговым либо с дискретным выходом («дискретные» приборы часто называют «цифровыми»). Следует обратить внимание, что вид устройства отображения измерительной информации не определяет форму выходного сигнала: система шкала-указатель электронно-механических часов принадлежат «дискретным» приборам, а изменение выходного сигнала бытового счетчика электроэнергии на правом барабане цифрового табло носит непрерывный характер.

*Средство сравнения* – техническое средство или специально создаваемая среда, посредством которых возможно выполнять сравнения друг с другом мер однородных величин или показания измерительных приборов.

*Индикатор* – техническое средство или вещество, предназначенное для установления наличия какой-либо физической величины или превышения уровня ее порогового значения. Индикатор близости к нулю сигнала называют нулевым или нуль-индикатором. При химических реакциях в качестве индикатора применяют лакмусовую бумагу и какие-либо вещества. В области измерений ионизирующих излучений индикатор часто дает световой и (или) звуковой сигнал о превышении уровнем радиации его порогового значения.

*Основное средство измерений* – средство измерений той физической величины, значение которой необходимо получить в соответствии с измерительной задачей.

*Вспомогательное средство измерений* – средство измерений той физической

величины, влияние которой на основное средство измерений или объект измерений необходимо учитывать для получения результатов измерений требуемой точности. Примером вспомогательного средства измерений является термометр для измерения температуры газа в процессе измерений объемного расхода этого газа.

*Измерительная установка (установка)* – совокупность функционально объединенных мер, измерительных приборов, измерительных преобразователей и других устройств, предназначенная для измерений одной или нескольких физических величин и расположенная в одном месте. В примечаниях сказано, что существуют эталонные и поверочные установки, а некоторые большие измерительные установки называют измерительными машинами.

*Измерительная система* – совокупность функционально объединенных мер, измерительных приборов, измерительных преобразователей, ЭВМ и других технических средств, размещенных в разных точках контролируемого объекта и т.п. с целью измерений одной или нескольких физических величин, свойственных этому объекту, и выработки измерительных сигналов в разных целях.

### **1.3 Особенности функционирования информационно - измерительных систем в составе АСУ ТП**

Основной особенностью работы измерительного оборудования в составе АСУ ТП является реализация принципа системных измерений. Под системными измерениями пониматься измерения реализующие следующие принципы [2]:

- большое количество измеряемых величин;
- необходимость синхронизации во времени измерений этих величин;
- распределенный в пространстве объект измерения;
- необходимость передачи измерительной информации на значительные расстояния;
- необходимость комплексных обобщенных оценок;
- многообразие форм представления и регистрации результатов измерений.

Кроме того, при работе в составе АСУ ТП измерительная система несет так же информационные функции, т.е. обладает следующими особенностями:

- отбор информации непосредственно от объекта;
- конструктивная обособленность отдельных компонентов, и как следствие модульный способ построения;
- многоканальность;

- общее управление измерительными каналами;
- разнесенность элементов, а, следовательно, достаточно длинные линии связи;
- возможность автоматизации процесса измерений;
- обработка больших массивов информации.

Как следует из перечисленных выше особенностей, в приложении к технологически процессам, следует, что измерительный прибор располагается непосредственно на объекте измерения (объектах технологического оборудования), а следовательно подвержен влиянию внешних факторов, приводящих к возникновению дополнительных погрешностей. Следует отметить, что в настоящее время существует устойчивая тенденция роста доли аналитических измерений, приводящая к росту парка приборов анализа состава веществ, которые, как известно, более подвержены влиянию неконтролируемых факторов и имеют значительную дополнительную погрешность.

Рассмотрим влияние погрешности измерений на качество управления технологическим процессом. В рамках теории систем в настоящее время имеется два вида математического описания. Первый из них описывает систему извне и описывает связь входа с выходом. При втором подходе структура системы предполагается известной, т.е. предполагается известным механизм преобразования входных процессов в выходные. Вторым подход является единственно возможным при моделировании сложных измерительных систем.

Для построения формального описания целей исследования рассмотрим теоретико-множественное описание системы ОБЪЕКТ – ИИС – РЕГУЛЯТОР, приведенной на рис. 1.1.

Для получения информации о состоянии объекта управления с помощью ИИС производится измерение текущих значений элементов вектора выходных координат  $[Y]$  (рис. 1.1). Как известно процедура измерения принципиально не может быть выполнена без погрешности, т.е. вектор результатов измерений на выходе ИИС  $[\tilde{Y}]$  (рис. 1.1) будет представлять собой сумму:

$$[\tilde{Y}] = [Y] + [\Delta], \quad (1.2)$$

где  $[\Delta]$  - вектор погрешностей измерительной системы. С другой стороны, вектор результатов измерений определяется некоторым функционалом:

$$[\tilde{Y}] = \mathbb{F}\{[Y], [E], [Pi]\},$$

от вектора истинных значений измеряемых выходных координат  $[Y]$ , вектора внутренних параметров измерительных каналов ИИС  $[P_i]$  и вектора влияющих величин  $[E]$ .

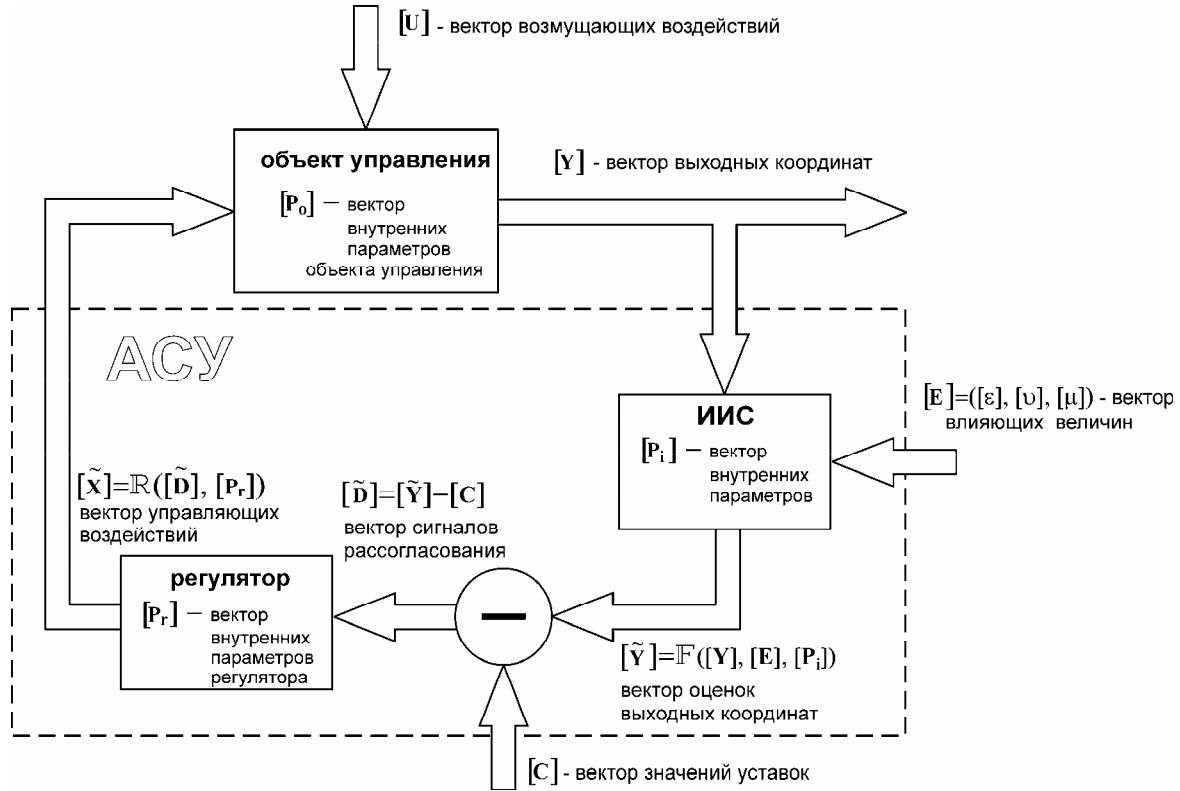


Рис. 1.1 Система ОБЪЕКТ – ИИС – РЕГУЛЯТОР

Полученные таким образом значения сравниваются со значениями, заданными технологическим регламентом (на рис. 1.1 - вектор уставок  $[\tilde{N}]$ ), а разность  $[\tilde{D}] = [\tilde{Y}] - [\tilde{N}]$  поступает на вход регулятора, вырабатывающего управляющее воздействие  $[\tilde{X}]$  на ТОУ:

$$[\tilde{X}] = \mathbb{R}\{[\tilde{D}], [P_r]\},$$

как некоторый функционал  $\mathbb{R}\{\bullet\}$  от вектора внутренних параметров регулятора  $[P_r]$  и вектора  $[\tilde{D}]$  формирование которого, с учетом (1.2) определяется как  $[\tilde{D}] = [Y] + [\Delta] - [C]$ . Таким образом, погрешность измерительной системы век-

тор  $[\Delta]$  явным образом присутствует в функционале формирования управляющего воздействия  $[\tilde{X}] = \mathbb{R}\{([\mathbf{D}] + [\Delta]), [\mathbf{Pr}]\}$  или:

$$[\tilde{X}] = \mathbb{R}\left\{\left(\mathbb{F}\{[\mathbf{Y}], [\mathbf{E}], [\mathbf{Pi}]\} - [\mathbf{C}]\right), [\mathbf{Pr}]\right\} \quad (1.3)$$

и приводит невозможности сформировать требуемое воздействие, определяемое как  $[\mathbf{X}] = \mathbb{R}\{[\mathbf{D}], [\mathbf{Pr}]\}$ .

Как видно из выражения (1.3), сформированное АСУТП управляющее воздействие на ТОУ содержит под знаком функционалов измерительной системы и регулятора (соответственно  $\mathbb{F}\{\cdot\}$  и  $\mathbb{R}\{\cdot\}$ ) вектора  $[\mathbf{E}]$  и  $[\mathbf{Pi}]$  определяющие основной параметр ИИС - погрешность измерений.

Таким образом, на основе рассмотренных соотношений, можно утверждать, что погрешность, вносимая в результат измерения, непосредственно влияет на качество управления объектом и во многом определяет эффективность работы системы в целом. И как было указано в [3, 4], некорректная оценка погрешности может привести к большим экономическим потерям.

Информационно - измерительная система АСУ ТП представляет собой, как правило, многоканальную систему, где число измерительных каналов может достигать нескольких сотен. Структура измерительного канала определяется измерительной задачей, которую он реализует, и общей методологией построения системы. В общем случае, в канале можно выделить измерительную и информационную части. К измерительной части относят: первичный измерительный преобразователь, нормирующие преобразователи, групповые нормирующие преобразователи, коммутаторы, АЦП. Все элементы измерительной части ИИС имеют нормируемые метрологические характеристики, и оказывают непосредственное влияние на суммарную погрешность канала. К информационной части относятся цифровые линии связи, базы данных, программные компоненты и др. Измерительная информация в информационной части канала представляется в цифровом виде и, как правило, проводимые информационные процедуры не вносят в результат измерения погрешностей.

Рассмотрим типовые структуры измерительных каналов (измерительной части), вариант одной из которых представлен на рис. 1.2.



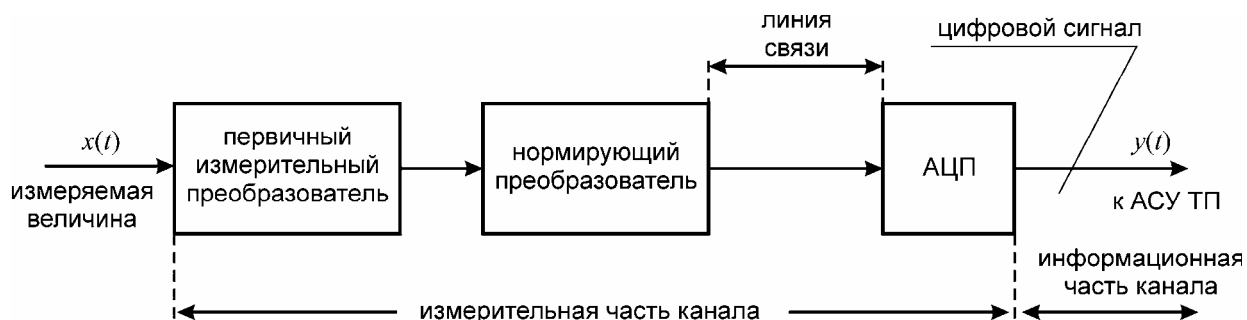


Рис. 1.2 Структура типового измерительного канала

В случае групповой организации измерительных каналов структура может быть иметь вид, представленный на рис. 1.3.

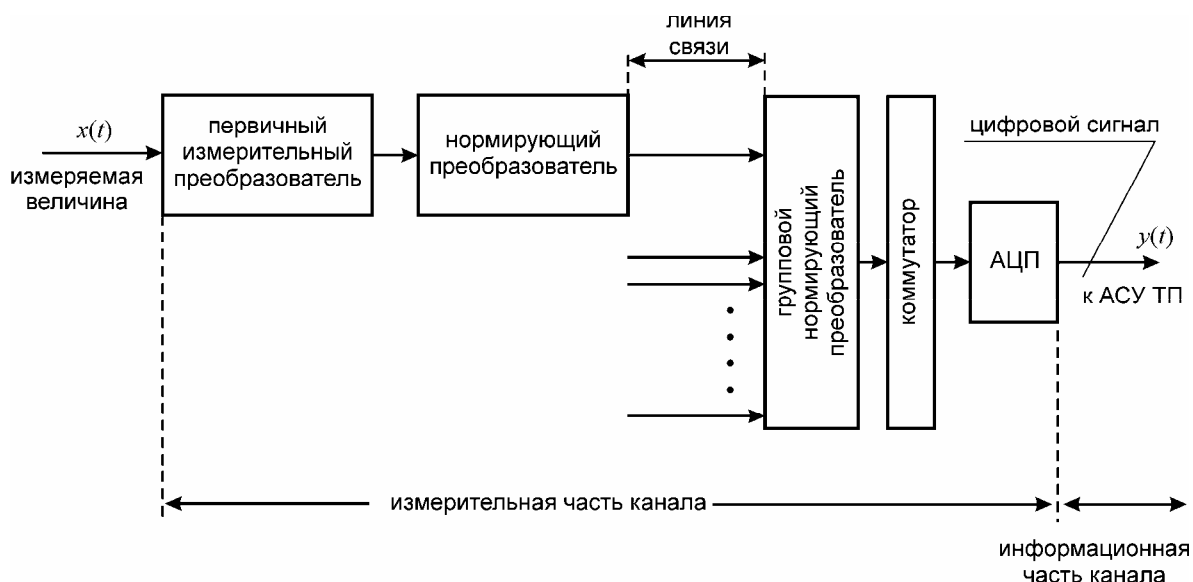


Рис. 1.3. Структура типового измерительного канала, при групповой организации.

Метрологические характеристики каждого элемента измерительного канала нормируются в отдельности, суммарная погрешность канала рассчитывается по какой либо методики.

Следует отметить, что имеется достаточно большой класс приборов, полностью реализующих измерительные функции и представляющие результат измерения в виде цифрового кода, в том или ином стандарте. Погрешность таких приборов включает в себя погрешности всех компонент реализованного в них измерительного канала, остальные функции преобразования измеряемой величины (за выходным интерфейсом прибора) можно отнести к информационным и не учитывать при анализе погрешности канала.

## ГЛАВА 2

### ИЗМЕРИТЕЛЬНЫЕ СИГНАЛЫ И ВЛИЯЮЩИЕ ВЕЛИЧИНЫ

#### 2.1 Классификация сигналов

Сигналом называется материальный носитель информации, представляющий собой некоторый физический процесс, один из параметров которого функционально связан с измеряемой физической величиной. Такой параметр называют информативным.

*Измерительный сигнал* — это сигнал, содержащий количественную информацию об измеряемой физической величине. Классификация измерительных сигналов по различным признакам приведена на рис. 2.1.

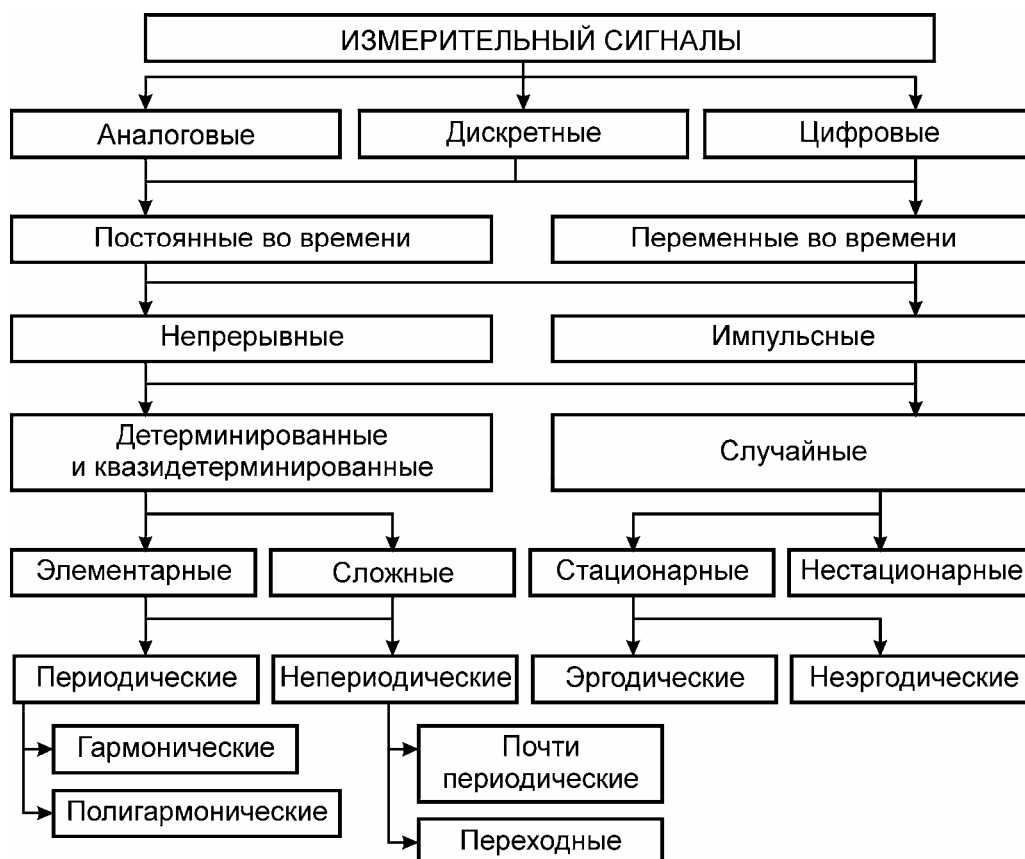


Рис. 2.1 Классификация измерительных сигналов

По характеру измерения информативного и временного параметров измерительные сигналы делятся на аналоговые, дискретные и цифровые.

*Аналоговый сигнал* — это сигнал, описываемый непрерывной или кусочно-

непрерывной функцией  $Y_a(t)$ , причем как сама эта функция, так и ее аргумент  $t$  могут принимать любые значения на заданных интервалах  $Y \in (Y_{\min}, Y_{\max})$  и  $t \in (t_{\min}, t_{\max})$  (рис. 2.2, а).

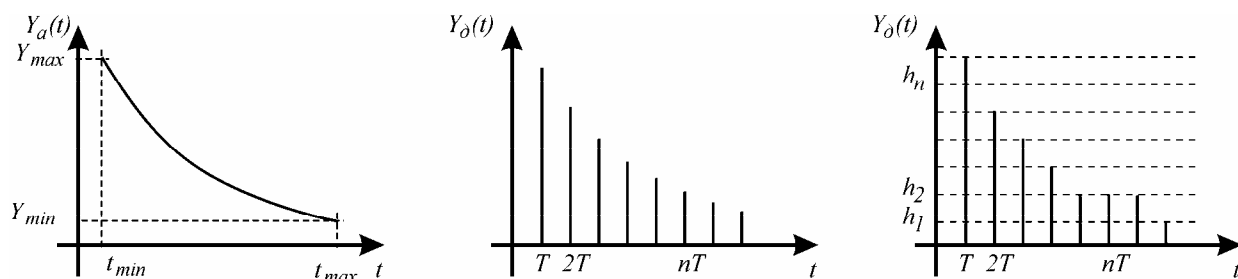


Рис. 2.2. Аналоговый (а), дискретный (по времени) (б) и цифровой (в) измерительные сигналы

*Дискретный сигнал* — это сигнал, изменяющийся дискретно во времени или по уровню. В первом случае он может принимать в дискретные моменты времени  $nT$ , где  $T = \text{const}$  — интервал (период) дискретизации,  $n = 0, 1, 2, \dots$  — целое, любые значения  $Y(nT) \in (Y_{\min}, Y_{\max})$ , называемые выборками, или отсчетами. Такие сигналы (рис. 2.2, б) описываются решетчатыми функциями. Во втором случае значения сигнала  $Y(t)$  существуют в любой момент времени  $t \in (t_{\min}, t_{\max})$ , однако они могут принимать ограниченный ряд значений  $h_i = nq$ , кратных кванту  $q$ .

*Цифровые сигналы* — квантованные по уровню и дискретные по времени сигналы  $Y_u(nT)$ , которые описываются квантованными решетчатыми функциями (квантованными последовательностями), принимающими в дискретные моменты времени  $nT$  лишь конечный ряд дискретных значений — уровней квантования  $h_1, h_2, \dots, h_n$  (рис. 2.2, в).

По характеру изменения во времени сигналы делятся на постоянные, значения которых с течением времени не изменяются, и переменные, значения которых меняются во времени. Постоянные сигналы являются наиболее простым видом измерительных сигналов.

Переменные сигналы могут быть непрерывными во времени и импульсными. Непрерывным называется сигнал, параметры которого изменяются непрерывно. Импульсный сигнал — это сигнал конечной энергии, существенно отличный от нуля в течение ограниченного интервала времени.

По степени наличия априорной информации переменные измерительные сигналы делятся на *детерминированные*, *квазидетерминированные* и *случайные*. *Детерминированный сигнал* — это сигнал, закон изменения которого известен, а модель не содержит неизвестных параметров. Мгновенные значения детерминированного сигнала известны в любой момент времени. Детерминированными (с известной степенью точности) являются сигналы на выходе мер. Например, выходной сигнал генератора низкочастотного синусоидального сигнала характеризуется значениями амплитуды и частоты, которые установлены на его органах управления. Погрешности установки этих параметров определяются метрологическими характеристиками генератора.

*Квазидетерминированные* сигналы — это сигналы с частично известным характером изменения во времени, т.е. с одним или несколькими неизвестными параметрами.

Детерминированные и квазидетерминированные сигналы делятся на элементарные, описываемые простейшими математическими формулами, и сложные. К элементарным относятся постоянный и гармонический сигналы, а также сигналы, описываемые единичной и дельта-функцией. К сложным сигналам относятся импульсные и модулированные сигналы.

Сигналы могут быть *периодическими* и *непериодическими*. Непериодические сигналы делятся на почти периодические и переходные. Почти периодическим называется сигнал, значения которого приближенно повторяются при добавлении к временному аргументу надлежащим образом выбранного числа — почти периода. Периодический сигнал является частным случаем таких сигналов. Почти периодические функции получаются в результате сложения периодических функций с несоизмеримыми периодами, например  $Y(t) = \sin(\omega t) + \sin(\sqrt{2}\omega t)$ .

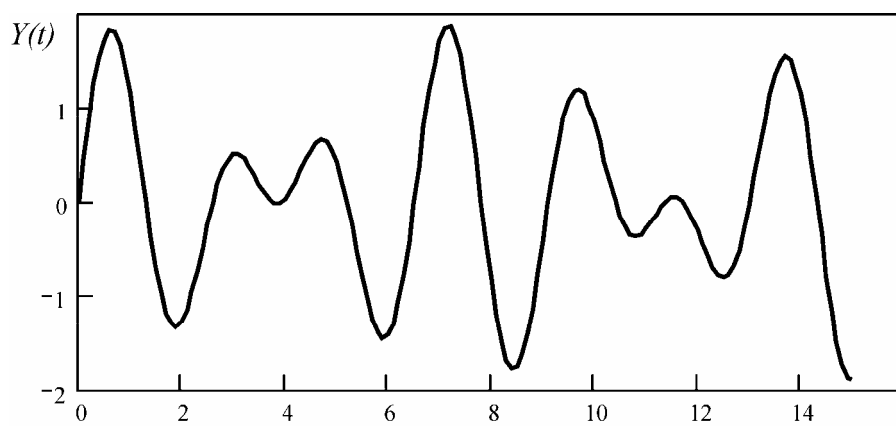


Рис. 2.3 Пример квазидетерминированного сигнала

*Переходные* сигналы описывают переходные процессы в физических системах.

*Периодическим* называется сигнал, мгновенные значения которого повторяются через постоянный интервал времени. Период  $T$  сигнала — параметр, равный наименьшему такому интервалу времени. Частота  $f$  периодического сигнала — величина, обратная периоду

Периодический сигнал характеризуется спектром. Различают три вида спектра:

- *комплексный* — комплексная функция дискретного аргумента, кратного целому числу значений частоты  $\omega$  периодического сигнала  $Y(t)$ , представляющая собой значения коэффициентов комплексного ряда Фурье:

$$A(k\omega) = \frac{2}{T} \int_{-T/2}^{+T/2} Y(t) e^{-j\omega kt} dt, \quad (2.1)$$

где  $k$  — любое целое положительное число;

- *амплитудный* — функция дискретного аргумента, представляющая собой модуль комплексного спектра периодического сигнала:

$$G(k\omega) = |A(k\omega)| = \sqrt{\operatorname{Re}^2[A(k\omega)] + \operatorname{Im}^2[A(k\omega)]}, \quad (2.2)$$

где  $\operatorname{Re}(z)$ ,  $\operatorname{Im}(z)$  - действительная и мнимая части комплексного числа  $z$ ;

- *фазовый* — функция дискретного аргумента, представляющая собой аргумент комплексного спектра периодического сигнала:

$$\varphi(k\omega) = \arg[A(k\omega)] = \operatorname{arctg} \frac{\operatorname{Im}[A(k\omega)]}{\operatorname{Re}[A(k\omega)]}. \quad (2.3)$$

Периодические сигналы бывают *гармоническими*, т.е. содержащими только одну гармонику, и *полигармоническими*, спектр которых состоит из множества гармонических составляющих. К гармоническим сигналам относятся сигналы, описываемые функцией синуса или косинуса. Все остальные сигналы являются полигармоническими.

*Случайный сигнал (случайный процесс)* — это изменяющаяся во времени физическая величина, мгновенное значение которой является случайной величиной.

## 2.2 Описание случайных процессов

*Случайные процессы* — это изменяющиеся во времени случайные физические величины. Случайные процессы, для которых независимой переменной является время  $t$ , называются также *стохастическими процессами*.

Набор случайных величин при измерении случайного процесса позволяет получить некоторые обобщенные параметры изменяющихся во времени случайных функций. Конкретная совокупность значений, принимаемых случайным процессом, называется реализацией случайного процесса. При многократном повторении эксперимента (измерения) получают совокупность реализаций случайного процесса.

Изменяющаяся случайная величина может зависеть не только от времени, но и от других параметров. Тогда имеют дело со случайными функциями нескольких переменных. Функция, значение которой при каждом данном значении независимой переменной является случайным, называется случайной.

Допустим, что в результате каких-либо измерений, получен ансамбль случайных функций  $x(t)$ , характеризующих данный стохастический процесс (рис. 2.4). Очевидно, что функции  $x(t)$  в каждый момент времени  $t_k$  будут иметь различные значения  $[x_i(t)]_{t=t_k} = \xi_i(t_i)$  и, следовательно, отличаться друг от друга. Это обусловлено различными случайными факторами, воздействующими на результат измерения. Статистические методы изучения случайных процессов ставят себе задачей не изучение каждой из функций  $x_i(t)$ , входящих в совокупность функций  $\xi(t)$ , характеризующих данный процесс, а изучение свойств всего множества в целом при помощи усреднения свойств входящих в него функций. Для описания случайных процессов так же, как и случайных величин, используют дифференциальные и интегральные функции распределения вероятности. Эти функции позволяют определять моментные и корреляционные функции, которые являются более простыми, чем функции распределения, но позволяют оценивать поведение случайных процессов во времени более зримо.

Если действительный случайный процесс  $\xi(t)$  характеризуется плотностью распределения  $p(x, t)$ , то математическое ожидание процесса, соответствующее времени  $t$ , будет:

$$m_{\xi}(t) = M \{ \xi(t) \} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x,t)dx, \quad (2.4)$$

Для характеристики внутренней связи действительного случайного процесса определяется момент второго порядка, называемый *ковариационной функцией*:

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = M \{ \xi(t_1), \xi(t_2) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 x_2 p(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2,$$

где  $x_1$  и  $x_2$  берутся соответственно в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  и могут принимать значения на всей области изменения  $x$ ,  $p(x_1, x_2, t_1, t_2)$  - двумерная функция плотности вероятности. Для вычисления этой функции при фиксированных моментах времени  $t_1$  и  $t_2$  определяются попарно значения  $x_1(t_1)$  и  $x_2(t_2)$  для всех реализаций случайного процесса. Затем строится двумерная функция  $p(x_1, x_2)$ .

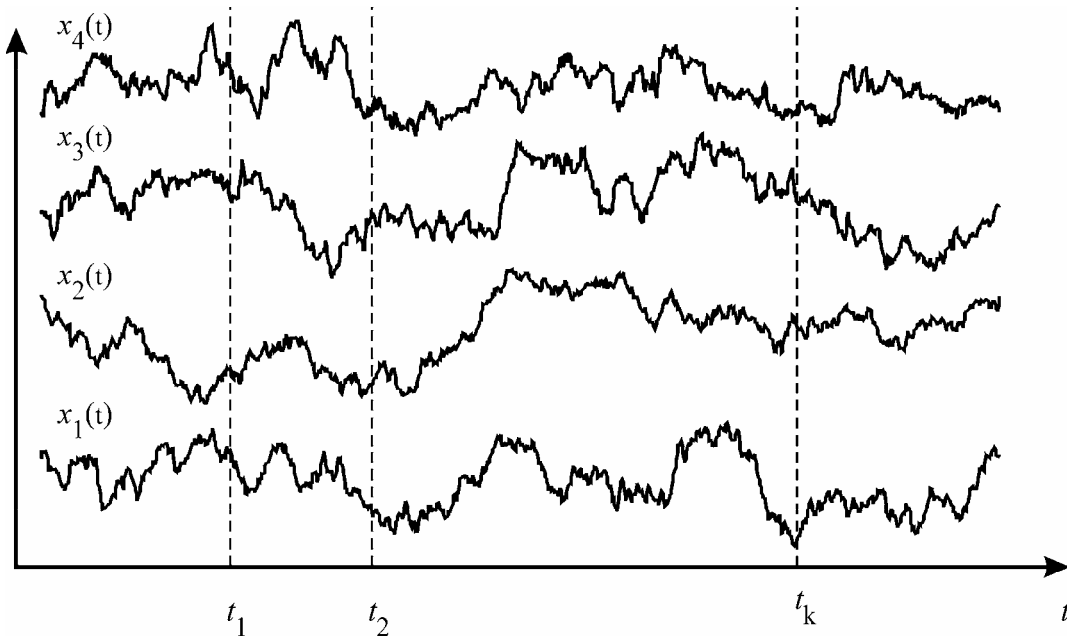


Рис. 2.4. Реализации случайных эргодических процессов

Центральный момент второго порядка называется автокорреляционной, или корреляционной функцией (КФ):

$$\begin{aligned} R_{\xi}(t_1, t_2) &= M \{ [\xi(t_1) - m_{\xi}(t_1)] [\xi(t_2) - m_{\xi}(t_2)] \} = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [x_1 - m_{\xi}(t_1)] [x_2 - m_{\xi}(t_2)] p(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2, \end{aligned} \quad (2.5)$$

который следующим образом связан с ковариационной функцией:

$$K_{\xi}(t_1, t_2) = R_{\xi}(t_1, t_2) + m_{\xi}(t_1)m_{\xi}(t_2),$$

$m_{\xi}(t_1)$  и  $m_{\xi}(t_2)$  - математическое ожидание случайного процесса  $\xi(t)$  в моменты времени  $t_1$  и  $t_2$  соответственно.

Представленные выше характеристики случайных процессов определялись через соответствующие средние значения большого числа реализаций случайных процессов, т.е. с помощью анализа результатов измерений «поперек процесса». Оказывается, что для многих случайных процессов указанные характеристики можно получить путем усреднения «вдоль процесса», т.е. по одной реализации достаточно большой длительности. Такие случайные процессы относятся к эргодическим, представляющим собой разновидность случайных стационарных процессов. Приведем определения этих процессов.

*Эргодический процесс* — случайный процесс, статистические свойства которого могут быть определены по одной его реализации достаточно большой длительности и для которого средние значения (моменты) по времени равны средним значениям по ансамблю.

*Стационарный процесс* — это случайный процесс, характеристики которого не зависят от начала отсчета во времени.

Стационарность процесса является необходимым, но не достаточным условием для признания процесса эргодическим. Эргодичность — более жесткое требование стабильности и воспроизводимости случайного процесса. Например, случайный процесс вида  $\xi(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$ , где амплитуда  $A$  и начальная фаза процесса  $\varphi$  — независимые случайные величины, принимающие различные значения для разных реализаций, является стационарным, но не эргодическим. Среднее по времени и ансамблю реализаций  $m_{\xi} = 0$ .

Если полагать равновероятность появления фазы в диапазоне от  $-\infty$  до  $+\pi$ , то КФ, определенная с помощью усреднения по ансамблю, будет иметь вид  $R_{\xi}(\tau) = 0.5M\{A^2\} \cos(\omega_0 \tau)$ , а с помощью усреднения по времени (по  $k$ -й реализации) —  $R_{\xi}(\tau) = 0.5A^2 \cos(\omega_0 \tau)$ .

Таким образом, для этого стационарного процесса КФ, определенная по одной реализации, не равна КФ, найденной по ансамблю.

Для случайного эргодического процесса можно записать следующие соотношения:



$$\begin{aligned}
m_{\xi}(t) &= M\{\xi(t)\} = \int_{-\infty}^{\infty} xp(x, t)dx = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)dt = m_x; \\
R_{\xi}(t_1, t_2) &= M\left\{\left[\xi(t_1) - m_{\xi}(t_1)\right] \cdot \left[\xi(t_2) - m_{\xi}(t_2)\right]\right\} = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[x_1 - m_{\xi}(t_1)\right] \cdot \left[x_2 - m_{\xi}(t_2)\right] p(x_1, x_2, t_1, t_2) dx_1 dx_2 = \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[x_1 - m_{\xi}(t_1)\right] \cdot \left[x_2 - m_{\xi}(t_1 + \tau)\right] p(x_1, x_2, t_1, t_1 + \tau) dx_1 dx_2 = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left[x(t) - m_{\xi}\right] \cdot \left[x(t + \tau) - m_{\xi}\right] dt = R_{\xi}(\tau)
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Для стационарного эргодического процесса  $R_{\xi}(\tau)$  зависит только от разности времен  $t_1 - t_2 = \tau$  (по определению) и не зависит от выбора моментов времени  $t_1$  и  $t_2$ . Математическое ожидание не зависит от времени, и при  $\tau = 0$  соотношения (2.6) упрощаются:

$$\begin{aligned}
R_{\xi}(\tau) &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1(t) x_2(t + \tau) p(x_1, x_2, \tau) dx_1 dx_2 = \\
&= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t) x(t + \tau) dt.
\end{aligned}$$

В дальнейшем будут рассматриваться только случайные эргодические процессы и моментные характеристики, полученные усреднением по времени.

### 2.2.1 Корреляционная функция

Важной характеристикой случайного процесса является автокорреляционная функция (АКФ). Поясним физический смысл этой функции. Для простоты предположим, что имеется случайная функция  $x(t)$  со средним значением, равным нулю. Корреляционная функция определяет вероятность того, что функция  $x(t)$ , которая в момент времени  $t_1$  имеет значение  $x_1$  будет в момент  $(t_1 + \tau)$  иметь значение  $x_2$ , т.е. характеризует взаимную связь между  $x(t_1)$  и  $x(t_1 + \tau)$ . Значение  $x(t_1 + \tau)$  должно зависеть от величины  $x(t_1)$  (в предшествующий момент времени), так как можно считать, что значение  $(t_1 + \tau)$  содержит составляющую, зависящую от значения  $x$  в момент  $t_1$ .

Таким образом, если  $\tau$  мало по сравнению с постоянными времени ИП, то  $x(t_1 + \tau)$  незначительно отличается от  $x(t_1)$ , т.е. вероятность этой связи близка к единице и отношение  $R_x(\tau)/R_x(0)$  близко к единице. По мере увеличения  $\tau$  составляющая  $x(t_1)$ , определяемая начальным значением  $x$  при  $t_1$ , уменьшается, связь между величинами  $x(t_1)$  и  $x(t_1 + \tau)$  ослабевает, они становятся независимыми друг от друга, и функция  $R_x(\tau)$  стремится к нулю. Другими словами, при достаточно больших  $\tau$  вероятность того, что величины  $x(t_1 + \tau)$  и  $x(t_1)$  будут мало отличаться, практически равна нулю.

Рассмотрим некоторые основные свойства КФ.

1. По определению корреляционной функции:

$$R_x(0) = D_x \geq R_x(\tau)$$

где  $D_x$  — дисперсия случайного процесса, т.е. значение АКФ при любом  $\tau$  не может превышать ее начального значения.

Иногда в расчетах и экспериментах применяют нормированную АКФ, определяемую как:

$$\rho_x(\tau) = \frac{R_x(\tau)}{R_x(0)} = \frac{R_x(\tau)}{D_x}, \quad 0 \leq |\rho_x(\tau)| \leq 1.$$

2. Корреляционная функция является четной, т.е.:

$$R_x(\tau) = R_x(-\tau).$$

Типичные корреляционные функции (рис 2.5):

$$R_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|},$$

$$R_x(\tau) = \sigma_x^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos(\beta\tau),$$

которые являются четными функциями относительно переменной  $\tau$ .

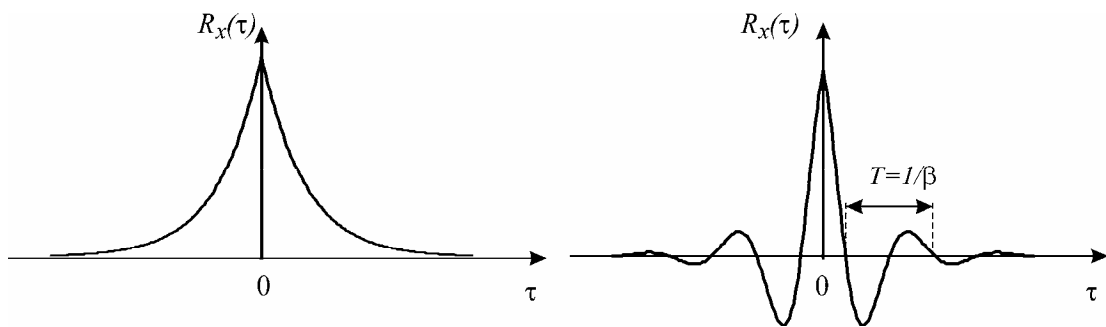


Рис. 2.5 Автокорреляционные функции

3. При  $T \rightarrow \infty$  корреляционная функция затухает и в пределе стремится к нулю:

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} R_x(\tau) \rightarrow 0$$

4. Преобразование Фурье для  $R_x(\tau)$  является неотрицательной величиной:

$$\int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau \geq 0.$$

5. Корреляционная функция суммы двух случайных процессов  $z(t) = x(t) + y(t)$  определяется выражением:

$$\begin{aligned} R_z(\tau) &= M \left\{ [x(t+\tau) + y(t+\tau)] [x(t) + y(t)] \right\} = \\ &= R_x(\tau) + R_y(\tau) + R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau). \end{aligned}$$

Если процессы  $x(t)$  и  $y(t)$  статистически независимы, то:

$$R_z(\tau) = R_x(\tau) + R_y(\tau).$$

6. Для статистически независимых процессов КФ произведения  $z(t) = x(t)y(t)$  определяется выражением:

$$R_z(\tau) = R_x(\tau) R_y(\tau).$$

7. Длительность корреляции как параметр, характеризующий внутреннюю статистическую связь процесса, чаще всего определяется соотношением:

$$\tau_{кор} = \int_0^{\infty} \left| \frac{R_x(\tau)}{R_x(0)} \right| d\tau = \int_0^{\infty} |r_x(t)| dt.$$

8. Размерность:

$$[R_x(\tau)] = [D_x] = [x(t)]^2.$$

Кроме АКФ случайного процесса при расчетах динамических погрешностей и ряда динамических характеристик используются также взаимокорреляционные функции (ВКФ) двух случайных процессов (например, на входе и выходе СИ). При математических ожиданиях процессов  $x(t)$  и  $y(t)$ , равных нулю, взаимокорреляционная функция этих процессов равна:

$$R_{xy}(\tau) = M \{x(t)y(t+\tau)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)y(t+\tau)p(x,y,\tau)dx dy =$$

$$= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)y(t+\tau)dt.$$

Взаимокорреляционные функции обладают свойством «зеркального отображения» (рис. 2.6):

$$R_{xy}(\tau) = R_{yx}(-\tau). \quad (2.7)$$

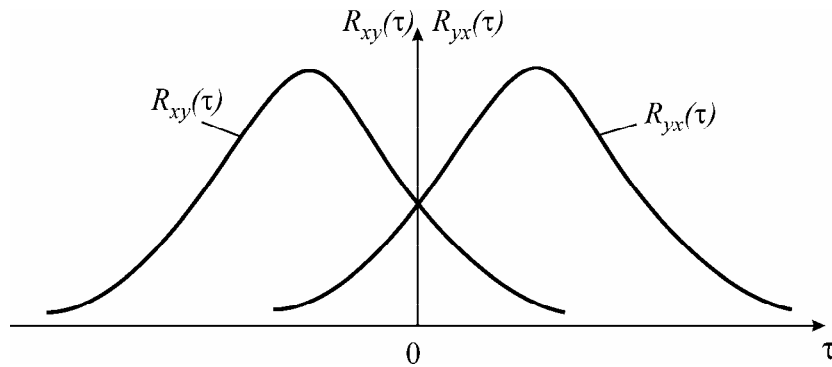


Рис. 2.6. Взаимокорреляционные функции

С другими свойствами корреляционной и взаимокорреляционной функций можно ознакомиться в специальной литературе по теории вероятности.

### 2.2.2 Функция спектральной плотности мощности

Аналогом корреляционной функции в частотной области является спектральная плотность мощности (СПМ) случайного процесса  $S_x(\omega)$ . Между АКФ и СПМ устанавливается связь с помощью преобразование Винера—Хинчина [5]:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega.$$

Обратное преобразование имеет вид:

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Для четных функций прямое и обратное преобразования можно представить в виде так называемого «косинусного» преобразования:

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} S_x(\omega) \cos(\omega\tau) d\omega, \quad S_x(\omega) = 2 \int_0^{\infty} R_x(\tau) \cos(\omega\tau) d\tau.$$

Следует отметить, что СПМ  $S_x(\omega)$  является абсолютно интегрируемой функцией, существующей в частотной области  $-\infty < \omega < \infty$ . Физически реализуемая СПМ  $S_x^{\oplus}(\omega)$  существует только в положительной области частот, и для сохранения общей мощности случайного процесса  $S_x^{\oplus}(\omega) = S_x(\omega)$ . Рассмотрим некоторые основные свойства функции СПМ.

1. Неотрицательность:

$$S_x(\omega) \geq 0.$$

2. Четность:

$$S_x(\omega) = S_x(-\omega).$$

3. Ограниченность:

$$S_x(\omega) \neq \infty.$$

4. При  $\omega \rightarrow \infty$  функция СПМ затухает и в пределе стремиться к нулю:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} S_x(\omega) \rightarrow 0$$

5. Размерность:

$$[S_x(\omega)] = [D_x][\omega]^{-1} = [x(t)]^2 T.$$

С другими свойствами функции спектральной плотности мощности можно ознакомиться в специальной литературе по теории вероятности.

## 2.3 Модели измеряемых сигналов и влияющих величин

При построении математических моделей входных воздействий и влияющих величин обычно разделяют их характеристики на статические и динамические. При использовании принятого в данной работе представление сигналов в виде случайных величин (случайных процессов) к статическим свойствам будем относить закон распределения случайной величины, а к динамическим автокорреляционную функцию (АКФ) или соответствующую ей функцию спектральной плотности мощности (СПМ). Подобный набор характеристик полностью описывает только случайные процессы с нормальным законом распределения. Однако

это не является критическим ограничением в силу того, что для достаточно большого класса реальных измеряемых параметров технологических процессов гипотеза о нормальном распределении может быть принята.

### 2.3.1 Модели измеряемых сигналов

Управление технологическими процессами в промышленных системах производится на основе измерений их текущих параметров. В свою очередь значение параметров определяется множеством факторов, оказывающих влияние на технологический процесс (состав сырья, температура окружающей среды, состояние технологического оборудования, режим ведения процесса и т.д.) и имеющих, как правило, вероятностную природу. На основании этого можно предположить, что измеряемые параметры, вследствие центральной предельной теоремы, имеют асимптотически стремящиеся к нормальному закон распределения вероятности.

При нормальном режиме работы технологического оборудования под управлением АСУ ТП можно уверенно предположить, что временные ряды параметров технологического процесса можно отнести к стационарным случайным процессам, как минимум по математическому ожиданию. Это объясняется наличием интегральной составляющей в законе регулирования, за счет которой среднее значение параметра удерживается органами регулирования на одном уровне.

Наиболее распространенным видом математической модели измеряемой величины является аддитивная модель вида [6, 7]:

$$x(t) = \mu_x + \overset{\circ}{x}(t) + x_h(t), \quad (2.8)$$

где  $\overset{\circ}{x}(t)$  - центрированный случайный процесс с нормальным распределением и дисперсией  $\sigma_x^2 = D\left\{\overset{\circ}{x}(t)\right\}$ ,  $x_h(t)$  - детерминированная составляющая, как правило на практике используется гармоническая составляющая,  $x_h(t) = c_x \sin(\omega_x t)$  - гармоническая составляющая с амплитудой  $c_x$  и частотой  $\omega_x$ .

Гармоническая компонента модели может быть обусловлена различными факторами: суточным циклом производственного процесса, влиянием периодической составляющей температуры окружающей среды, настройкой регулятора на режим «перерегулирования». Для более точного отображения свойств реаль-

ных процессов в модели (2.8) гармоническая составляющая заменяется на полигармоническую (гармонический ряд):

$$x(t) = \mu_x + \overset{\circ}{x}(t) + \sum_{i=0}^N c_i \sin(i\omega_i t + \varphi_i),$$

где  $N$  - количество членов гармонического ряда,  $i$  - номер гармоники,  $c_i$  - амплитуда  $i$ -й гармоники,  $\varphi_i$  - фаза  $i$ -й гармоники. В ряде случаев более удобным является применение специальных периодических функций:

$$x(t) = \mu_x + \overset{\circ}{x}(t) + x_p(t),$$

где  $x_p(t) = \frac{c_x \sin(\omega_x t)}{\sqrt{1 + \gamma \cos^2(\omega_x t)}}$  - функция Иордана, изменяющая форму от дельта

функции до прямоугольного сигнала в зависимости от значения параметра  $\gamma$  (пример функции Иордана приведен на рис.2.7).

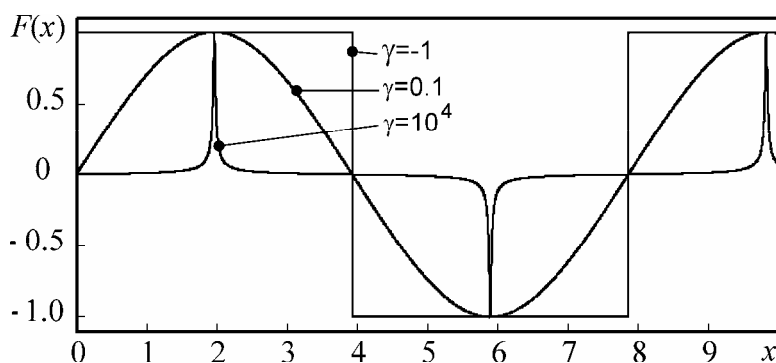


Рис. 2.7 Функция Иордана при различных значениях параметра  $\gamma$ .

В ряде случаев в модели учитывается так называемый «медленный тренд», в этом случае компонента  $\mu_x$  должна быть заменена функцией времени  $b(t)$ , описывающей изменение среднего значения во времени. Следует отметить, что случайный процесс  $x(t)$  в этом случае становится нестационарным.

Естественно, не каждый случайный процесс содержит все перечисленные компоненты, и включение каждой из них в математическую модель решается на основе анализа временного ряда параметра реального технологического процесса. Рассмотрим в качестве примера анализ временного ряда параметра — расход продукта из ректификационной колонны атмосферно - вакуумного блока нефтеперерабатывающего завода и определение на основании результатов параметров математической модели вида (2.8) [6].

Реализация временного ряда технологического параметра - расход продукта приведен на рис. 2.8, на котором так же приведена выделяемая гармоническая составляющая.

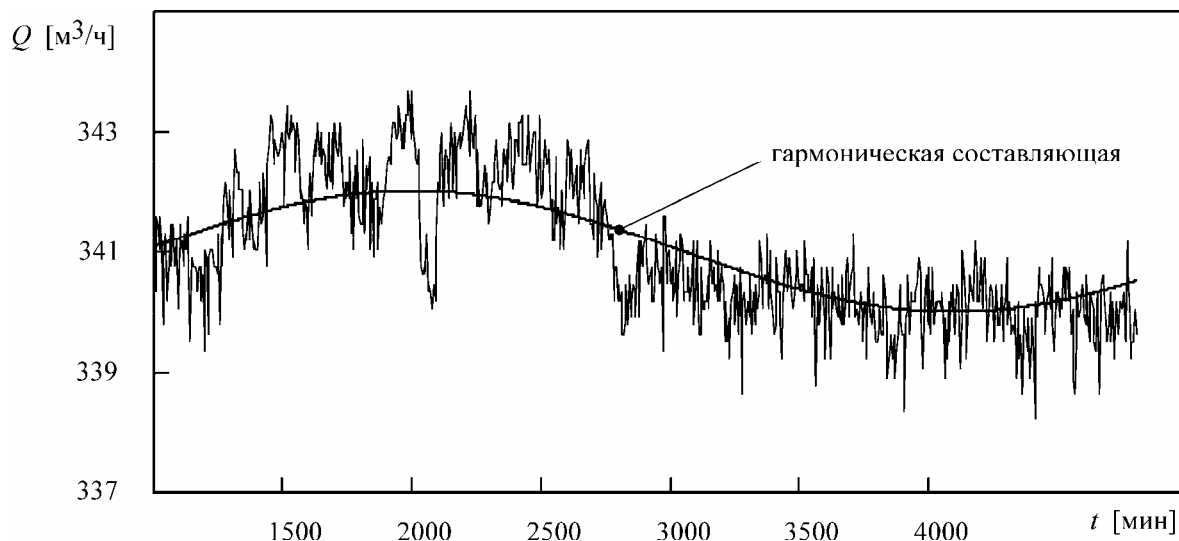


Рис. 2.8 Исходная реализация временного ряда технологического параметра

На рис. 2.10 а приведены отсчеты амплитудного спектра исходной анализируемой реализации, на котором имеется ярко выраженная гармоническая составляющая в низкочастотной части. Гистограмма анализируемого случайного процесса и её огибающая приведены на рис. 2.11 а.

Для снижения эффекта «распыления» спектра, обусловленного конечной длиной исследуемой реализации, при вычислении оценок спектральной плотности использовалось частотное окно Парзена [8]:

$$G(\omega) = \frac{4[2 + \cos(\omega)]}{\gamma^3} \left[ \frac{\sin(\gamma\omega/4)}{\sin(2)} \right]^4,$$

где  $\gamma = 50$  - параметр частотного окна.

Исключение гармонической составляющей из исходной реализации (рис. 2.9) приводит к изменению распределения амплитуд в спектральной плотности (рис. 2.10 б) и получение распределения близкого к нормальному (рис. 2.11 б).



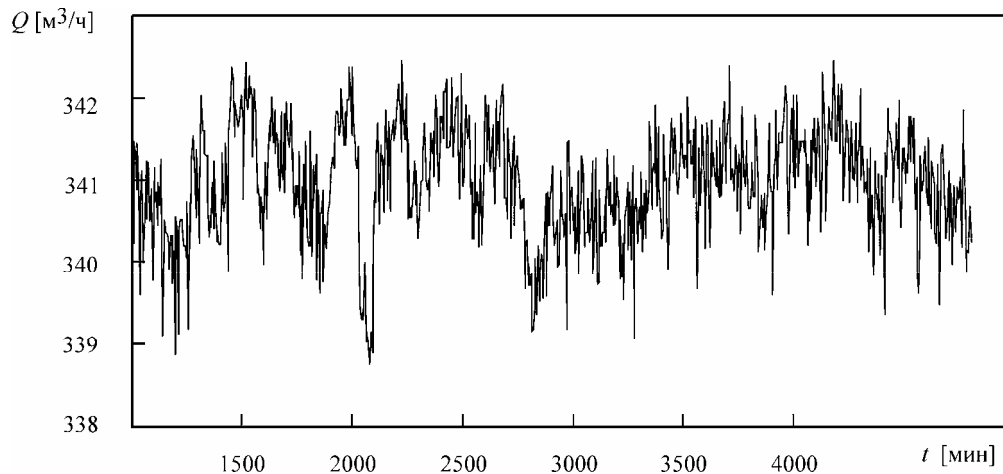


Рис. 2.9 Реализация временного ряда технологического параметра с удаленной гармонической составляющей.

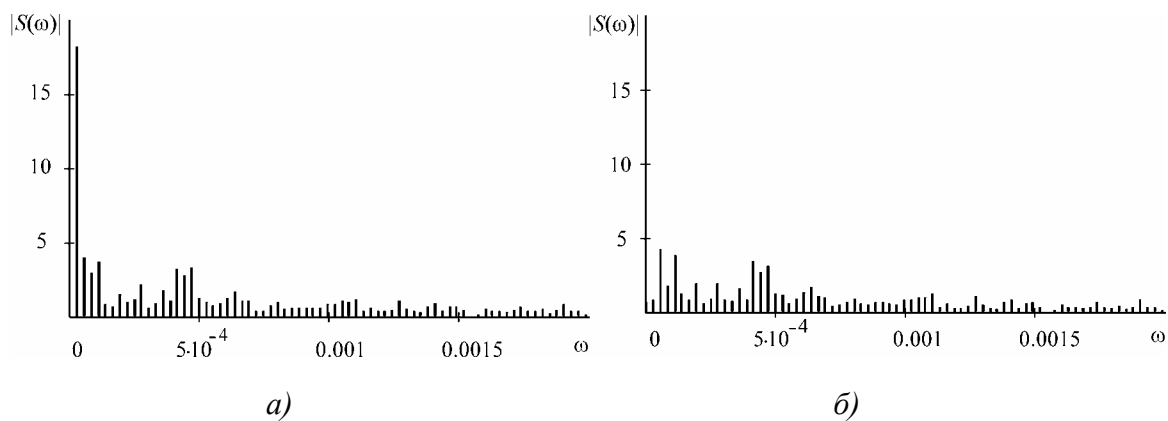


Рис. 2.10 Амплитуда отсчетов спектра исходной реализации (а) и реализации с удаленными гармонической составляющей и математическим ожиданием (б).

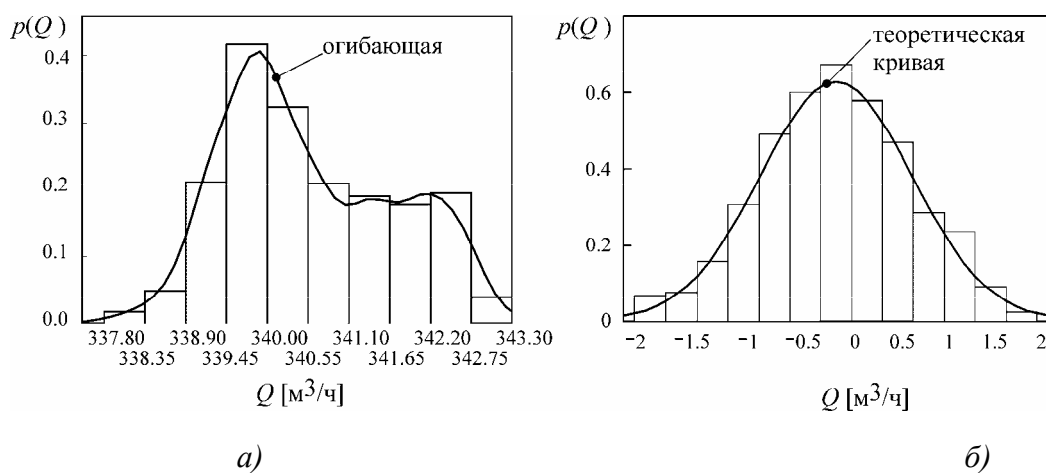


Рис. 2.11 Гистограмма и её огнибающая исходной реализации случайного процесса (а), гистограмма реализации с исключенными гармонической составляющей и математическим ожиданием (б) и теоретическая кривая нормального распределения.

Точная подгонка параметров осуществлялась на основе критерия минимума доминирующей гармоники (рис. 2.10 а) оценок амплитуд спектра, в результате вычислений получена следующая компонента модели:

$$x_h(t) = 0.98 \sin(0.038t + 0.08).$$

Как видно из приведенных гистограмм исходной реализации и реализации с исключенной гармонической составляющей (рис. 2.11) распределение приобретает практически симметричную форму

Таким образом общую модель можно записать в следующем виде:

$$x(t) = 340,424 + \overset{\circ}{x}(t) + 0.98 \sin(0.038t + 0.08),$$

а анализируемый временной ряд  $\overset{\circ}{x}(t)$  можно отнести к стационарным случайным процессам.

### 2.3.2 Модели влияющих величин

В качестве влияющих величин могут выступать различные внешние воздействия, такие, например как влажность окружающего воздуха, его температура, барометрическое давление и т.д.. Вполне естественно, что в большинстве случаев, как и измеряемые сигналы, влияющие величины являются функцией времени. Рассмотрим в качестве примера наиболее часто встречающиеся на практике влияющие величины: температуру окружающего воздуха и напряжение питающей сети. Фрагмент реализации временного ряда температуры воздуха приведен на рис. 2.12.

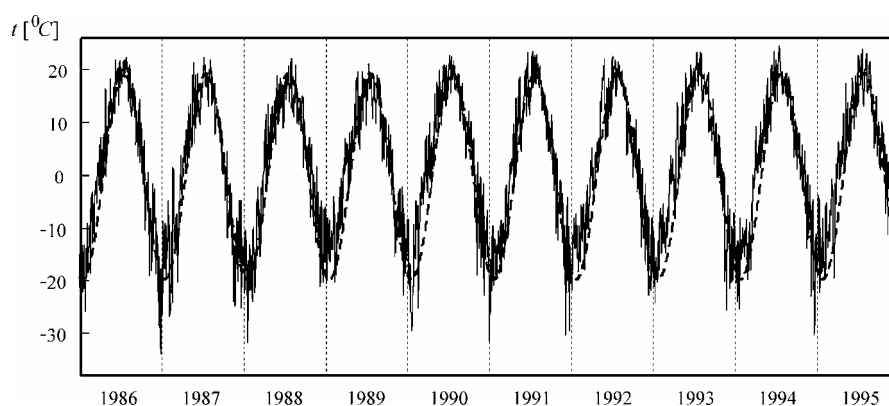


Рис. 2.12 Реализация временного ряда температуры с точным разрешением с 1986 года по 1995 год по городу Иркутску (пунктиром представлена гармоническая составляющая).

На основании приведенной реализации (рис. 2.12) можно предположить, что модель так же должна содержать как минимум одну гармоническую состав-

ляющую. Так в [9] приводится модель сезонной составляющей для Восточной Сибири (рис. 2.13) которую с достаточной точностью можно аппроксимировать синусоидой.

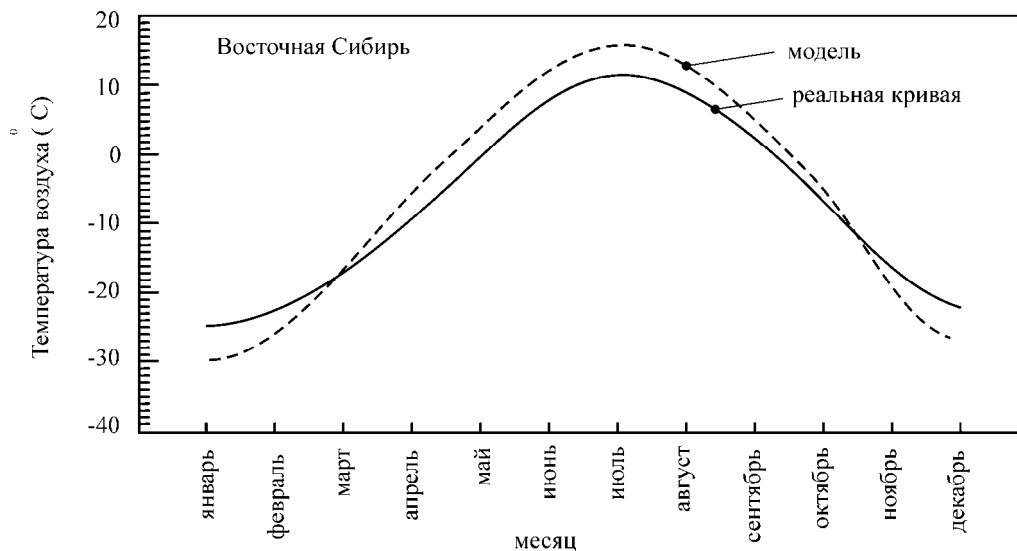


Рис. 2.13 Модель и реальная кривая сезонной составляющей температуры [9].

Выделение гармонической составляющей и последующий анализ на стационарность реализации с исключенным трендом выполнено по тому же алгоритму что и в предыдущем разделе. Гистограмма исходной реализации и реализации после удаления сезонной компоненты показаны на рис. 2.14.

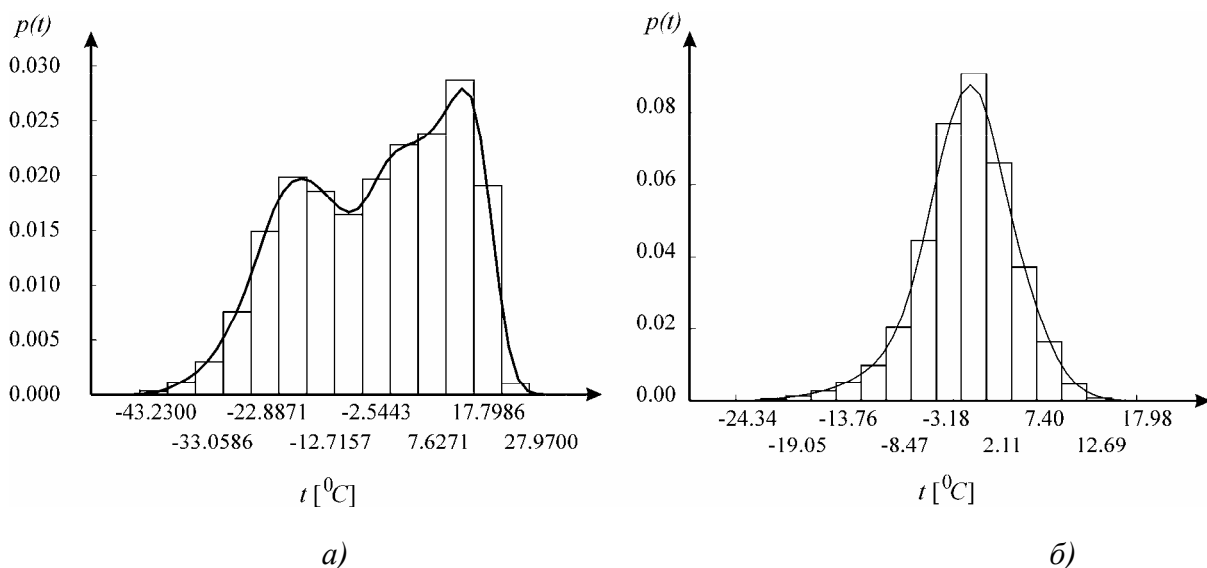


Рис. 2.14 Гистограмма и её огибающая исходной реализации (а), гистограмма реализации с исключенными гармонической составляющей и математическим ожиданием (б).

Математическая модель временного ряда температуры запишем в виде:

$$\varepsilon(t) = \mu_{\varepsilon} + \overset{\circ}{\varepsilon}(t) + c_{\varepsilon} \sin(\omega_{\varepsilon} t + \varphi_{\varepsilon}) \quad (2.9)$$

Параметры модели (2.9) приведены в таблице 2.1

Табл. 2.1 Рассчитанные параметры модели температуры по г. Иркутску

Параметр модели (2.5)	Оценка параметра	СКО оценки	Пределы доверительного интервала 0.95	
			нижний	верхний
$\mu_{\varepsilon}$	-0.394	0.0397	-0.469	-0.318
$c_{\varepsilon}$	19.432	0.0561	19.325	19.538
$\omega_{\varepsilon}$	0.0172	6.10E-07	0.0172	0.0172
$\varphi_{\varepsilon}$	-1.818	0.006	-1.829	-1.807

При этом среднеквадратичное отклонение централизованного процесса  $\overset{\circ}{\varepsilon}(t)$  составляет 4.993 °С.

Можно предположить, что при использовании для анализа данных с трехчасовым разрешением приводит к построению более точной модели т.к. позволяет выделить не только годовую составляющую, но и суточную. Пример реализации временного ряда температуры с трехчасовым разрешением ( $\Delta t = 3$  часа) по городу Ангарск за 1998 год приведен на рис. 2.15.

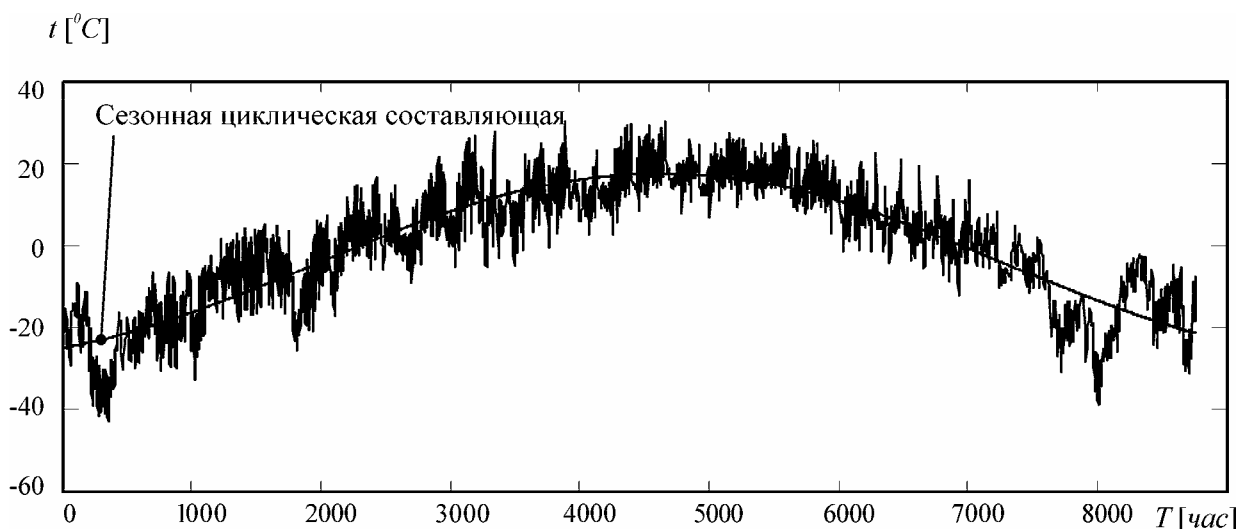


Рис. 2.15. Реализация изменения температуры атмосферного воздуха с трехчасовым разрешением за 1998 год по городу Ангарск.

Проведя аналогичный с предыдущим примером анализ данных, определим параметры уточненной модели температуры атмосферного воздуха [10]:

$$\varepsilon(t) = -4.835 + \overset{\circ}{\varepsilon}(t) + 22.423 \sin\left(\frac{2\pi}{3597.299\Delta t}t + 5,1636\right) + 2.323 \sin\left(\frac{2\pi}{619.347\Delta t}t + 3.459\right),$$

при этом среднеквадратичное отклонение централизованного процесса  $\overset{\circ}{\varepsilon}(t)$  составляет  $6.65^{\circ}\text{C}$ .

Как видно из полученных параметров модели, вторая гармоническая составляющая имеет амплитуду на порядок меньшую, чем основная (годовая) составляющая на основании чего можно предположить, что в первом приближении достаточной точностью будет обладать модель вида (2.9).

Следует отметить, что параметры моделей для различных регионов имеют значительный разброс параметров, что можно наблюдать на примерах огибающих гистограмм для ряда географических точек (рис. 2.16) и из табл. 2.2, где приведены параметры соответствующих моделей.

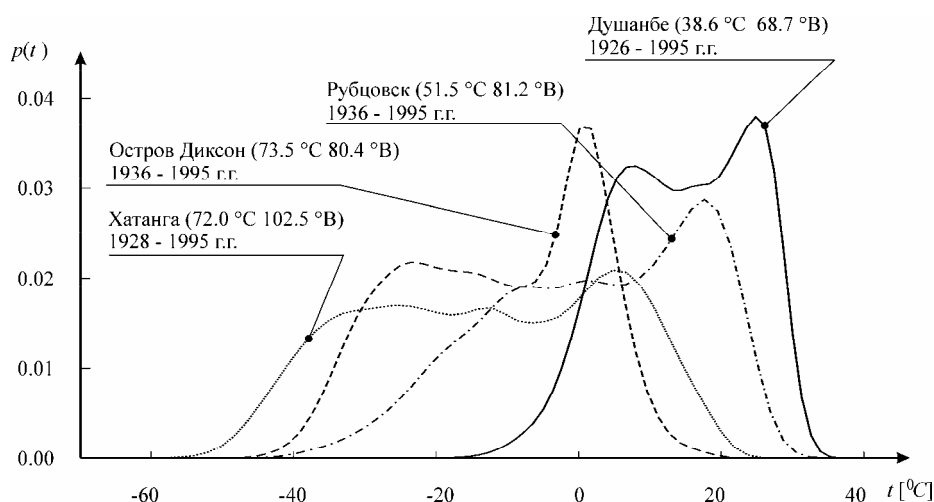


Рис. 2.16 Огибающие гистограмм распределения температур атмосферного воздуха для различных географических точек.

Табл. 2.2 Оценки параметров модели температуры воздуха

Населённый пункт	Географические координаты	$c_x$	$\omega_\varepsilon$	$\mu_\varepsilon$	$\varphi_\varepsilon$	$\sigma_\varepsilon$
Остров Диксон	73.5 °C 80.4 °В	14.349	0.0172	-2.232	$2.466 \cdot 10^{-3}$	7.345
Хатанга	72.0 °C 102.5 °В	16.281	0.0172	-2.133	0.053	8.567
Чокурдах	70.6 °C 147.9 °В	21.177	0.0172	2.376	0.068	8.091
Остров Врангеля	71.0 °C 178.6 °В	13.327	0.0172	2.535	0.029	5.654
Мурманск	69.0 °C 33.1 °В	10,527	0,0172	-2,106	-0,013	6.551
Кандалакша	67.1 °C 32.4 °В	12,471	0,0172	2,206	-4,635	8.754
Кемь-Порт	65.0 °C 34.8 °В	11,455	0,0172	-2,603	$8,833 \cdot 10^{-3}$	7.231

В качестве следующего примера приведем анализ реализации величины питающего напряжения (исходная реализация на рис. 2.17). Длительность реализации для этого примера составляет 2592 значения с дискретностью снятия показаний - 100 секунд .

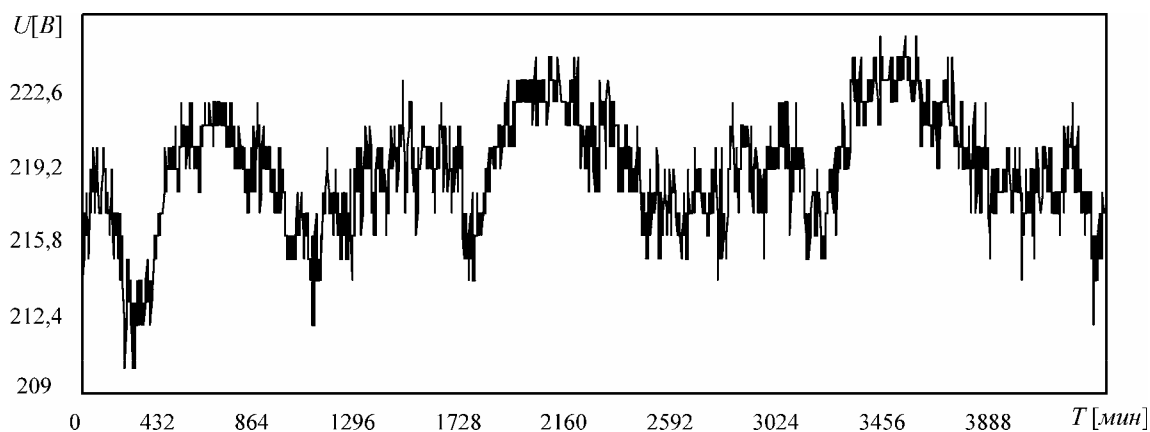


Рис. 2.17 Реализация изменения величины питающего напряжения за трое суток

На основе результатов проведенного анализа полученных данных были определены параметры модели вида (2.9):

$$\varepsilon(t) = 219 + \overset{\circ}{\varepsilon}(t) + 3.5 \sin\left(\frac{2\pi}{864\Delta t}t + 5.6\right),$$

где  $\Delta t$  - дискретность снятия значений (100 сек).

#### 2.4 Динамические характеристики случайной составляющей математической модели входных воздействий

Основным методом определение динамических характеристик случайной составляющей математической модели измеряемых сигналов и влияющих величин является аппроксимация вычисленных оценок АКФ или СПМ. Выбор аппроксимирующей аналитической функции во многом определяется особенностями исследуемого случайного процесса и, как любая аппроксимация, является, в основном, эмпирической задачей. При этом одним из основных критериев, влияющих на выбор аппроксимирующих функций, является распределение энергии в частотном спектре исследуемого процесса. Используемые на практике аппроксимации АКФ, строятся на основе экспоненциальных рядов или косинусов демпфированных экспонентами, основной особенностью которых является медленная сходимость аппроксимации при увеличении количества членов ряда.

Рассмотрим наиболее часто используемые для этих целей модели и их свойства. Наиболее простой является модель, которая описывается нормированной автокорреляционной функцией и функция спектральной плотности мощности, соответственно, вида:

$$\rho(\tau) = e^{-\alpha|\tau|}, \quad S(\omega) = \frac{2}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}, \quad (2.10)$$

где  $\alpha$  - параметр АКФ и функции СПМ.

К основным достоинствам этой модели следует отнести относительно низкие вычислительные затраты при аппроксимации. Однако она не позволяет учесть особенности распределения энергии в спектре моделируемого сигнала и имеет постоянную крутизну спада в высокочастотной области спектра.

Одним из способов увеличения точности моделирования является использование экспоненциального ряда построенного на основе (2.10):

$$\rho(\tau) = \sum_{k=1}^n C_k e^{-\alpha_k|\tau|}, \quad S(\omega) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n C_k \frac{\alpha_k}{\alpha_k^2 + \omega^2}, \quad (2.11)$$

где  $k=1, 2, \dots, n$ ,  $n$  - количество членов ряда,  $C_k$  - весовые коэффициенты, причем для нормированных АКФ и функций СПМ должно выполняться условие -

$$\sum_{k=1}^n C_k = 1.$$

В этом случае появляется возможность более точно учесть крутизну спада функции спектральной плотности. Модели (2.10) и (2.11), как правило, используются на начальных этапах анализа, либо для СП, не имеющих каких-либо особенностей в спектре. Для случайных процессов, имеющих немонотонное убывание энергии в спектре, необходимо использовать модели, позволяющие отобразить эти особенности [11]:

$$\rho(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos(\beta\tau), \quad S(\omega) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\beta - \omega)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\beta + \omega)^2} \right], \quad (2.12)$$

или, как и в предыдущем случае, представить модель в виде ряда, позволяющего учесть несколько особенностей в СПМ [11]:

$$\rho(\tau) = \sum_{k=1}^n C_k e^{-\alpha_k |\tau|} \cos(\beta_k \tau),$$

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n C_k \left[ \frac{\alpha_k}{\alpha_k^2 + (\beta_k - \omega)^2} + \frac{\alpha_k}{\alpha_k^2 + (\beta_k + \omega)^2} \right], \quad (2.13)$$

где  $k=1, 2, \dots, n$ ,  $n$  - количество членов ряда, для  $C_k$  должно выполняться то же условие, что и для (2.7).

В Приложении 1 приведены наиболее часто встречающиеся АКФ.

Рассмотрим динамические параметры временных рядов, приведенных в данном разделе в качестве примеров. После удаления гармонической составляющей из временного ряда технологического параметра – расход продукта оценки функции автокорреляции достаточно хорошо аппроксимируется функцией вида (2.10).

При вычислении параметров модели воспользуемся методом наименьших квадратов (МНК). Для этого построим функционал вида:

$$\Delta^2 = \sum_{i=1}^m \left( \hat{\rho}_i - e^{-\alpha |\tau_i|} \right)^2, \quad (2.14)$$

где  $\hat{\rho}_i$  -  $i$ -ая оценка значения АКФ при  $\tau_i$ ,  $m$  - количество вычисленных оценок АКФ.

Найдем производную (2.10) по  $\alpha$  и, приравняв её к нулю, получим уравнение, решение которого позволяет получить искомую оценку параметра модели (2.10):

$$\sum_{i=1}^m \left( \hat{\rho}_i - e^{-\alpha |\tau_i|} \right) |\tau_i| e^{-\alpha |\tau_i|} = 0. \quad (2.15)$$

Вычисленные оценки модели (2.10) АКФ реализаций временного ряда параметров технологических процессов  $\alpha = 0.00042$  (доверительный интервал при вероятности 0.95 [0.0035, 0.0047]).



## ГЛАВА 3

### МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ КАНАЛОВ

#### 3.1 Основные положения

Существующие в теории измерений методы не могут достаточно точно описать все погрешности, возникающие в процессе преобразований измерительными каналами входных воздействий при динамических измерениях. Как было показано ранее, при работе измерительной системы в составе АСУ ТП существует ряд особенностей, существенно влияющих на погрешность результатов измерения. Расчет или оценка погрешности измерительного канала возможен только при наличии адекватной модели, учитывающей как свойство самого преобразователя, так и условий измерений. Построение таких моделей и является задачей данной главы.

#### 3.2 Измерительный канал как динамическая система

##### 3.2.1 Динамические характеристики линейного измерительного преобразователя непрерывного действия

Динамические свойства измерительного канала или измерительного преобразователя, как и любой динамической системы, могут быть описаны полными или частными динамическими характеристиками (ДХ). Для анализа погрешностей в динамическом режиме необходимо знание полных ДХ измерительного канала. Аналогичное требование выдвигается и в ГОСТ 8.009-89 [3] для нормирования динамической погрешности.

Для выявления типовых видов ДХ ИП и ИК рассмотрим дифференциальные уравнения, передаточные функции и переходные характеристики некоторых измерителей.

1. ИП влажности газа (гигрометр первого порядка). Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d\varphi_2(t)}{dt} + \frac{1}{\lambda_0} \varphi_2(t) = \frac{1}{\lambda_0} \varphi_u(t), \quad (3.1)$$

где  $\varphi_2(t)$  - показание гигрометра;  $\varphi_u(t)$  - текущее значение влажности газа, подлежащие измерению;  $\lambda_0$  - коэффициент, характеризующий условие измерения и принцип действия гигрометра.

2. ИП влажности газа (гигрометр второго порядка). Дифференциальное уравнение:

$$a_0 T_0^2 \frac{d^2 \varphi_2(t)}{dt^2} + \frac{d\varphi_2(t)}{dt} (a_0 T_0 + T) + \varphi_2(t) = K \varphi_u(t), \quad (3.2)$$

$\varphi_2(t)$  - показание гигрометра;  $\varphi_u(t)$  - текущее значение влажности газа, подлежащие измерению;  $a_0, T_0, K$  - определяются экспериментальным путём.

3. ИП температуры. Дифференциальное уравнение:

$$\frac{du(t)}{dt} + \frac{\alpha_k S}{mc} u(t) = \frac{\alpha_k S}{mc} \Theta(t), \quad (3.3)$$

где  $u(t)$  - температура теплоприемника;  $S$  - площадь поверхности теплоприемника;  $m$  - масса теплоприемника;  $\alpha_k$  - коэффициент конвективного теплообмена между теплоприемником и средой, в которой происходит измерение;  $\Theta(t)$  - измеряемая температура среды.

4. ИП температуры (с учетом защитной оболочки на теплоприемнике). Дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 \alpha_k) \frac{du(t)}{dt} + \beta_1 \beta_3 \alpha_k u(t) = \beta_1 \beta_3 \alpha_k \Theta(t), \quad (3.4)$$

где  $\beta_1 = k_0 \frac{S_{\mathcal{E}}}{C_{\mathcal{E}}}$ ;  $\beta_2 = k_0 \frac{S_{\mathcal{O}}}{C_{\mathcal{O}}}$ ;  $\beta_3 = \frac{S_{\mathcal{O}\mathcal{O}}}{C_{\mathcal{O}\mathcal{O}}}$ ;  $u(t)$  - температура теплоприемника;  $\alpha_k$  - коэффициент конвективного теплообмена между теплоприемником и средой, в которой происходит измерение;  $C_{\mathcal{E}}, C_{\mathcal{O}\mathcal{O}}$  - полные теплоемкости термочувствительного элемента и оболочки, соответственно;  $S_{\mathcal{E}}, S_{\mathcal{O}\mathcal{O}}$  - площади поверхности чувствительного элемента и оболочки соответственно;  $\Theta(t)$  - измеряемая температура среды;  $k_0$  - коэффициент передачи между оболочкой и чувствительным элементом.

5. ИП давления. Дифференциальное уравнение:

$$\tau_0 \frac{dP_2(t)}{dt} + P_2(t) = P_1(t), \quad (3.5)$$

$$\tau_0 = \frac{128\mu_0 V_0 l_0}{\pi d^2 P_2},$$

где  $P_2(t)$  - текущее значение давления газа в полости прибора;  $P_1(t)$  - значение давления газа на входе в манометрическую трубку;  $\mu_0$  - коэффициент динамической вязкости газа;  $V_0$  - объем газа;  $l_0$  - длина манометра;  $d$  - диаметр манометра.

6. ИП давления мембранный. Дифференциальное уравнение:

$$m \frac{d^2 W(t)}{dt^2} + k_1 \frac{dW(t)}{dt} + c_1 W(t) = P(t), \quad (3.6)$$

где  $m$  - масса мембраны;  $c_1$  - упругость мембраны;  $k_1$  - коэффициент демпфирования колебаний мембраны;  $W_1(t)$  - текущее значение прогиба;  $P(t)$  - измеряемое значение давления.

7. ИП давления с круглой мембраной. Дифференциальное уравнение:

$$\frac{1}{\lambda_0} \left[ \frac{\partial W^2(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial W(r, t)}{\partial r} \right] + P(t) = k_1 \frac{\partial W(r, t)}{\partial r} + \rho_s \frac{\partial W^2(r, t)}{\partial r^2}, \quad (3.7)$$

$$W(r, t)|_{r=R} = 0,$$

где  $\lambda_0$  - коэффициент, характеризующий материал мембраны;  $W(r, t)$  - мгновенное отклонение точки мембраны;  $P(t)$  - измеряемое давление;  $k_1$  - коэффициент демпфирования колебаний мембраны;  $r$  - расстояние от центра до точки мембраны;  $\rho_s$  - масса единицы поверхности мембраны;  $R$  - радиус мембраны.

8. Пьезосорбционный чувствительный элемент (ПСЧЭ). При установлении равновесия между концентрациями влаги в окружающей среде и в сорбционной пленке ПСЧЭ имеют место следующие процессы:

- массообмен между влагой окружающей среды и влагой, содержащейся в сорбционной пленке;
- диффузия воды в пленке сорбента с последующим установлением равновесия по всему объему сорбента.

Скорость первого процесса значительно выше последнего, поэтому инерционность ПСЧЭ, в основном, определяется скоростью диффузии воды внутри пленки.

Если предположить, что неоднородность структуры пленки намного меньше её толщины, т.е. предположить постоянство и изотропность свойств пленки по толщине, то распределение влаги в пленке с учетом незначительности толщины по сравнению с линейными размерами её поверхности, и что изотерма сорбции подчиняется линейному закону, то передаточная функция может быть найдена из одномерного уравнения нестационарного процесса диффузии:

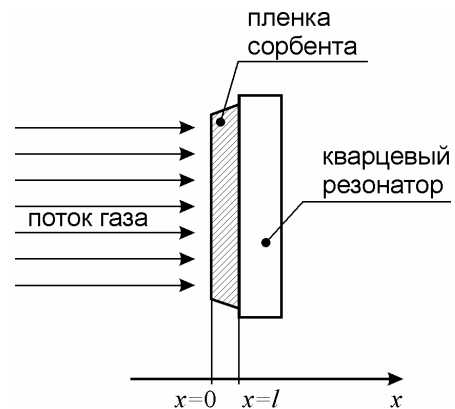


Рис. 3.1 Пьезосорбционный чувствительный элемент

$$\frac{\partial^2 a}{\partial x^2} = \frac{1}{D} \frac{\partial a}{\partial t}, \quad (3.8)$$

где  $D$  - коэффициент диффузии;  $x$  - пространственная координата нормальная к поверхности пленки;  $a$  - концентрация влаги в сорбенте при граничных условиях:  $a = kc$  при  $x=0$  и  $dc/dx = 0$  при  $x=l$ ;  $c$  - концентрация влаги в газе;  $k$  - коэффициент Генри;  $l$  - толщина пленки (рис. 3.1).

Применив преобразование Лапласа к уравнению диффузии (3.8) с учетом граничных условий, получим выражение для коэффициента передачи:

$$W(j\omega) = \frac{th(b\sqrt{j\omega})}{b\sqrt{j\omega}}, \quad (3.9)$$

где  $b = l/\sqrt{D}$ .

Выразим параметр  $b$  через постоянную времени преобразователя [12]:

$$b = \frac{\pi}{2} \sqrt{T}.$$

Тогда выражение (3.9) примет вид:

$$W(j\omega) = \frac{2th\left(\frac{\pi}{2} \sqrt{T j\omega}\right)}{\pi \sqrt{T j\omega}}. \quad (3.10)$$

Таким образом, динамические характеристики измерительных каналов можно разделить на три категории. К первой категории относятся измерительные

преобразователи, описываемы дифференциальными уравнениями первого порядка (выражения (3.1), (3.3) и (3.5)). В общем виде дифференциальное уравнение ИП первого порядка можно записать как:

$$\frac{dy(t)}{dt} - \nu_0 y(t) = \eta_0 x(t), \quad (3.11)$$

где  $y(t)$  - текущее значение измеряемого воздействия;  $\nu_0, \eta_0$  - коэффициенты, определяемые условиями измерения и принципом действия измерительного преобразователя;  $x(t)$  - измеряемая величина.

Ко второй категории (выражение (3.2), (3.4) и (3.6)) относятся ИП описываемые дифференциальными уравнениями второго порядка вида:

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + \nu_0 \frac{dy(t)}{dt} + \mu_0 y(t) = \eta_0 x(t), \quad (3.12)$$

где  $y(t)$  - текущее значение измеряемого воздействия;  $\nu_0, \eta_0, \mu_0$  - коэффициенты, определяемые условиями измерения и принципом действия измерительного преобразователя;  $x(t)$  - измеряемая величина.

Третью категорию измерительных преобразователей составляют системы с распределенными параметрами (выражение (3.7) и (3.8)), для которых предполагаются различные формы моделирующих уравнений:

$$\begin{aligned} A_0(v, y, t, a) \frac{\partial v(y, t)}{\partial t} + \sum_{i=1}^n A_i(v, y, t, a) \frac{\partial v(y, t)}{\partial x} = \\ = B(v, y, t, a) + \eta = B(y, t); \\ G(v, y, t, c) + \eta_i = 0; \quad v(x, 0) = v_0(x), \end{aligned} \quad (3.13)$$

где  $v(y, t)$  - вектор зависимых переменных;  $x, y$  - векторы пространственных переменных;  $t$  - время;  $a$  - коэффициент;  $A(y, t)$  - вектор параметров характеризующих систему;  $B$  - вектор функциональный;  $G$  - отношение на границе пространства;  $c$  - ошибки;  $\eta$  - погрешности.

### 3.2.2 Динамические характеристики линейного измерительного преобразователя циклического действия

Большой класс ИП, работающих в составе измерительных систем АСУ ТП, реализует принцип циклического измерения. Как правило, в химической и неф-

техимической промышленности это аналитические приборы для анализа микроконцентраций веществ. Это может быть обусловлено методом измерения (хроматографы), необходимостью увеличить чувствительность (метод накопления) или расширить область применения приборов непрерывного действия. Особенностью ИП данного класса является, в общем случае, выполнение процедуры измерения за два цикла: цикла накопления ( $T_1$ ) и цикла измерения ( $T_2$ ) (рис. 3.2). Представителем приборов этого класса является кулонометрический гигрометр [13] в котором: цикл накопления – сорбирование влаги в ячейки, цикл измерения – разложение накопленной в сорбенте влаги под действием электрического тока.

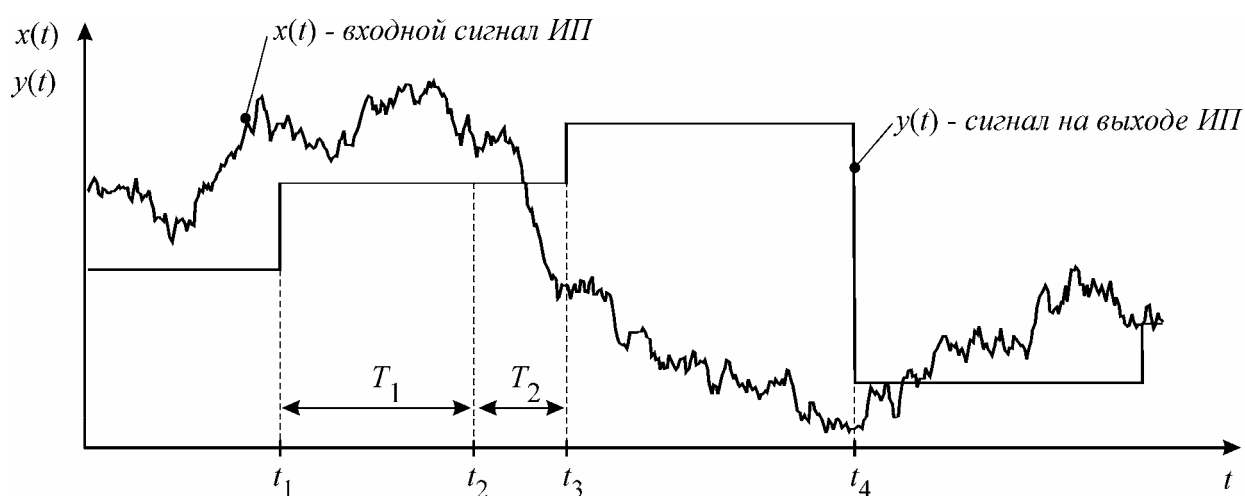


Рис. 3.2 Временная диаграмма работы ИП циклического действия.

Как видно из временной диаграммы (рис. 3.2), усредненное на интервале накопления  $T_1 = [t_1, t_2]$  значение сигнала будет присутствовать на выходе прибора на интервале времени  $[t_3, t_4]$ . Интервал измерения  $T_2 = [t_2, t_3]$  является так называемым «мертвым временем», в течение которого прибор не воспринимает входной сигнал. Таким образом динамические свойства ИП циклического действия имеет, в общем случае, в своем составе три составляющие:

- составляющая, обусловленная усреднением;
- составляющая, обусловленная задержкой выходного сигнала;
- составляющая, обусловленная наличием «мертвого времени».

Строгое решение задачи построение аналитической модели динамики ИП циклического действия с учетом всех составляющих представляется крайне затруднительным. Сделаем допущение, что составляющая обусловленная «мертвым временем» не вносит существенного вклада и ей можно пренебречь. Тогда ИП циклического действия можно представить в виде непрерывной модели (рис.

3.3). В состав модели входит усреднитель сигнала на интервале  $T_1$  (интервал накопления) и звено чистого запаздывания с параметром  $\tau = (T_1 + T_2)/2$ .

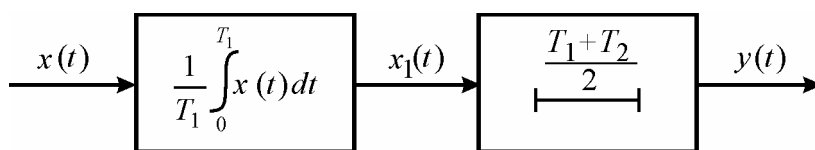


Рис. 3.3 Структурная схема непрерывной модели

Передаточная функция усреднителя определяется выражением [14]:

$$W_{\text{уср}}(j\omega) = \frac{1 - \exp(-j\omega T_1)}{j\omega T_1},$$

тогда передаточная функция всей модели (рис. 3.3) будет определяться выражением [15]:

$$W(j\omega) = \frac{[1 - \exp(-j\omega T_1)] \exp\left(-\frac{j\omega (T_1 + T_2)}{2}\right)}{j\omega T_1}. \quad (3.14)$$

Переход к непрерывной модели значительно упрощает анализ динамической погрешности, однако следует учесть, что выражение было получено при некоторых допущениях и, в общем, необходимо выполнить проверку на адекватное описание динамики реального измерительного преобразователя.

### 3.3 Измерительные каналы с нелинейными преобразователями

Среди широкого ряда нелинейных ИП применяемых в промышленности по виду нелинейной характеристики можно выделить ряд основных групп.

В первую группу входят преобразователи, имеющие нелинейную статическую характеристику в виде экспоненциальной функции:

$$F(x) = A \exp(-Bx), \quad (3.15)$$

где  $A$  и  $B$  – параметры ИП,  $x$  – входной сигнал.

С приборами входящими в эту группу достаточно часто приходится сталкиваться на практике. В качестве примеров можно назвать: приборы, основанные на абсорбционно-оптическом методе (закон Бугера-Ламберта-Бера) [16], радиоизотопные плотномеры [17], аэрозольно-ионизационные газоанализаторы [18] и т.д.

К следующей разновидности относятся устройства, имеющие квадратичную характеристику:

$$F(x) = Ax^2. \quad (3.16)$$

В данную группу в основном входят различные расходомеры [19]: расходомер переменного перепада давления, расходомер динамического давления, расходомер переменного уровня и т.п.

В третью группу входят ИП, имеющие статическую характеристику в виде квадратного корня:

$$F(x) = A\sqrt{x}. \quad (3.17)$$

К приборам этой группы, например, относятся некоторые газоанализаторы [20]: масс-спектрометр с разделением ионов и времяпролётный масс-спектрометр, а также ряд других приборов.

К четвёртой группе можно отнести ИП, имеющие статическую характеристику в виде обратной функции:

$$F(x) = \frac{A}{x}. \quad (3.18)$$

В данную группу входят некоторые виды расходомеров: калориметрические расходомеры [21], меточные расходомеры и концентрационные расходомеры [19], а также некоторые другие виды приборов.

В последнюю, достаточно многочисленную, группу входят ИП с нелинейными характеристиками отличными от характеристик четырёх вышеназванных групп. В качестве примера в первую очередь можно назвать разнообразные приборы основанные на сорбционном методе измерения, характеристика которых описывается уравнением изотермы Ленгмюра [22, 23]:

$$a(c) = \frac{m \cdot b \cdot c}{1 + b \cdot c}, \quad (3.19)$$

где  $a(c)$  – равновесная концентрация вещества в сорбенте,  $c$  – равновесная концентрация,  $m$  и  $b$  – постоянные, зависящие от свойств адсорбента и адсорбируемого вещества.

Другим примером приборов входящих в данную группу является кольцевой манометр [24]:

$$\Delta P(\varphi) = K \sin(\varphi), \quad (3.20)$$



где  $\Delta P(\varphi)$  – разность давлений,  $\varphi$  – угол поворота кольца,  $K$  – коэффициент, зависящий от геометрических размеров кольца манометра.

Приведённая выше классификация показывает, что в одну и ту же группу могут входить ИП, применяемые для измерения величин с различной физической природой. В основе работы этих приборов лежат различные физические явления, но подходы к их анализу могут быть одинаковыми. Таким образом, возможно разработать универсальные подходы к анализу нелинейных ИП, позволяющие исследовать преобразователи, входящие в разные группы.

Метрологический анализ измерительных преобразователей, приборов и систем с одновременным учетом их нелинейных и инерционных свойств на классе случайных сигналов предполагает построение математической модели ИП и применение методов математического моделирования позволяющих производить такой учёт.

Для представления нелинейных измерительных преобразователей применяется широкий спектр нелинейно-инерционных моделей [25 - 28]. На рис. 3.4. представлена иерархическая схема, составленная из наиболее известных моделей [25].

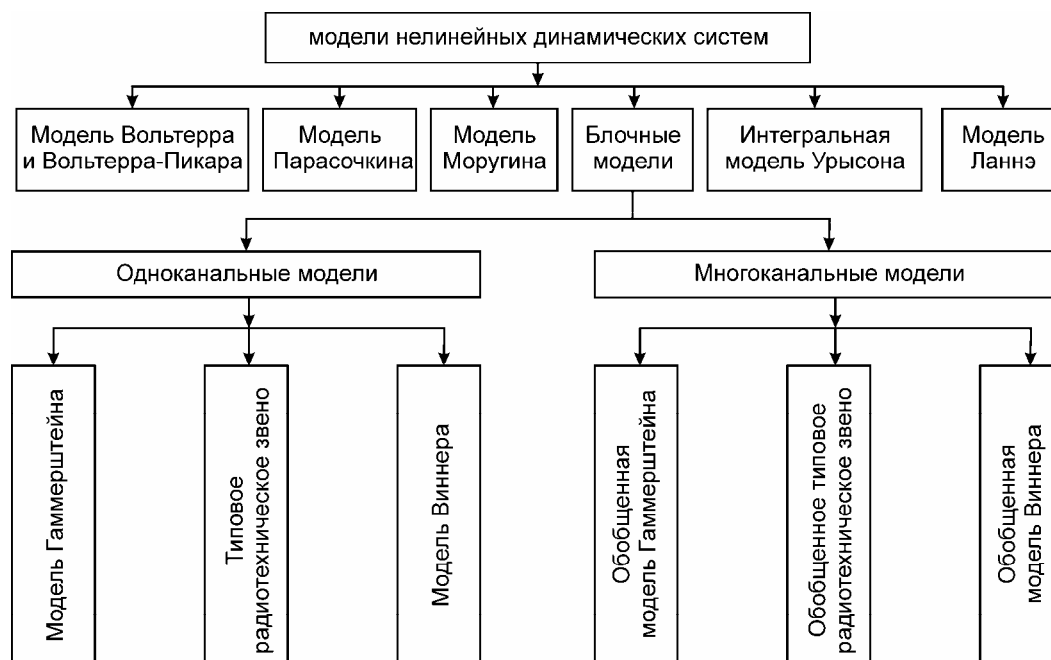


Рис. 3.4. Нелинейные модели измерительных преобразователей.

Приведём краткую сравнительную характеристику этих нелинейно-инерционных моделей. При сравнении указанных моделей важно определить основные достоинства, недостатки и ограничения, накладываемые на входные сиг-

налы. Кроме того, укажем для решения каких задач, на практике используется каждая модель (идентификация, анализ или синтез).

Среди нелинейно-инерционных моделей особо следует выделить так называемые блочно-ориентированные модели [29]: модель Винера, модель Гаммерштейна и типовое радиотехническое звено (ТРТЗ). Важной особенностью указанных моделей является то, что модель ИП представляется в виде соединения конечного числа линейных инерционных элементов и нелинейных статических (безинерционных) элементов. Модели данного класса являются самыми простыми нелинейно-инерционными моделями измерительных преобразователей. Они подразделяются на одноканальные и многоканальные модели.

Успешное применение таких моделей на практике связано с тем, что датчики и измерительные приборы нередко конструктивно являются последовательным соединением нескольких звеньев. Соответственно если такую структуру можно условно разбить на две-три части, в каждой из которых проявляются либо линейные инерционные свойства, либо нелинейные безинерционные свойства, то в результате модель Винера, модель Гаммерштейна или типовое радиотехническое звено оказываются адекватными моделями такого преобразователя.

В табл. 3.1 и табл. 3.2 приведены математические описания соответственно одноканальных и многоканальных блочно-ориентированных нелинейных моделей измерительных преобразователей.

*Табл. 3.1 Математическое описание нелинейных одноканальных моделей измерительных преобразователей*

Модель	Математическое описание
Модель Винера	$y(t) = F\left(\int_{-\infty}^{\infty} H(t-\tau)x(\tau)d\tau\right)$
Модель Гаммерштейна	$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t-\tau)F(x(\tau))d\tau$
Типовое радиотехническое звено	$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t-\tau)F\left(\int_{-\infty}^{\infty} H(t-\tau)x(\tau)d\tau\right)d\tau$

Здесь  $F(x)$  – функция нелинейного звена,  $H(t)$  и  $K(t)$  – импульсные характеристики соответственно входного и выходного инерционного звена.

Табл. 3.2 Математическое описание нелинейных многоканальных моделей измерительных преобразователей

Модель	Математическое описание
Обобщённая модель Винера	$y(t) = \sum_{j=1}^n F_j \left( \int_{-\infty}^{\infty} K_j(t-\tau) x(\tau) d\tau \right)$
Обобщённая модель Гаммерштейна	$y(t) = \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} K_j(t-\tau) F_j(x(\tau)) d\tau$
Обобщённое типовое Радиотехническое звено	$y(t) = \sum_{j=1}^n \int_{-\infty}^{\infty} K_j(t-\tau) F_j \left( \int_{-\infty}^{\infty} H_j(t-\tau) x(\tau) d\tau \right) d\tau$

Здесь  $j = 1, 2, \dots, n$  – порядковые номера каналов,  $n$  – количество каналов.

Нелинейные модели данного класса находят широкое применение на практике. В частности одноканальные модели применяются для решения задач анализа и идентификации, а многоканальные для решения задач синтеза.

Недостаток этих моделей состоит в ограниченных аппроксимационных возможностях. Особенно сильно это ограничение сказывается при бигармонических и полигармонических входных сигналах.

Однако, переход к более сложным нелинейно-инерционным моделям становится необходим только тогда, когда применение простейших нелинейных моделей не позволяет добиться требуемой точности описания выходного сигнала.

Другой, достаточно часто применяемой на практике, нелинейно-инерционной моделью является модель в виде ряда Вольтерра или Вольтерра-Пикара. Математическое описание данной модели можно представить в виде:

$$y(t) = \sum_{i=1}^n \int \dots \int h_i(t-\tau_1, t-\tau_2, \dots, t-\tau_i) \prod_{j=1}^i x(\tau_j) d\tau_j, \quad (3.20)$$

где  $h_i(t-\tau_1, t-\tau_2, \dots, t-\tau_i)$  – импульсные характеристики,  $x(\tau_j)$  – входной сигнал.

В настоящее время широкое развитие получили методы, основанные на применении модели в виде ряда Вольтерра для решения как задач анализа и идентификации, так и задач синтеза.

К достоинствам данной модели можно отнести: явную связь отклика и воздействия, одновременный и компактный учёт инерционных и нелинейных свойств измерительного преобразователя, возможность обобщения понятия пе-

редаточной функции на нелинейные цепи, для которых многомерные передаточные функции определяются как преобразования Лапласа от ядер интегральных слагаемых ряда Вольтерра и алгебраизацию интегральных выражений ряда Вольтерра при использовании преобразований Лапласа и Фурье.

Однако при использовании ряда Вольтерра для решения задач анализа и идентификации возникают некоторые трудности. Во-первых, с ростом размерности ядер усложняется выполнение преобразования Лапласа в многомерном пространстве, и соответственно усложняются все расчёты и преобразования. Во-вторых, при увеличении степени нелинейности системы или увеличении амплитуды входного воздействия сходимость ряда Вольтерра ухудшается. Всё это приводит к тому, что ряд Вольтерра в основном применяется для решения задач идентификации и анализа слабонелинейных систем.

Следующей нелинейно-инерционной моделью является интегральная модель Урысона. Данная модель выгодно отличается от других моделей компактностью описания [30]:

$$y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(t-\tau, x(\tau)) d\tau,$$

где  $K(t, x)$  – нелинейный функционал,  $x(\tau)$  – входной сигнал.

Однако модель Урысона применима лишь для описания систем в случае, когда входной сигнал имеет малую амплитуду или сравнительно медленно изменяется. Указанное свойство резко сужает возможности использования данной модели для решения задач анализа и идентификации. Кроме того, в ряде случаев интеграл от функционала  $K(t, x)$  не вычисляется аналитически, что также является существенным неудобством модели Урысона при решении задач анализа. Поэтому на практике эта модель чаще всего применяется для решения задач синтеза.

Модель Парасочкина [31] была предложена для идентификации и анализа сильнонелинейных измерительных преобразователей с коротким переходным процессом, за время которого входной сигнал не успевает существенно измениться. Таким образом, серьёзным недостатком данной модели является ограничение на инерционные свойства, что резко снижает практическую ценность данной модели. Поэтому применение на практике модели Парасочкина ограничивается лишь несколькими частными случаями.

Ещё одной нелинейно-инерционной моделью является модель Ланнэ [32]. Эта модель была предложена для решения задач синтеза преобразователей сигнала. Модель ИП в данном случае представляет собой каскадное соединение расщепителя и нелинейного безинерционного стационарного многополюсника (рис. 3.5).

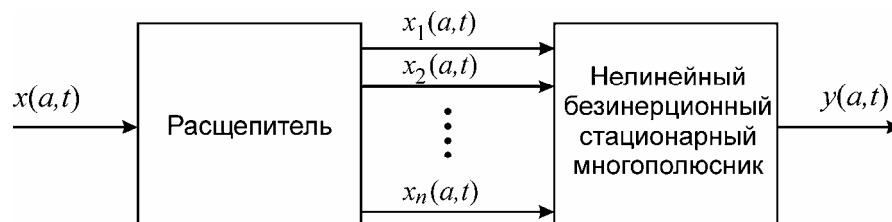


Рис. 3.5. Функциональная схема модели Ланнэ.

На выходе расщепителя из входного сигнала  $x(a, t)$  (где  $a = [a_1, a_2, \dots, a_n]$  – вектор параметров, значения которых лежат в некоторой области  $G_a$ ) формируется семейство сигналов  $x_1(a, t), x_2(a, t), \dots, x_n(a, t)$ , удовлетворяющие условию полного или частичного расщепления. Нелинейный многополюсник представляет собой систему с  $n$  входами и одним выходом, которая описывается полиномом или другой нелинейной функцией от  $n$  переменных:

$$y(a, t) = P[x_1(a, t), x_2(a, t), \dots, x_n(a, t)].$$

На практике модель Ланнэ находит широкое применение при решении задач синтеза нелинейных измерительных преобразователей. Для решения задач идентификации и анализа предпочтительнее применять другие нелинейные модели.

В заключение рассмотрим модель Моругина [33]. Важным достоинством этой модели является то, что она позволяет эффективно решать численными методами задачу анализа в случае полигармонического или модулированных входных сигналов для известной модели измерительного преобразователя. Модель может быть представлена в виде электрической схемы, системы алгебраических и дифференциальных уравнений, в том числе некоторых уравнений в частных производных, отрезком ряда Вольтерра или оператором Урысона. Следует отметить, что в общем случае модель может быть нестационарной, т.е. её параметры могут явно зависеть от времени. Поэтому, модель Моругина в ряде случаев оказывается очень удобной для решения задач анализа нелинейных измерительных преобразователей.

Таким образом, из всего вышесказанного можно сделать вывод, что общих рекомендаций по выбору нелинейно-инерционных моделей для анализа ИП не существует. В каждом конкретном случае отдавать предпочтение той или иной математической модели следует исходя из требований накладываемых на точность описания ИП, класс входных сигналов и вида решаемой задачи (анализ, синтез или идентификация).

В частности, когда стоит задача анализа нелинейного динамического преобразователя в большинстве случаев наиболее удобной является модель Гаммерштейна. В том случае, когда требуется высокая точность описания выходного сигнала ИП, обычно переходят к модели в виде ряда Вольтерра или Вольтерра-Пикара.

Рассмотренные выше модели не учитывают одну из особенностей измерительных каналов, а именно, при наличии нелинейности в измерительном преобразователе обязательным является введение так называемого линеаризатора имеющего функцию нелинейности, обратную функции самого ИП. Как правило, линеаризатор реализуется в виде отдельного аппаратного или программного блока. Таким образом, дополнив модель Гаммерштейна модулем линеаризатора (нелинейным блоком) получаем модель Гаммерштейна – Винера [34], которая наиболее точно соответствует структуре измерительного канала.

## ГЛАВА 4

### ДИНАМИЧЕСКИЕ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ КАНАЛОВ

Численное оценивание динамической погрешности преобразования измеряемой величины производят с помощью среднеквадратичного значения погрешности. Это обусловлено тем, что при случайном входном процессе  $x(t)$  динамическая погрешность преобразователя  $\delta(t) = y(t) - x(t)$ , где  $y(t)$  сигнал на выходе ИП, также является случайной функцией времени, поэтому речь может идти только об определении не мгновенных, а лишь некоторых усредненных значений этой величины. Такой оценкой обычно служит среднеквадратичная динамическая погрешность (при условии, что процесс  $x(t)$  обладает свойством эргодичности):

$$\delta_{\text{д.и.}} = \sqrt{(y(t) - x(t))^2} = \sqrt{\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (y(t) - x(t))^2 dt},$$

где  $T$  - интервал усреднения.

Входной и выходной сигналы связаны между собой посредством передаточной функции измерительного преобразователя. Если измеряемая величина носит случайный характер, то наиболее удобным является определение погрешности через статистические характеристики входного случайного процесса. Как правило, на практике используются такие характеристики случайного процесса как, автокорреляционная функция или функция спектральной плотности мощности.

В зависимости от принципа работы первичного преобразователя измерительного канала будут различаться методы вычисления (или оценки) динамической погрешности. В работе будут рассмотрены методы вычисления (оценки) динамической погрешности основных классов преобразователей:

- линейные непрерывного действия;
- линейные циклического действия;
- нелинейные непрерывного действия.

Вполне очевидным является факт, что получение аналитических выражений для погрешности возможно только для небольшого числа простых ИП. Поэтому в общем случае нахождение погрешности в динамическом режиме измерения решается на основе имитационного моделирования.

#### 4.1 Вычисление динамической погрешности линейного ИП непрерывного действия

Наиболее простым случаем является вычисление динамической погрешности при прямых измерениях, когда измерительный преобразователь представляет скалярную линейную систему. Согласно известному выражению, при воздействии на вход линейной динамической системы случайного процесса  $x(t)$  со спектральной плотностью  $S_x(\omega)$ , спектральная плотность отклика будет определяться выражением:

$$S_y(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_x(\omega), \quad (4.1)$$

где  $W(j\omega)$  - передаточная функция ИП,  $S_x(\omega)$  - спектральная плотность входного случайного процесса,  $S_y(\omega)$  - спектральная плотность случайного процесса на выходе ИП.

Спектральная плотность динамической ошибки  $S_\varepsilon(\omega)$  находится из выражения (4.1) заменой  $W(j\omega)$  на  $W_\Delta(j\omega)$ , с учетом того, что:

$$W_\Delta(j\omega) = 1 - W(j\omega), \quad (4.2)$$

следовательно:

$$S_\Delta(\omega) = |W_\Delta(j\omega)|^2 S_x(\omega). \quad (4.3)$$

Численной же оценкой динамической погрешности служит погрешность, полученная из (4.3):

$$\delta_{дин}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |W_\Delta(j\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega \quad \text{или} \quad \delta_{дин}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty |1 - W(j\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega. \quad (4.4)$$

Рассмотрим одну из наиболее характерных для измерительных преобразователей передаточную функцию - инерционное звено первого порядка.

Предположим, что на входе измерительного преобразователя действует случайный процесс с известными статистическими характеристиками. Будем считать также, что случайный входной процесс, действующий на входе ИП, обладает свойствами стационарности и эргодичности, а АКФ и функция СПМ соответствуют модели вида (2.10)

Тогда значение квадрата динамической погрешности измерительного преобразователя будет определяться выражением:



$$\delta_{дин}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left| 1 - \frac{1}{1 + j\omega T} \right|^2 \left[ \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \right] d\omega. \quad (4.5)$$

сделав необходимые преобразования (4.5) и введя безразмерный коэффициент  $B = \alpha T$ , получим:

$$\delta_{дин}^2(B) = \frac{B}{1 + B}. \quad (4.6)$$

Выражение (4.6) нормировано из условия, что площадь, ограниченная кривой  $S_x(\omega)$ , равна единице.

В том случае, если выражение для спектральной плотности входного процесса представлено в виде аппроксимирующего ряда (2.11), т.е. входной сигнал представляет собой аддитивную смесь  $n$  взаимно независимых случайных процессов, выражение (4.6) будет представлено в виде:

$$\delta_{дин}^2 = \sum_{k=1}^n C_k \frac{B_k}{1 + B_k}, \quad (4.7)$$

где  $B_k = \alpha_k T$ , напомним так же, что  $\sum_{k=1}^n C_k = 1$ .

Полученное выражение (4.7) позволяет определять квадрат динамической погрешности для различных входных случайных процессов при условии, что их спектральная плотность может быть с достаточной точностью аппроксимирована рядом вида (2.11).

Если на входе инерционного звена существует аддитивная смесь взаимно независимых случайных процессов, то математическая модель будет представлена в виде квадратной матрицы размерностью  $n \times n$  спектральных и кросс-спектральных плотностей:

$$[\mathbf{S}_x(\omega)] = \begin{bmatrix} S_{x11}(\omega) & S_{x12}(\omega) & \cdots & S_{x1n}(\omega) \\ S_{x21}(\omega) & S_{x22}(\omega) & \cdots & S_{x2n}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S_{xn1}(\omega) & S_{xn2}(\omega) & \cdots & S_{xnn}(\omega) \end{bmatrix},$$

а выражение (4.5) принимает следующий вид:

$$\delta_{\vec{a}\vec{e}i}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left| 1 - \frac{1}{1 + j\omega T} \right|^2 \|S_x(\omega)\| d\omega,$$

где  $\|S_x(\omega)\|$  - “октаэдрическая” [35] норма матрицы  $[S_x(\omega)]$ .

Если предположить, что все элементы матрицы  $[S_x(\omega)]$  имеют вид (2.11), то (4.7) запишется в следующем виде:

$$\delta_{дин}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n C_{ik} \frac{B_{ik}}{1 + B_{ik}}. \quad (4.8)$$

Покажем, что (4.7) является частным случаем (4.8). В случае воздействия на входе ИП взаимно независимых процессов матрица  $[S_x(\omega)]$  будет представлять собой диагональную матрицу. Вследствие этого в (4.8) норму матрицы  $[S_x(\omega)]$  можно заменить на след этой матрицы, т.е.:

$$\delta_{\vec{a}\vec{e}i}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left| 1 - \frac{1}{1 + j\omega T} \right|^2 Sp[S_x(\omega)] d\omega.$$

Следовательно, в выражении (4.8) остается один знак суммы, и оно полностью совпадает с (4.7), что и требовалось доказать.

Другим распространенным выражением для описания АКФ и функции СПМ случайного процесса является выражение вида (2.12) или более общий случай (2.13).

В случае (2.13) квадрат динамической погрешности инерционного преобразователя будет определяться выражением:

$$\delta_{дин}^2 = \sum_{k=1}^n C_k \frac{(B_{1k}^2 + B_{2k}^2 - 1)(B_{1k}^2 + B_{2k}^2 - B_{1k}^2) + 2B_{2k}^2}{(B_{1k}^2 + B_{2k}^2 - 1)^2 + 4B_{2k}^2}, \quad (4.9)$$

где  $B_{1k} = \alpha_k T$ ,  $B_{2k} = \beta_k T$

Опустив аналогичные с предыдущим случаем рассуждения, запишем выражение для определения квадрата погрешности при воздействии на входе инерционного ИП аддитивной суммы взаимосвязанных случайных процессов:

$$\delta_{\text{дин}}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n C_{ik} \frac{(B_{1ik}^2 + B_{2ik}^2 - 1)(B_{1ik}^2 + B_{2ik}^2 - B_{1ik}^2) + 2B_{2ik}^2}{(B_{1ik}^2 + B_{2ik}^2 - 1)^2 + 4B_{2ik}^2}. \quad (4.10)$$

В том случае, когда на входе ИП действуют независимые случайные процессы, матрица  $[S_x(\omega)]$  становится диагональной, а выражение (4.10) вырождается в выражение (4.9).

Исследуем динамическую погрешность измерительных преобразователей, описываемых передаточными функциями звена чистого запаздывания:

$$W(j\omega) = e^{-j\omega T},$$

и колебательного звена:

$$W(j\omega) = \frac{1}{(j\omega)^2 T_1^2 + 2j\omega T_2 + 1}.$$

Для входного воздействия, имеющего АКФ вида (2.11), квадрат динамической погрешности звена чистого запаздывания будет описываться выражением:

$$\delta_{\text{дин}}^2 = 2 \sum_{k=1}^n C_k [1 - e^{-B_k}].$$

При входном воздействии, имеющим АКФ вида (2.13), квадрат динамической погрешности звена чистого запаздывания будет описываться выражением:

$$\delta_{\text{дин}}^2 = 2 \sum_{k=1}^n C_k [1 - e^{-B_{1k}} \cos(B_{2k})],$$

для колебательного звена:

$$\delta_{\text{дин}}^2 = \sum_{k=1}^n C_k \left[ 1 + \frac{B_{1k}^2 - B_{2k}}{B_{1k} (B_{2k}^2 + B_{1k} + 1)} \right],$$

где  $B_{1k} = T_1 \alpha_k$ ,  $B_{2k} = 2T_2 \alpha_k$ .

Аналогичным образом можно получить зависимости для других элементарных динамических звеньев при различных спектральных функциях входного случайного процесса. Однако, в большинстве случаев, получение аналитических выражений затруднительно, а результат более чем громоздок. И вполне естественно, что при анализе сложных систем получение аналитических выражений достаточно проблематично. Так, например, для параллельно включенных инер-

ционных звеньев первого порядка и входном воздействии вида (2.10) квадрат динамической погрешности будет определяться выражением:

$$\delta_{дин}^2 = 1 - \frac{B_1 + B_2}{B_1 + B_2 + B_1 B_2 + 1} + \frac{4B_1 B_2}{(B_1 + B_2)(B_1 + B_2 + B_1 B_2 + 1)}.$$

Для последовательного включения двух инерционных звеньев при такой же спектральной плотности входного случайного процесса:

$$\delta_{дин}^2 = 1 - \frac{1}{B_1 + B_2 + B_1 B_2 + 1} + \frac{B_1 B_2}{(B_1 + B_2)(B_1 + B_2 + B_1 B_2 + 1)}.$$

Практический интерес представляет сложная система, отображающая систему подготовки и подачи пробы от объекта к измерительному прибору и инерционность самого ИП. Система подачи жидкой или газообразной пробы для аналитических измерительных преобразователей, в большинстве случаев, может быть представлено в виде звена чистого запаздывания [36]. Тогда передаточную функцию, в соответствии с рис. 4.1, можно представить в следующем виде:

$$W(j\omega) = \frac{e^{-j\omega T_1}}{1 + j\omega T_2}.$$

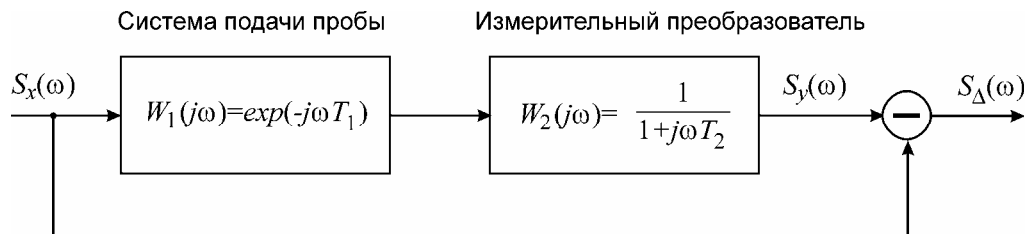


Рис. 4.1 Структура сложного преобразователя измерительного канала

Выполнив несложные преобразования на основании (4.4), при условии, что СПМ входного случайного процесса описывается (2.10) а передаточная функция самого измерительного преобразователя описывается инерционным звеном первого порядка, получим выражение для квадрата динамической системы приведенной на рис. 4.2:

$$\delta_{дин}^2 = \frac{2(1 - e^{-B_1})B_2}{1 + B_2}. \quad (4.11)$$

График семейства функций (4.11) приведен на рис. 4.2.

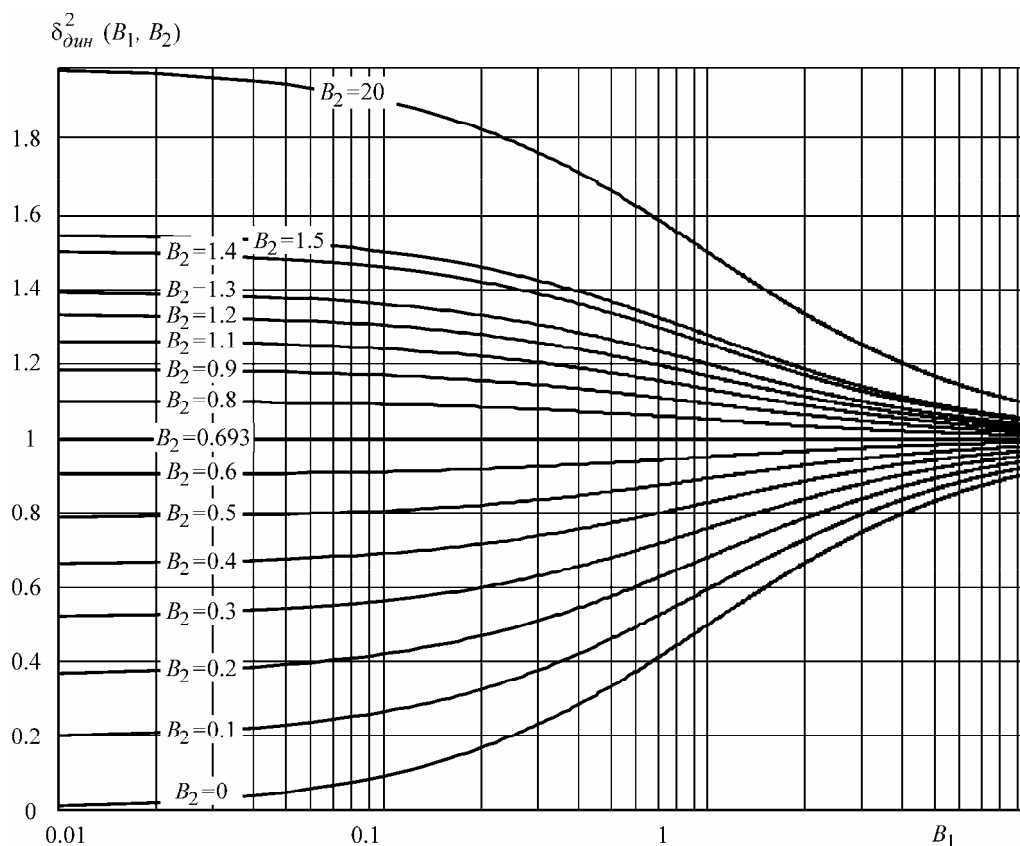


Рис. 4.2 Семейство кривых функции 4.11

Характерной особенностью полученного выражения, представляющей только теоретический интерес, является независимость динамической погрешности от  $B_2$  при  $B_1 = \ln(2)$ , а при  $B_1 > \ln(2)$  рост постоянной времени инерционного звена  $T_2$  (а соответственно и  $B_2$ ) приводит к уменьшению динамической погрешности.

В приложении 3 приведены аналитические выражения квадрата динамической погрешности типовых передаточных функций измерительных преобразователей при различных видах функции СПМ входного случайного процесса. В приложении 4 приведены примеры функций квадрата динамической погрешности для некоторых сложных структур измерительных преобразователей.

#### 4.2 Вычисление динамической погрешности линейного ИП циклического действия

Полученное выражение (3.14) в разделе 3.22 позволяет проводить анализ динамической погрешности измерительного преобразователя циклического действия применяя математический аппарат, что и для преобразователей непрерыв-

ного действия. Рассмотрим пример нахождения динамической погрешности для одного частного случая. Предположим, что на входе ИП действует стационарный случайный процесс  $x(t)$ , нормированная функция спектральной плотностью мощности которого имеет вида (2.10). Тогда на основании (4.4) запишем выражение для квадрата динамической погрешности:

$$\delta_{дин}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left| 1 - \frac{[1 - \exp(-j\omega T_1)] \exp\left(-\frac{j\omega(T_1 + T_2)}{2}\right)}{j\omega T_1} \right|^2 \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega.$$

Выполнив интегрирование приведенного выше выражения приходим к следующему соотношению:

$$\delta_{дин}^2(B_1, B_2) = \frac{B_1^2 + 2B_1 \exp\left(-\frac{B_2 + 3B_1}{2}\right) - 2B_1 \exp\left(-\frac{B_2 + B_1}{2}\right) + 2\exp(-B_1) + 2B_1 - 2}{B_1^2},$$

где  $B_1 = \alpha T_1$  и  $B_2 = \alpha T_2$  - безразмерные коэффициенты.

Семейство кривых квадрата динамической погрешности, построенных по полученному выражению при различных значениях коэффициентов  $B_1$  и  $B_2$  приведено на рис. 4.3.

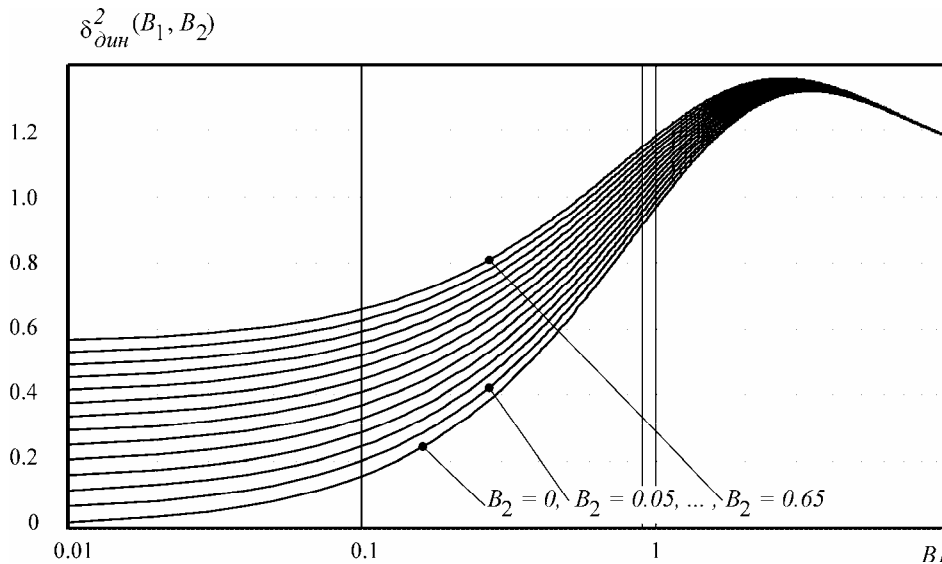


Рис. 4.3 Семейство кривых квадрата динамической погрешности ИП циклического действия.

На рис. 4.3 приведены кривые для всего диапазона значений квадрата динамической погрешности, хотя практический интерес представляет только нижняя часть, соответствующая малым (приемлемым) значениям погрешности. Однако, как видно из приведенных кривых, нормированное значение погрешности может превышать единицу, что обусловлено наличием в структуре модели звена чисто-го запаздывания.

### 4.3 Динамическая погрешность измерительных каналов с нелинейными измерительными преобразователями

Одним из подходов к решению задачи вычисления динамической погрешности нелинейных измерителей каналов является оперирование мгновенными значениями входного и выходного сигналов [37].

Основной трудностью возникающей в рассматриваемом случае является учёт нелинейности преобразования входного сигнала. Исходя из этого, главной задачей данной части работы является разработка модели расчёта динамической погрешности ИП с одновременным учётом его инерционных и нелинейных свойств. В частности, необходимо вывести уравнения описывающие преобразование входного сигнала в выходной для случая нелинейного динамического преобразователя.

В качестве базовой при построении модели динамической погрешности нелинейного динамического ИП будем использовать модель Гаммерштейна-Винера. Структурная схема модели динамической погрешности на основе модели Гаммерштейна-Винера показана на рис 4.3. В её состав входят: нелинейное безынерционное звено  $F_1(x(t))$  отображающее нелинейность преобразователя, линейное инерционное звено  $W(j\omega)$ , отражающее динамические свойства ИП и нелинейное звено  $F_2(y_2(t))$ , отображающее линеаризатор.

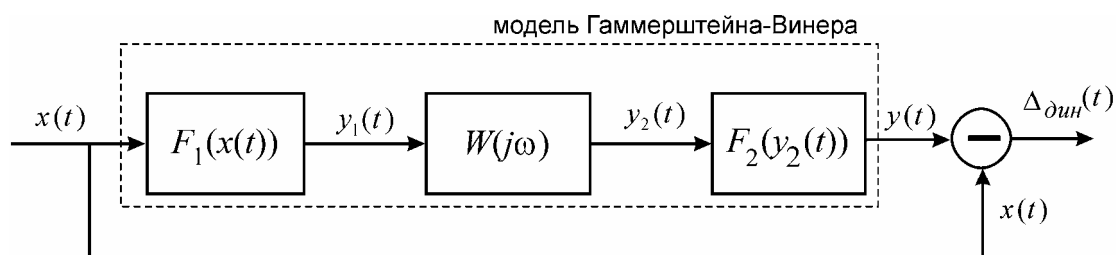


Рис. 4.3. Структурная схема модели динамической погрешности нелинейного измерительного преобразователя

На приведенной структурной схеме  $x(t)$  и  $y(t)$  отображают соответственно входной и выходной сигналы ИП, а  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  – являются промежуточными сигналами, отображающими преобразование входного сигнала в нелинейном и динамическом звене, соответственно.

#### 4.3.1 Модель динамической погрешности нелинейного ИП при гармоническом входном сигнале.

Прежде чем перейти к построению модели динамической погрешности нелинейного ИП, при воздействии на его входе случайного процесса, рассмотрим частный случай, который позволит выявить некоторые важные закономерности.

Будем считать, что на входе ИП действует гармонический сигнал вида:

$$x(t) = A + B \sin(\omega t),$$

где  $A$  – постоянная составляющая сигнала,  $B$  – амплитуда гармонической составляющей сигнала,  $\omega$  – частота гармонической составляющей

Предположим, что исследуемый ИП (рис. 4.3) имеет следующие характеристики:

$$F_1(x(t)) = x^2(t), \quad F_2(y_2(t)) = \sqrt{y_2(t)}, \quad W(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}.$$

Инерционному звену указанного нелинейного ИП соответствует дифференциальное уравнение:

$$y_1(t) = T \frac{dy_2(t)}{dt} + y_2(t).$$

Сигнал на выходе нелинейности запишется в виде:

$$y_1(t) = (A + B \sin(\omega t))^2, \text{ или } y_1(t) = A^2 + 2AB \sin(\omega t) + \frac{B^2 - B^2 \cos(2\omega t)}{2},$$

в итоге получим следующее дифференциальное уравнение:

$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = A^2 + 2AB \sin(\omega t) + \frac{B^2 - B^2 \cos(2\omega t)}{2}. \quad (4.12)$$

Общее решение неоднородного уравнения (4.12) может быть представлено как сумма некоторого частного решения этого уравнения  $y^*$  и общего решения  $\bar{y}$  соответствующего однородного уравнения:



$$T \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = 0. \quad (4.13)$$

Общее решение уравнения (4.13) имеет вид:

$$\bar{y} = C_1 e^{-\frac{t}{T}}, \quad (4.14)$$

где  $C_1$  – произвольная постоянная, зависящая от начальных условий.

Частное решение уравнения (4.13) можно записать в виде:

$$y^* = C + D \sin(\omega t) + E \cos(\omega t) + F \sin(2\omega t) + G \cos(2\omega t) \quad (4.15)$$

где  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  и  $G$  – постоянные параметры, значения которых могут быть легко найдены по методу неопределённых коэффициентов:

$$C = A^2 + \frac{B^2}{2}; D = \frac{2AB}{1+T^2\omega^2}; E = -\frac{2ABT}{1+T^2\omega^2}; F = -\frac{B^2}{2+8T^2\omega^2}; G = -\frac{B^2}{2+8T^2\omega^2}.$$

Таким образом, общее решение уравнения (4.13) запишется в следующем виде:

$$y_2(t) = C_1 e^{-\frac{t}{T}} + A^2 + \frac{B^2}{2} + 2AB \left( \frac{\sin(\omega t) - T\omega \cos(\omega t)}{1+T^2\omega^2} \right) - \\ - B^2 \left( \frac{\cos(2\omega t) + 2T\omega \sin(2\omega t)}{2+8T^2\omega^2} \right).$$

В установившемся режиме ( $t \rightarrow \infty$ ), при нулевых начальных условиях  $y(0) = 0$ , полученное решение можно переписать в следующем виде:

$$y_2(t) = A^2 + \frac{B^2}{2} + 2AB \left( \frac{\sin(\omega t) - T\omega \cos(\omega t)}{1+T^2\omega^2} \right) - B^2 \left( \frac{\cos(2\omega t) + 2T\omega \sin(2\omega t)}{2+8T^2\omega^2} \right).$$

Соответственно, выходной сигнал, с учетом функции линеаризатора, примет вид:

$$y(t) = \sqrt{A^2 + \frac{B^2}{2} + 2AB \left( \frac{\sin(\omega t) - T\omega \cos(\omega t)}{1+T^2\omega^2} \right) - B^2 \left( \frac{\cos(2\omega t) + 2T\omega \sin(2\omega t)}{2+8T^2\omega^2} \right)}.$$

В силу (1.1) можно записать выражение абсолютной динамической погрешности рассматриваемого преобразователя:

$$\Delta_{\text{дин}}(t) = A + B \sin(\omega t) - \\ - \sqrt{A^2 + \frac{B^2}{2} + 2AB \left( \frac{\sin(\omega t) - T\omega \cos(\omega t)}{1+T^2\omega^2} \right) - B^2 \left( \frac{\cos(2\omega t) + 2T\omega \sin(2\omega t)}{2+8T^2\omega^2} \right)}$$

Для сравнения приведём выражение для динамической погрешности соответствующего линейного ИП:

$$\Delta_{\text{дин}}(t) = B \sin(\omega t) - B \frac{\sin(\omega t) - T \omega \cos(\omega t)}{1 + T^2 \omega^2}$$

Построим график динамической погрешности (рис. 4.4) соответственно линейного и нелинейного ИП приняв  $A = 1$ ,  $B = 1$ ,  $T = 1$  и  $\omega = 2.5$ .

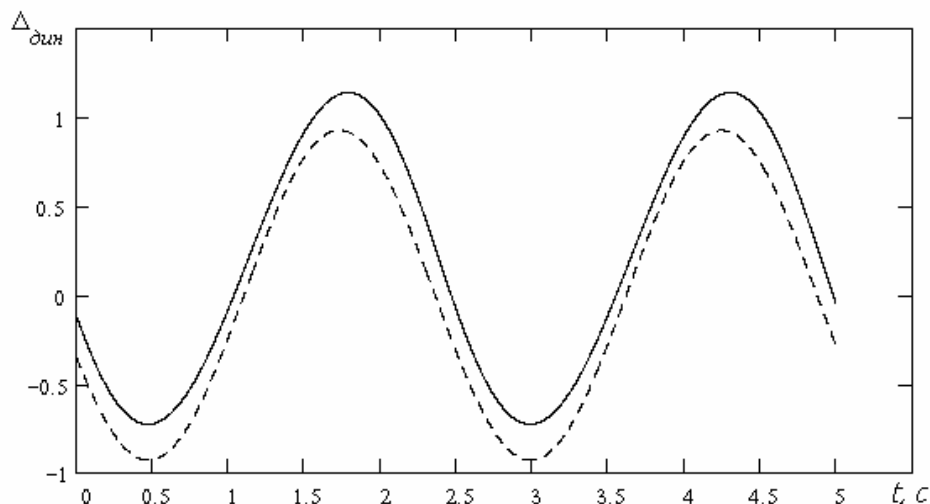


Рис. 4.4. График мгновенных значений динамической погрешности преобразователей (сплошная линия соответствует нелинейному ИП, пунктирная — линейному).

Из анализа графика (рис. 4.4) можно заключить, что существует разница между динамической погрешностью линейного и нелинейного ИП. Исследуем поведение этой функции при предельных значениях параметра инерционного звена.

Если параметр инерционного звена  $T = 0$ , то динамическая погрешность  $\Delta_{\text{дин}}(t)$  как линейного, так нелинейного равна 0. В том случае, когда  $T \rightarrow \infty$ , получим следующий вид функций динамической погрешности:

Для линейного ИП:  $\Delta_{\text{дин}}(t) = B \sin(\omega t)$ .

Для нелинейного ИП:  $\Delta_{\text{дин}}(t) = A + B \sin(\omega t) - \sqrt{A^2 + \frac{B^2}{2}}$ .

Приведённые выражения указывают на наличие искажения сигнала в нелинейном ИП, несмотря на применение идеального линеаризатора. В частности в выходном сигнале преобразователя появляются высшие гармоники, а так же возникает постоянное смещение разностного сигнала.

Таким образом, если инерционные свойства ИП выражены слабо, величины динамической ошибки линейного и нелинейного ИП практически совпадают. В том случае, когда инерционные свойства ИП выражены достаточно сильно, величина динамической погрешности нелинейного ИП отличается от динамической погрешности линейного ИП. Важно отметить, что указанное различие обусловлено влиянием нелинейных свойств ИП.

#### 4.3.2 Модель динамической погрешности нелинейного измерительного преобразователя при входном сигнале в виде случайного процесса для степенных функций нелинейностей

Для последующего анализа входной сигнал представим в аналитическом виде. Удобнее всего сделать это в форме тригонометрического ряда. Учитывая, что случайный процесс обычно представляется в виде последовательности дискретных отсчётов, выполнив дискретное преобразование Фурье (ДПФ) можно записать выражение для входного случайного процесса  $x(t)$ :

$$x(t) = C_0 + 2|C_1|\cos(\omega t + \varphi_1) + 2|C_2|\cos(2\omega t + \varphi_2) + \dots + 2|C_N|\cos(N\omega t + \varphi_N), \quad (4.16)$$

где  $C_0, C_1, \dots, C_N$  – коэффициенты ряда Фурье,  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_N$  – фазовый угол соответствующего члена ряда Фурье,  $N$  – количество гармоник спектра,  $\omega$  – частота первого отсчета.

Введём следующие обозначения:  $A_0 = |C_0|$ ,  $A_k = 2|C_k|$ ,  $\varphi_0 = \arg(C_0) = 0$ ,  $\varphi_k = \arg(C_k)$ , ( $k = 1, 2, \dots, N$ ) и запишем выражение (4.16) в более компактном виде:

$$x(t) = \sum_{k=0}^N A_k \cos(k\omega t + \varphi_k). \quad (4.17)$$

**Модель линейного измерительного преобразователя.** Первоначально исследуем преобразование входного сигнала в линейном динамическом ИП и приведём выражение для расчёта динамической погрешности.

Преобразование сигнала указанным ИП, может быть описано линейным дифференциальным уравнением вида:

$$x(t) = a_0 y(t) + a_1 \frac{dy(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + a_3 \frac{d^3 y(t)}{dt^3} + \dots + a_n \frac{d^n y(t)}{dt^n}, \quad (4.18)$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_n$  – постоянные, зависящие от параметров передаточной функции инерционного звена  $W(j\omega)$ ,  $n$  – порядок уравнения, определяется видом передаточной функции.

В качестве передаточной функции инерционного звена ИП в дальнейших выкладках будем использовать достаточно часто встречающуюся на практике передаточную функцию ИП следующего вида:

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T},$$

где  $T$  – постоянная времени инерционного звена.

В этом случае уравнение (4.18) перепишется в виде:

$$x(t) = T \frac{dy(t)}{dt} + y(t).$$

Учитывая, что входной сигнал представлен в форме (4.17) можно окончательно записать:

$$\sum_{k=0}^N A_k \cos(k\omega t + \varphi_k) = T \frac{dy(t)}{dt} + y(t). \quad (4.18)$$

Общее решение неоднородного уравнения (4.18) может быть получено как сумма некоторого частного решения этого уравнения  $y^*$  и общего решения  $\bar{y}$  соответствующего однородного уравнения (4.13).

Общее решение уравнения (4.13) имеет вид (4.14). Частное решение уравнения (4.18) можно записать в виде:

$$y^* = C + \sum_{k=0}^N A_k [D \sin(k\omega t + \varphi_k) + E \cos(k\omega t + \varphi_k)]$$

Значения постоянных параметров  $C$ ,  $D$  и  $E$  могут быть легко найдены по методу неопределённых коэффициентов:

$$C = 0, \quad D = \frac{A_k T \omega k}{T^2 \omega^2 k^2 + 1}, \quad E = \frac{A_k}{T^2 \omega^2 k^2 + 1}.$$

Таким образом, общее решение уравнения (4.18) запишется в следующем виде:

$$y(t) = C_1 e^{-\frac{t}{T}} + \sum_{k=0}^N \frac{A_k}{T^2 \omega^2 k^2 + 1} [T \omega k \sin(k\omega t + \varphi_k) + \cos(k\omega t + \varphi_k)]$$

В установившемся режиме ( $t \rightarrow \infty$ ), при нулевых начальных условиях  $y(0) = 0$ , полученное решение можно переписать в следующем виде:

$$y(t) = \sum_{k=0}^N \frac{A_k}{T^2 \omega^2 k^2 + 1} [T \omega k \sin(k \omega t + \varphi_k) + \cos(k \omega t + \varphi_k)].$$

Таким образом, в силу (1.1) выражение для абсолютной динамической погрешности рассматриваемого преобразователя можно записать в следующей форме:

$$\Delta_{\ddot{a} \ddot{e} i}(t) = \sum_{k=0}^n A_k \cos(k \omega t + \varphi_k) - \sum_{k=0}^N \frac{A_k}{T^2 \omega^2 k^2 + 1} [T \omega k \sin(k \omega t + \varphi_k) + \cos(k \omega t + \varphi_k)].$$

Полученное выражение позволяет вычислять динамическую погрешность линейных ИП.

**Моделирование нелинейного измерительного преобразователя с характеристикой в виде степенной функции.**

Преобразование сигнала динамическим звеном, может быть описано линейным дифференциальным уравнением вида:

$$y_1(t) = a_0 y_2(t) + a_1 \frac{d y_2(t)}{dt} + a_2 \frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} + a_3 \frac{d^3 y_2(t)}{dt^3} + \dots + a_n \frac{d^n y_2(t)}{dt^n}, \quad (4.19)$$

где  $a_0, a_1, \dots, a_n$  – постоянные, зависящие от параметров передаточной функции инерционного звена,  $n$  – порядок уравнения, определяется видом передаточной функции.

Методы решения уравнений вида (4.19) достаточно хорошо изучены и описаны в литературе [43]. Однако в рассматриваемом нами случае решение указанных уравнений усложняется в связи с тем, что функция  $y_1(t)$ , стоящая в левой части уравнения, представляет собой результат преобразования входного сигнала (4.16) в нелинейном звене. В общем случае эта функция имеет сложный вид и интегрирование уравнения (4.19) зачастую не представляется возможным. В аналитическом виде, получить решение указанного дифференциального уравнения (4.19) можно в том случае, когда  $F_1(x(t))$  является степенной функцией:

$$F_1(x(t)) = x^g(t), \quad (4.20)$$

где  $g$  – показатель степени, целое положительное число.

В случае, когда  $g = 1$  моделируемый ИП представляет собой обычный линейный динамический ИП и методика его исследования описана ранее. В случае же, когда  $g \geq 2$  исходное выражение для  $y_1(t)$  может быть записано следующим образом [44]:

$$y_1(t) = \left( \sum_{k=0}^n A_k \cos(k\omega t + \varphi_k) \right)^g =$$

$$= \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^n \dots \sum_{z=0}^n A_k A_m \dots A_z \cos(k\omega t + \varphi_k) \cos(m\omega t + \varphi_m) \dots \cos(z\omega t + \varphi_z)$$

где  $m = 1, 2 \dots N$ ,  $k = 1, 2 \dots N$ ,  $z = 1, 2 \dots N$ , а число сумм равно  $g$ .

Это выражение можно, используя формулы для раскрытия произведений тригонометрических функций, сравнительно легко преобразовать к более удобному для решения уравнения (4.19) виду:

$$y_1(t) =$$

$$= \frac{1}{2^{g-1}} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^n \dots \sum_{z=0}^n A_k A_m \dots A_z \left[ \begin{aligned} &\cos((k + m + \dots + z)\omega t + \varphi_k + \varphi_m + \dots + \varphi_z) + \\ &+ \cos((k - m + \dots + z)\omega t + \varphi_k - \varphi_m + \dots + \varphi_z) + \dots + \\ &+ \cos((k + m + \dots - z)\omega t + \varphi_k + \varphi_m + \dots - \varphi_z) \end{aligned} \right] \quad (4.21)$$

Используя указанное соотношение можно получить аналитические решения дифференциального уравнения (4.19) для степенных функций вида (4.20). Рассмотрим далее несколько примеров получения частных решений.

**Модель динамической погрешности нелинейного измерительного преобразователя с характеристикой в виде квадратичной функции.** Рассмотрим простейший случай, когда исследуемый ИП представлен структурной схемой (рис. 4.3) и имеет следующие характеристики:

$$F_1(x(t)) = x^2(t), \quad F_2(y_2(t)) = \sqrt{y_2(t)}, \quad W(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}.$$

Инерционному звену указанного нелинейного ИП соответствует дифференциальное уравнение:

$$y_1(t) = T \frac{dy_2(t)}{dt} + y_2(t).$$

После подстановки выражения для входного сигнала в форме (4.17), дифференциальное уравнение примет вид:

$$T \frac{dy_2(t)}{dt} + y_2(t) = \left( \sum_{k=0}^N A_k \cos(k\omega t + \varphi_k) \right)^2.$$

Раскрыв квадрат в правой части согласно (4.21), получим:

$$T \frac{dy_2(t)}{dt} + y_2(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^N A_k A_m \left[ \cos(k\omega t + \varphi_k - m\omega t - \varphi_m) + \cos(k\omega t + \varphi_k + m\omega t + \varphi_m) \right]. \quad (4.22)$$

Как указывалось в предыдущих параграфах общее решение неоднородного уравнения (4.22), можно представить в виде суммы некоторого частного решения этого уравнения  $y^*$  и общего решения  $\bar{y}$  соответствующего однородного уравнения (4.13).

Частное решение уравнения (4.22) можно записать в виде:

$$y^* = C + \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^N A_k A_m \left[ \begin{aligned} &D \sin(k\omega t + \varphi_k - m\omega t - \varphi_m) + E \cos(k\omega t + \varphi_k - m\omega t - \varphi_m) + \\ &+ F \sin(k\omega t + \varphi_k + m\omega t + \varphi_m) + G \cos(k\omega t + \varphi_k + m\omega t + \varphi_m) \end{aligned} \right]$$

Значения постоянных параметров  $C$ ,  $D$ ,  $E$ ,  $F$  и  $G$  могут быть легко найдены по методу неопределённых коэффициентов:

$$C = 0; \quad D = \frac{A_k A_m (k-m)\omega T}{(k-m)^2 \omega^2 T^2 + 1}; \quad E = \frac{A_k A_m}{(k-m)^2 \omega^2 T^2 + 1}; \quad F = \frac{A_k A_m (k+m)\omega T}{(k+m)^2 \omega^2 T^2 + 1};$$

$$G = \frac{A_k A_m}{(k+m)^2 \omega^2 T^2 + 1}.$$

Таким образом, общее решение уравнения (4.22) запишется в следующем виде:

$$y(t) = C_1 e^{-\frac{t}{T}} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^N (S_{21}(k, m) + S_{22}(k, m)),$$

где:

$$S_{21}(k, m) = \frac{A_k A_m}{(k+m)^2 \omega^2 T^2 + 1} \left[ \begin{aligned} &(k+m)\omega T \sin((k+m)\omega t + \varphi_k + \varphi_m) \\ &+ \cos((k+m)\omega t + \varphi_k + \varphi_m) \end{aligned} \right],$$

$$S_{22}(k, m) = \frac{A_k A_m}{(k-m)^2 \omega^2 T^2 + 1} \left[ \begin{aligned} &(k-m)\omega T \sin((k-m)\omega t + \varphi_k - \varphi_m) \\ &+ \cos((k-m)\omega t + \varphi_k - \varphi_m) \end{aligned} \right],$$

для  $k \in [0, 1..., N]$  и  $m \in [0, 1..., N]$ .

В установившемся режиме ( $t \rightarrow \infty$ ), при нулевых начальных условиях  $y(0) = 0$ , полученное решение можно записать в следующем виде:

$$y_2(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^N (S_{21}(k, m) + S_{22}(k, m)).$$

Таким образом, можно записать выходной сигнал рассматриваемого нелинейного ИП:

$$y(t) = \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^N (S_{21}(k, m) + S_{22}(k, m))}.$$

В соответствии со структурной схемой (рис. 4.3) абсолютная динамическая погрешность будет иметь вид:

$$\Delta_{дин}(t) = \sum_{s=0}^N A_s \cos s(\omega t + \varphi_p) - \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^N (S_{21}(k, m) + S_{22}(k, m))}.$$

**Модель динамической погрешности нелинейного измерительного преобразователя с характеристикой в виде кубической функции.** Рассмотрим теперь более сложный случай. Будем считать, что анализируемый ИП представлен структурной схемой (рис. 4.3) и имеет следующие характеристики:

$$F_1(x(t)) = x^3(t), \quad F_2(y_2(t)) = \sqrt[3]{y_2(t)}, \quad W(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}.$$

Инерционному звену указанного нелинейного преобразователя соответствует дифференциальное уравнение:

$$y_1(t) = T \frac{dy_2(t)}{dt} + y_2(t).$$

После подстановки выражения для входного сигнала в форме (4.17), дифференциальное уравнение примет вид:

$$T \frac{dy_2(t)}{dt} + y_2(t) = \left( \sum_{k=0}^N A_k \cos(k\omega t + \varphi_k) \right)^3.$$

Раскрыв куб в правой части согласно (4.21), получим:

$$T \frac{dy_2(t)}{dt} + y_2(t) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^N \sum_{s=0}^N A_k A_m A_s \begin{bmatrix} \cos((a+b+c)\omega t + \varphi_a + \varphi_b + \varphi_c) + \\ + \cos((a+b-c)\omega t + \varphi_a + \varphi_b - \varphi_c) + \\ + \cos((a-b+c)\omega t + \varphi_a - \varphi_b + \varphi_c) + \\ + \cos((-a+b+c)\omega t - \varphi_a + \varphi_b + \varphi_c) \end{bmatrix}. \quad (4.23)$$



Аналогично методике описанной в предыдущем параграфе, в установившемся режиме ( $t \rightarrow \infty$ ) и при нулевых начальных условиях  $y(0)=0$ , решение уравнения (4.23) может быть записано в следующем виде:

$$y_2(t) = \frac{1}{4} \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^N \sum_{s=0}^N (S_{31}(k, m, s) + S_{32}(k, m, s) + S_{33}(k, m, s) + S_{34}(k, m, s)),$$

где:

$$S_{31}(k, m, s) = \frac{A_k A_m A_s}{(k + m + s)^2 \omega^2 T^2 + 1} [(k + m + s) \omega T \sin((k + m + s) \omega t + \varphi_k + \varphi_m + \varphi_s) + \cos((k + m + s) \omega t + \varphi_k + \varphi_m + \varphi_s)],$$

$$S_{32}(k, m, s) = \frac{A_k A_m A_s}{(k - m + s)^2 \omega^2 T^2 + 1} [(k - m + s) \omega T \sin((k - m + s) \omega t + \varphi_k - \varphi_m + \varphi_s) + \cos((k - m + s) \omega t + \varphi_k - \varphi_m + \varphi_s)],$$

$$S_{33}(k, m, s) = \frac{A_k A_m A_s}{(k + m - s)^2 \omega^2 T^2 + 1} [(k + m - s) \omega T \sin((k + m - s) \omega t + \varphi_k + \varphi_m - \varphi_s) + \cos((k + m - s) \omega t + \varphi_k + \varphi_m - \varphi_s)],$$

$$S_{34}(k, m, s) = \frac{A_k A_m A_s}{(m + s - k)^2 \omega^2 T^2 + 1} [(m + s - k) \omega T \sin((m + s - k) \omega t - \varphi_k + \varphi_m + \varphi_s) + \cos((m + s - k) \omega t - \varphi_k + \varphi_m + \varphi_s)],$$

для  $k \in [0, 1 \dots, N]$ ,  $m \in [0, 1 \dots, N]$  и  $s \in [0, 1 \dots, N]$ .

Таким образом, можно записать выходной сигнал рассматриваемого нелинейного ИП:

$$y(t) = \sqrt[3]{\frac{1}{4} \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^N \sum_{s=0}^N (S_{31}(k, m, s) + S_{32}(k, m, s) + S_{33}(k, m, s) + S_{34}(k, m, s))}.$$

В соответствии со структурной схемой (рис. 4.3) динамическая погрешность будет иметь вид:

$$\Delta_{\text{дин}}(t) = \sum_{s=0}^N A_s \cos(s \omega t + \varphi_p) - \sqrt[3]{\frac{1}{4} \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^N \sum_{s=0}^N (S_{31}(k, m, s) + S_{32}(k, m, s) + S_{33}(k, m, s) + S_{34}(k, m, s))}.$$

**Обобщение модели динамической погрешности нелинейного измерительного преобразователя с характеристикой в виде степенной функции.** Анализируя результаты, полученные в предыдущих параграфах, нетрудно заме-

туть, что решение дифференциального уравнения (4.19) можно обобщить для любого целого положительного показателя степени  $g$  в (4.20).

Пусть анализируемый ИП представлен структурной схемой (рис. 4.3) и имеет следующие характеристики:

$$F_1(x(t)) = x^g(t), \quad F_2(y_2(t)) = \sqrt[g]{y_2(t)}, \quad W(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}.$$

Тогда инерционному звену указанного нелинейного преобразователя соответствует дифференциальное уравнение:

$$y_1(t) = T \frac{dy_2(t)}{dt} + y_2(t).$$

После подстановки выражения для входного сигнала в форме (4.17), дифференциальное уравнение примет вид:

$$T \frac{dy_2(t)}{dt} + y_2(t) = \left( \sum_{k=0}^N A_k \cos(k\omega t + \varphi_k) \right)^g.$$

Раскрывая степень в правой части согласно (4.21), получим:

$$\begin{aligned} T \frac{dy_2(t)}{dt} + y_2(t) = \\ = \frac{1}{2^{g-1}} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^n \dots \sum_{z=0}^n A_k A_m \dots A_z \left[ \begin{aligned} &\cos((k+m+\dots+z)\omega t + \varphi_k + \varphi_m + \dots + \varphi_z) + \\ &+ \cos((k-m+\dots+z)\omega t + \varphi_k - \varphi_m + \dots + \varphi_z) + \dots + \\ &+ \cos((k+m+\dots-z)\omega t + \varphi_k + \varphi_m + \dots - \varphi_z) \end{aligned} \right]. \end{aligned} \quad (4.24)$$

В установившемся режиме ( $t \rightarrow \infty$ ), при нулевых начальных условиях  $y(0)=0$ , согласно методике описанной в предыдущих параграфах, решение уравнения (4.24) может быть записано в следующем виде:

$$y_2(t) = \frac{1}{2^{g-1}} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^n \dots \sum_{z=0}^n (S_1(k, m, \dots, z) + S_2(k, m, \dots, z) + \dots + S_h(k, m, \dots, z)),$$

где  $m = 1, 2, \dots, N$ ,  $k = 1, 2, \dots, N$ ,  $\dots$ ,  $z = 1, 2, \dots, N$ , число сумм равно  $g$  и:

$$\begin{aligned} S_1(k, m, \dots, z) = \frac{A_k A_m \dots A_z}{(k+m+\dots+z)^2 \omega^2 T^2 + 1} [ \cos((k+m+\dots+z)\omega t + \varphi_k + \varphi_m + \dots + \varphi_z) + \\ + (k+m+\dots+z)\omega T \sin((k+m+\dots+z)\omega t + \varphi_k + \varphi_m + \dots + \varphi_z) ], \end{aligned}$$

$$S_2(k, m, \dots, z) = \frac{A_k A_m \dots A_z}{(k - m + \dots + z)^2 \omega^2 T^2 + 1} [\cos((k - m + \dots + z)\omega t + \varphi_k - \varphi_m + \dots + \varphi_z) + \\ + (k - m + \dots + z)\omega T \sin((k - m + \dots + z)\omega t + \varphi_k - \varphi_m + \dots + \varphi_z)],$$

...

$$S_g(k, m, \dots, z) = \frac{A_k A_m \dots A_z}{(k - m - \dots - z)^2 \omega^2 T^2 + 1} [\cos((k - m - \dots - z)\omega t + \varphi_k - \varphi_m - \dots - \varphi_z) + \\ + (k - m - \dots - z)\omega T \sin((k - m - \dots - z)\omega t + \varphi_k - \varphi_m - \dots - \varphi_z)].$$

для  $k \in [0, 1, \dots, N]$ ,  $m \in [0, 1, \dots, N]$ , ...,  $z \in [0, 1, \dots, N]$ .

В соответствии со структурной схемой (рис. 4.3) абсолютная динамическая погрешность будет иметь вид:

$$\Delta_{дин}(t) = \sum_{s=0}^N A_s \cos(s\omega t + \varphi_p) - \\ - \sqrt[2^g]{\frac{1}{2^{g-1}} \sum_{k=0}^n \sum_{m=0}^n \dots \sum_{z=0}^n (S_1(k, m, \dots, z) + S_2(k, m, \dots, z) + \dots + S_h(k, m, \dots, z))}.$$

Аналогично вышеописанному можно получить решение уравнения (4.19) для других разновидностей динамических звеньев. Проиллюстрируем сказанное простым примером. Предположим, что исследуемый ИП представлен структурной схемой (рис. 4.3) и имеет следующие характеристики:

$$F_1(x(t)) = x^2(t), \quad F_2(y_2(t)) = \sqrt[3]{y_2(t)}, \quad W(j\omega) = \frac{1}{(j\omega T_1)^2 + j\omega T_2 + 1}.$$

Тогда инерционному звену указанного нелинейного преобразователя соответствует дифференциальное уравнение:

$$y_1(t) = T_1^2 \frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy_2(t)}{dt} + y_2(t).$$

Подставив в указанное уравнение выражение для входного сигнала, и выполнив необходимые преобразования согласно (4.21), получим:

$$T_1^2 \frac{d^2 y_2(t)}{dt^2} + T_2 \frac{dy_2(t)}{dt} + y_2(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^N A_k A_m [\cos(k\omega t + \varphi_k - m\omega t - \varphi_m) + \\ + \cos(k\omega t + \varphi_k + m\omega t + \varphi_m)].$$

Решением полученного уравнения, в установившемся режиме ( $t \rightarrow \infty$ ) и при нулевых начальных условиях  $y(0) = 0$ , является функция вида:

$$y_2(t) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^N (S_{21}(k, m) + S_{22}(k, m)),$$

где для  $k \in [0, 1, \dots, N]$  и  $m \in [0, 1, \dots, N]$ :

$$S_{21}(k, m) = \frac{A_k A_m}{\left(1 - (k + m)^2 \omega^2 T_1^2\right)^2 + (k + m)^2 \omega^2 T_2^2} [(k + m) \omega T_2 \sin((k + m) \omega t + \varphi_k + \varphi_m) + \\ + (1 - (k + m)^2 \omega^2 T_1^2) \cos((k + m) \omega t + \varphi_k + \varphi_m)], \\ S_{22}(k, m) = \frac{A_k A_m}{\left(1 - (k - m)^2 \omega^2 T_1^2\right)^2 + (k - m)^2 \omega^2 T_2^2} [(k - m) \omega T_2 \sin((k - m) \omega t + \varphi_k - \varphi_m) + \\ + (1 - (k - m)^2 \omega^2 T_1^2) \cos((k - m) \omega t + \varphi_k - \varphi_m)].$$

В соответствии со структурной схемой (рис. 4.3) абсолютная динамическая погрешность будет иметь вид:

$$\Delta_{дин}(t) = \sum_{s=0}^N A_s \cos(s \omega t + \varphi_p) - \sqrt{\frac{1}{2} \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^N (S_{21}(k, m) + S_{22}(k, m))}.$$

Аналогичным образом можно получить решения уравнения (4.19) для других разновидностей динамических звеньев и более высоких показателей степени  $g$ .

**Исследование зависимости динамической погрешности от показателя степени.** Исследуем, как изменяется величина динамической погрешности с ростом показателя степени  $g$ . Примем, что постоянная времени инерционного звена  $T = 0.05$ , а входной случайный процесс имеет нормальное распределение с математическим ожиданием  $\mu = 0.75$ , среднеквадратичным отклонением  $\sigma = 0.25$ , и спектральной плотностью, которая определяется выражением (2.10) при  $\alpha = 10$ .

Вычислим величину относительной динамической погрешности  $\delta_{дин}$  для нелинейного ИП с различными показателями степени. Помимо этого, определим величину относительной динамической погрешности соответствующего линейного ИП и вычислим процент увеличения погрешности нелинейных ИП по отношению к линейному  $\Theta$ , согласно выражения:

$$\Theta = \frac{\delta_{дин\,нел} - \delta_{дин\,лин}}{\delta_{дин\,лин}},$$

где  $\delta_{дин\,нел}$  – относительная динамическая погрешность нелинейного ИП,  $\delta_{дин\,лин}$  – относительная динамическая погрешность, соответственно, линейного.

После чего построим график процента увеличения погрешности нелинейных ИП по отношению к линейному. График полученной зависимости приведён на рис 4.4.

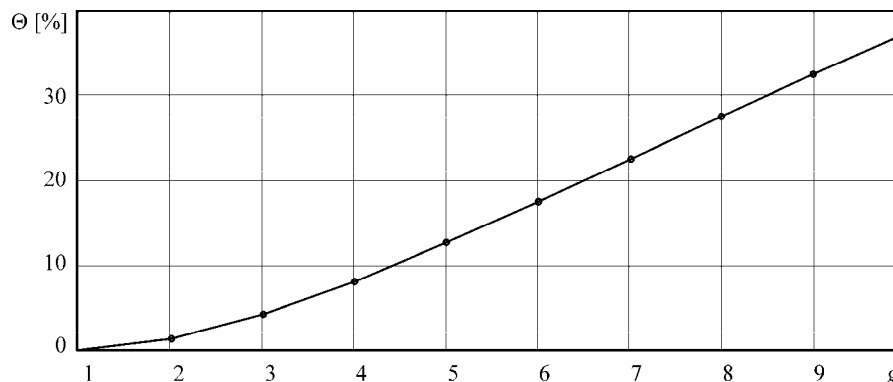


Рис. 4.4. График увеличения погрешности нелинейных ИП по отношению к линейному (выраженное в %) в зависимости от показателя степени  $g$

Из анализа приведенного графика, следует, что динамическая погрешность растёт с увеличением показателя степени  $g$ .

### 4.3.3 Модели динамической погрешности для измерительных преобразователей с другими видами нелинейностей

Для функций отличных от функции (4.20), например, для степенных функций с дробными или отрицательными показателями степеней, различных трансцендентных функций получить аналитическое решение уравнений (4.19) не представляется возможным. В этом случае указанные функции могут быть аппроксимированы степенным полиномом  $P(x)$ , и решение будет являться суммой решений найденных для каждого члена полинома.

К вышесказанному можно добавить, что достаточно часто на практике аналитическое выражение функциональной зависимости  $F_1(x(t))$  бывает неизвестно, т.е. функция  $F_1(x(t))$  может быть задана графиком или таблицей. В качестве примера можно назвать: зависимость термо-ЭДС от температуры для многих термоэлектрических преобразователей, зависимость удельной электрической проводимости водных растворов веществ от их концентрации в кондуктометрических приборах, и ряд других. В этом случае аппроксимация степенным поли-

номом  $P(x)$  делает возможным дальнейший анализ ИП с использованием предлагаемого метода.

Проиллюстрируем предлагаемую методику на примере анализа динамической погрешности нескольких преобразователей имеющих различные нелинейные характеристики отличные от (4.20).

**Модель динамической погрешности нелинейного измерительного преобразователя с характеристикой в виде экспоненциальной функции.** Исследуем нелинейный ИП имеющий следующие характеристики:

$$F_1(x(t)) = \exp(-Kx(t)), F_2(y_2(t)) = \ln(y_2(t)), W(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T},$$

где  $K$  – параметр нелинейного звена.

Разложим в ряд Тэйлора функцию  $F(x)$  в точке  $x_0 = \mu$  (центр рабочего диапазона СХ), ограничившись членом в третьей степени:

$$P(x) = F_1(\mu) + (x - \mu) \cdot \frac{\partial F_1(\mu)}{\partial x} + \frac{(x - \mu)^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 F_1(\mu)}{\partial x^2} + \frac{(x - \mu)^3}{6} \cdot \frac{\partial^3 F_1(\mu)}{\partial x^3}, \quad (4.25)$$

где  $\mu$  – математическое ожидание входного случайного процесса,  $P(x)$  – аппроксимирующий полином для  $F_1(x(t))$ .

Выражение (4.25) можно преобразовать к более удобному виду:

$$\begin{aligned} P(x) = & \left( F_1(\mu) - \mu \frac{\partial F_1(\mu)}{\partial x} + \frac{\mu^2}{2} \frac{\partial^2 F_1(\mu)}{\partial x^2} + \frac{\mu^3}{6} \frac{\partial^3 F_1(\mu)}{\partial x^3} \right) + \\ & + \left( \frac{\partial F_1(\mu)}{\partial t} - \mu \frac{\partial^2 F_1(\mu)}{\partial x^2} + \frac{\mu^2}{2} \frac{\partial^3 F_1(\mu)}{\partial x^3} \right) x + \\ & + \left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F_1(\mu)}{\partial t^2} + \frac{\mu}{2} \frac{\partial^3 F_1(\mu)}{\partial t^3} \right) x^2 + \frac{1}{6} \frac{\partial^3 F_1(\mu)}{\partial t^3} x^3. \end{aligned} \quad (4.26)$$

Подставив в (4.26) выражения для производных и сделав необходимые преобразования, получим:

$$\begin{aligned} P(x) = \exp(-Kx) & \left[ \left( 1 + K\mu + \frac{K^2\mu^2}{2} + \frac{K^3\mu^3}{6} \right) + \left( -1 - K\mu - \frac{K^2\mu^2}{2} \right) Kx + \right. \\ & \left. + \frac{1 + K\mu}{2} K^2 x^2 - \frac{1}{6} K^3 x^3 \right]. \end{aligned}$$

Таким образом, дифференциальное уравнение, описывающее преобразование входного сигнала в динамическом звене рассматриваемого ИП, примет вид:

$$\exp(-Kx(t)) \left[ \left( 1 + K\mu + \frac{K^2\mu^2}{2} + \frac{K^3\mu^3}{6} \right) + \left( -1 - K\mu - \frac{K^2\mu^2}{2} \right) Kx(t) + \right. \\ \left. + \frac{1 + K\mu}{2} K^2 x^2(t) - \frac{1}{6} K^3 x^3(t) \right] = T \frac{\partial y_2(t)}{\partial t} + y_2(t). \quad (4.27)$$

Разрешая уравнение (4.27), при нулевых начальных условиях, относительно каждого слагаемого левой части и суммируя полученные решения можно записать общий вид выходного сигнала  $y_2(t)$  инерционного звена, в установившемся режиме:

$$y_2(t) = \exp(-Kx(t)) \left[ \left( 1 + K\mu + \frac{K^2\mu^2}{2} + \frac{K^3\mu^3}{6} \right) + \right. \\ \left. + \left( -1 - K\mu - \frac{K^2\mu^2}{2} \right) K \sum_{m=0}^n S_1(m) + \right. \\ \left. + \frac{1 + K\mu}{4} K^2 \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^N (S_{21}(k, m) + S_{22}(k, m)) - \right. \\ \left. - \frac{K^3}{24} \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^N \sum_{s=0}^N (S_{31}(k, m, s) + S_{32}(k, m, s) + S_{33}(k, m, s) + S_{34}(k, m, s)) \right].$$

В результате, согласно заданной функцией нелинейности и структурной схеме на рис. 4.3, выражение абсолютной динамической погрешности  $\Delta_{дин}$  исследуемого преобразователя примет вид:

$$\Delta_{дин}(t) = \sum_{k=0}^n A_k \cos(k\omega t + \varphi_k) - \ln \left( \exp(-Kx(t)) \left[ \left( 1 + K\mu + \frac{K^2\mu^2}{2} + \frac{K^3\mu^3}{6} \right) + \right. \right. \\ \left. + \left( -1 - K\mu - \frac{K^2\mu^2}{2} \right) \left( \sum_{m=0}^n S_1(m) \right) + \right. \\ \left. + \frac{(1 + K\mu) K^2}{4} \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^N (S_{21}(k, m) + S_{22}(k, m)) - \right. \\ \left. - \frac{K^3}{24} \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^N \sum_{s=0}^N (S_{31}(k, m, s) + S_{32}(k, m, s) + S_{33}(k, m, s) + S_{34}(k, m, s)) \right] \right).$$

Исследуем зависимость величины динамической погрешности от параметра нелинейного звена  $K$ . С этой целью вычислим величину относительной динамической погрешности, для значений  $K = 0.01, 0.02, \dots, 1$ .

В качестве входного сигнала будем использовать нормальный случайный процесс с функцией спектральной плотности вида (2.10) и следующими параметрами  $\mu = 25$ ,  $\sigma = 5$ ,  $\alpha = 10$ . При этом примем  $T = 0.05$ .

Вычислим также величину погрешности соответствующего линейного ИП и построим график процента увеличения погрешности нелинейного ИП по отношению к линейному в соответствии с выражением:

$$\Theta = \frac{\delta_{\text{дин нел}} - \delta_{\text{дин лин}}}{\delta_{\text{дин лин}}}$$

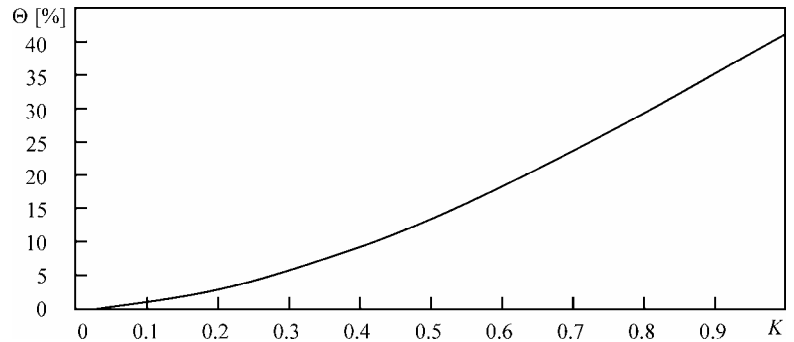


Рис. 4.5. График увеличения погрешности нелинейных ИП по отношению к линейному (выраженное в %) в зависимости от параметра  $K$

в зависимости от величины  $K$  (рис. 4.5).

Из анализа приведенного графика следует, что динамическая погрешность растёт с увеличением параметра  $K$ .

**Модель динамической погрешности нелинейного измерительного преобразователя с характеристикой в виде квадратного корня.** Исследуем нелинейный ИП имеющий степенную нелинейную характеристику с дробным показателем степени  $g = 0.5$ . Будем считать, что в этом случае рассматриваемый преобразователь имеет следующие характеристики:

$$F_1(x(t)) = \sqrt{x(t)}, \quad F_2(y_2(t)) = (y_2(t))^2, \quad W(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}.$$

Разложив в ряд Тейлора функцию  $F(x)$  в точке  $x_0 = \mu$ , до члена в третьей степени и выполнив необходимые преобразования получим:

$$P(x) = \frac{5}{16}\sqrt{\mu} + \frac{15}{16\sqrt{\mu}}x - \frac{5}{16\mu\sqrt{\mu}}x^2 + \frac{1}{16\mu^2\sqrt{\mu}}x^3$$

Таким образом, дифференциальное уравнение, описывающее преобразование входного сигнала в динамическом звене рассматриваемого ИП, примет вид:



$$\frac{5}{16}\sqrt{\mu} + \frac{15}{16\sqrt{\mu}}x - \frac{5}{16\mu\sqrt{\mu}}x^2(t) + \frac{1}{16\mu^2\sqrt{\mu}}x^3(t) = T \frac{\partial y_2(t)}{\partial t} + y_2(t) \quad (4.28)$$

Разрешая уравнение (4.28), при нулевых начальных условиях, относительно каждого слагаемого левой части и суммируя полученные решения можно записать общий вид выходного сигнала  $y_2(t)$  инерционного звена, в установившемся режиме:

$$y_2(t) = \frac{5}{16}\sqrt{\mu} + \frac{15}{16\sqrt{\mu}} \sum_{m=0}^n S_1(m) - \frac{5}{32\mu\sqrt{\mu}} \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^N (S_{21}(k, m) + S_{22}(k, m)) + \\ + \frac{1}{64\mu^2\sqrt{\mu}} \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^N \sum_{s=0}^N (S_{31}(k, m, s) + S_{32}(k, m, s) + S_{33}(k, m, s) + S_{34}(k, m, s)).$$

В соответствии с заданной функцией линеаризатора и структурной схемой на рис. 4.3, можно записать выражение абсолютной динамической погрешности  $\Delta_{дин}$  исследуемого преобразователя:

$$\Delta_{дин}(t) = \sum_{k=0}^n A_k \cos(k\omega t + \varphi_k) - \frac{5}{16}\sqrt{\mu} + \frac{15}{16\sqrt{\mu}} \sum_{m=0}^n S_1(m) + \\ + \frac{5}{32\mu\sqrt{\mu}} \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^N (S_{21}(k, m) + S_{22}(k, m)) - \\ - \frac{1}{64\mu^2\sqrt{\mu}} \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^N \sum_{s=0}^N (S_{31}(k, m, s) + S_{32}(k, m, s) + S_{33}(k, m, s) + S_{34}(k, m, s)). \quad (4.29)$$

Как показали проведенные исследования - величина погрешности, рассчитанная согласно (4.29) не превышает более чем на 2–3% величину динамической погрешности соответствующего линейного ИП. Таким образом, в большинстве практических случаев указанным увеличением можно пренебречь.

**Модель динамической погрешности нелинейного измерительного преобразователя с характеристикой в виде обратной степенной функции.** Исследуем нелинейный ИП имеющий степенную нелинейную характеристику с отрицательным показателем степени  $g = -1$ . Примем, что в этом случае рассматриваемый преобразователь имеет следующие характеристики:

$$F_1(x(t)) = \frac{1}{x(t)}, \quad F_2(y_2(t)) = \frac{1}{y_2(t)}, \quad W(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}.$$

Разложив в ряд Тэйлора функцию  $F(x)$  в точке  $x_0 = \mu$ , до члена в третьей степени, в соответствии с (4.26), подставив выражения для производных и выполнив необходимые получим:

$$P(x) = \frac{4}{\mu} - \frac{6}{\mu^2}x + \frac{4}{\mu^3}x^2 - \frac{1}{\mu^4}x^3.$$

Таким образом, дифференциальное уравнение, описывающее преобразование входного сигнала в динамическом звене рассматриваемого ИП, примет вид:

$$\frac{4}{\mu} - \frac{6}{\mu^2}x(t) + \frac{4}{\mu^3}x^2(t) - \frac{1}{\mu^4}x^3(t) = T \frac{\partial y_2(t)}{\partial t} + y_2(t).$$

Разрешая полученное уравнение, при нулевых начальных условиях, относительно каждого слагаемого левой части и суммируя полученные решения можно записать общий вид выходного сигнала  $y_2(t)$  инерционного звена, в установившемся режиме:

$$y_2(t) = \frac{4}{\mu} - \frac{6}{\mu^2} \sum_{m=0}^n S_1(m) + \frac{2}{\mu^3} \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^N (S_{21}(k, m) + S_{22}(k, m)) - \\ - \frac{3}{2\mu^4} \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^N \sum_{s=0}^N (S_{31}(k, m, s) + S_{32}(k, m, s) + S_{33}(k, m, s) + S_{34}(k, m, s)).$$

В соответствии с заданной функцией нелинейности, можно записать выражение абсолютной динамической погрешности  $\Delta_{дин}$  исследуемого преобразователя:

$$\Delta_{дин}(t) = \sum_{k=0}^n A_k \cos(k\omega t + \varphi_k) - \frac{4}{\mu} + \frac{6}{\mu^2} \sum_{m=0}^n S_1(m) - \\ - \frac{2}{\mu^3} \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^N (S_{21}(k, m) + S_{22}(k, m)) + \\ + \frac{3}{2\mu^4} \sum_{k=0}^N \sum_{m=0}^N \sum_{s=0}^N (S_{31}(k, m, s) + S_{32}(k, m, s) + S_{33}(k, m, s) + S_{34}(k, m, s)).$$

Вычислим величину относительной динамической погрешности, для значения  $T = 0.05$ . Вычислим также величину погрешности соответствующего линейного ИП и определим процент увеличения погрешности нелинейного ИП по отношению к линейному. В качестве входного сигнала будем использовать нормальный случайный процесс с функцией спектральной плотности вида (2.10) и следующими параметрами  $\mu = 10$ ,  $\sigma = 5$ ,  $\alpha = 10$ .

Для нелинейного ИП полученная величина составляет  $\delta_{дин} = 0.382$ , для соответствующего линейного –  $\delta_{дин} = 0.286$  что соответствует 33.5%.

## ГЛАВА 5

### МОДЕЛЬ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ ПОГРЕШНОСТИ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ КАНАЛОВ

Появление дополнительных погрешностей обусловлено воздействием на ИП совокупности неконтролируемых факторов, например, температуры окружающей среды, влажности атмосферного воздуха, изменения параметров питающей сети и др..

Существующие в настоящее время методики расчета дополнительных погрешностей позволяют производить вычисления только для случая, когда измерения осуществляются в установившемся режиме, тогда внесение поправок на результат измерений не представляет трудности.

В общем случае выходной сигнал измерительного канала  $y(t)$  есть некоторый функционал от измерительного сигнала и влияющей величины (или величин) т.е.  $y(t) = \mathbb{F}\{x(t), \varepsilon(t)\}$ , но при нормировании дополнительной погрешности её обычно сводят к одному из следующих видов:

- мультипликативная погрешность;
- аддитивная погрешность;
- аддитивно-мультипликативная погрешность (при нескольких влияющих величинах).

В зависимости от количества влияющих величин и их взаимной зависимости, а так же зависимости между ними и измеряемой величиной могут быть выделены следующие модели погрешности измерительного канала [38]:

- скалярная модель с независимыми сигналами (одна влияющая величина  $\varepsilon(t)$ ,  $\rho_{x\varepsilon} = 0$  - коэффициент корреляции между влияющей и измеряемой величинами,  $x_h(t) = 0$ ,  $\varepsilon_h(t) = 0$ );
- скалярная модель с зависимыми сигналами (одна влияющая величина  $\varepsilon(t)$ ,  $\rho_{x\varepsilon} \neq 0$ ,  $x_h(t) = 0$ ,  $\varepsilon_h(t) = 0$ );
- скалярная модель с учетом гармонических составляющих (одна влияющая величина  $\varepsilon(t)$ ,  $\rho_{x\varepsilon} \neq 0$ ,  $x_h(t) \neq 0$ ,  $\varepsilon_h(t) \neq 0$ );
- векторная модель с независимыми составляющими (вектор влияющих величин  $[\varepsilon] = [\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t), \varepsilon_1(t), \dots, \varepsilon_n(t)]$ , матрица корреляции вектора  $[\varepsilon]$  единичная);

– векторная модель с зависимыми составляющими (вектор влияющих величин  $[\varepsilon] = [\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t), \varepsilon_1(t), \dots, \varepsilon_n(t)]$ , матрица корреляции вектора  $[\varepsilon]$  не единичная).

Кроме того, различают случаи наличия инерционности в каналах измерения и в каналах влияния.

Суммарная погрешность измерительного преобразователя, при статистической независимости между составляющими, может быть определена по формуле:

$$\Delta_{\Sigma} = \sqrt{\Delta_{осн}^2 + \Delta_{дин}^2 + \sum_{i=1}^n \Delta_{doni}^2}, \quad (5.1)$$

где  $\Delta_{осн}$  – основная погрешность средства измерений;  $\Delta_{дин}$  – динамическая погрешность;  $\Delta_{don}$  – дополнительная погрешность;  $n$  – число влияющих величин.

Выражение (5.1) также может быть представлено в следующем виде:

$$\Delta_{\Sigma} = \sqrt{\Delta_{осн}^2 + \Delta_{дин}^2 + \sum_{i=1}^n \mathbb{F}_i^2(\varepsilon_i - \mu_{0i})}, \quad (5.2)$$

где  $\mathbb{F}(\varepsilon_i)$  – функция влияния, или коэффициент влияния, когда она линейна, или функция совместного влияния нескольких влияющих величин  $\mathbb{F}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$ ;  $\varepsilon_i$  –  $i$ -тая влияющая величина;  $\mu_{0i}$  – значение влияющей величины принятое при градуировке ИП;  $i = 1, 2 \dots n$ ;  $j = 1, 2 \dots n$ , при  $i \neq j$ .

Так как в технологических измерениях часто интерес представляет не мгновенное, а среднее значение измеряемого параметра, то, следовательно, и оценку дополнительной погрешности необходимо проводить в «среднем» за период времени.

### 5.1 Мультипликативная скалярная модель с независимыми сигналами

Структурная схема, иллюстрирующая процесс образования мультипликативной дополнительной погрешности, имеет вид (рис. 5.1), где в качестве упрощения функция влияния обозначена через коэффициент влияния  $a$ .

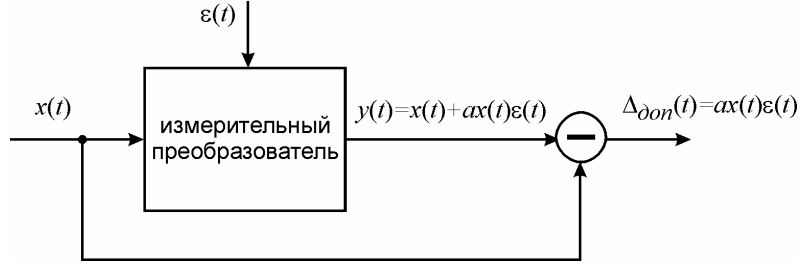


Рис. 5.1 Структурная схема мультипликативной скалярной модели

**Скалярная модель с независимыми сигналами** (одна влияющая величина  $\varepsilon(t)$ ,  $\rho_{x\varepsilon} = 0$ ,  $x_h(t) = 0$ ,  $\varepsilon_h(t) = 0$ ). Дополнительная погрешность может быть определена из разности (рис. 5.1) сигнала с выхода преобразователя и входного сигнала:

$$\Delta_{\text{дон}}(t) = (y(t) - x(t)) = ax(t)\varepsilon(t).$$

Так как в выражении суммарной погрешности (5.1) дополнительная погрешность входит в виде квадрата своего значения, то более удобно определять сразу ее квадрат, поэтому:

$$\Delta_{\text{дон}}^2(t) = a^2 x^2(t) \varepsilon^2(t).$$

Тогда, с учетом (2.8) и (2.9) без учета гармонических составляющих  $x_h(t)$  и  $\varepsilon_h(t)$  запишем:

$$\Delta_{\text{дон}}^2(t) = a^2 \left[ \mu_x + \overset{\circ}{x}(t) \right]^2 \left[ \mu_\varepsilon + \overset{\circ}{\varepsilon}(t) \right]^2. \quad (5.3)$$

Здесь и в дальнейшем под обозначением  $\mu_\varepsilon$  будем понимать смещение математического ожидания влияющей величины относительно значения  $\mu_0$ , которое принято при градуировке измерительного преобразователя.

Раскроем скобки и применим операцию математического ожидания к полученному выражению:

$$M \{ \Delta_{\text{дон}}^2(t) \} = M \left\{ a^2 \left[ \begin{aligned} &\mu_x^2 \mu_\varepsilon^2 + \overset{\circ}{x}^2(t) \overset{\circ}{\varepsilon}^2(t) + \mu_x^2 \overset{\circ}{\varepsilon}^2(t) + \mu_\varepsilon^2 \overset{\circ}{x}^2(t) + \\ &+ 2\mu_x \mu_\varepsilon^2 \overset{\circ}{x}(t) + 2\mu_\varepsilon \mu_x^2 \overset{\circ}{\varepsilon}(t) + 2\mu_x \overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{\varepsilon}^2(t) + \\ &+ 2\mu_\varepsilon \overset{\circ}{\varepsilon}(t) \overset{\circ}{x}^2(t) + 4\mu_x \mu_\varepsilon \overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{\varepsilon}(t) \end{aligned} \right] \right\}. \quad (5.4)$$

Последние пять членов выражения (5.4) обращаются в нуль (для центрированных и статистически независимых случайных величин моменты нечетных порядков равны нулю).

Математическое ожидание произведения постоянных величин равно произведению этих величин, т.е.  $M\{x^2(t)\varepsilon^2(t)\} = \mu_x^2 \mu_\varepsilon^2$ .

Для нахождения МО составляющей  $\overset{\circ}{x}(t)\overset{\circ}{\varepsilon}(t)$  воспользуемся известным свойством МО:

$$M\{x^2 y^2\} = M\{x^2\} M\{y^2\}; \quad M\{x^2\} = D\{x\} + \mu_x^2; \quad M\{y^2\} = D\{y\} + \mu_y^2,$$

где  $x$  и  $y$  – независимые случайные величины,  $\mu_x = M\{x\}$  и  $\mu_y = M\{y\}$  – математическое ожидание случайных величин,  $D\{\cdot\}$  – дисперсия.

Тогда, математическое ожидание произведения квадратов центрированных случайных величин:

$$M\{\overset{\circ}{x}^2(t)\overset{\circ}{\varepsilon}^2(t)\} = \sigma_x^2 \sigma_\varepsilon^2.$$

Математическое ожидание составляющих  $\mu_x^2 \overset{\circ}{\varepsilon}^2(t)$  и  $\mu_\varepsilon^2 \overset{\circ}{x}^2(t)$  находятся по аналогии с предыдущей составляющей, т.е.:

$$M\{\mu_x^2 \overset{\circ}{\varepsilon}^2(t)\} = \mu_x^2 \sigma_\varepsilon^2, \quad M\{\mu_\varepsilon^2 \overset{\circ}{x}^2(t)\} = \mu_\varepsilon^2 \sigma_x^2.$$

Окончательное выражение для МО квадрата мультипликативной дополнительной погрешности, при статистически независимых сигналах входного воздействия и влияющей величины, запишется в виде:

$$M\{\Delta_{don}^2(t)\} = a^2 [\mu_x^2 \mu_\varepsilon^2 + \sigma_x^2 \sigma_\varepsilon^2 + \mu_x^2 \sigma_\varepsilon^2 + \mu_\varepsilon^2 \sigma_x^2]. \quad (5.5)$$

**Скалярная модель с учетом гармонических составляющих** (одна влияющая величина  $\varepsilon(t)$ ,  $\rho_{x\varepsilon} = 0$ ,  $x_h(t) \neq 0$ ,  $\varepsilon_h(t) \neq 0$ ). В том случае, когда в измеряемом сигнале и в сигнале влияющей величины присутствуют гармонические составляющие, соответственно  $x_h(t)$  и  $\varepsilon_h(t)$ , выражение (5.4), за вычетом тех составляющих МО, которых равно нулю (т.к. не учитывается статистическая зависимость не только самих сигналов, но и гармонических составляющих) примет вид :

$$M \left\{ \Delta_{don}^2(t) \right\} = a^2 M \left\{ \begin{aligned} &\mu_x^2 \mu_\varepsilon^2 + \overset{\circ}{x}^2(t) \overset{\circ}{\varepsilon}^2(t) + \mu_x^2 \overset{\circ}{\varepsilon}^2(t) + \mu_\varepsilon^2 \overset{\circ}{x}^2(t) + \mu_x^2 \varepsilon_h^2(t) + \\ &+ \mu_\varepsilon^2 x_h^2(t) + \overset{\circ}{x}^2(t) \varepsilon_h^2(t) + x_h^2(t) \overset{\circ}{\varepsilon}^2(t) + x_h^2(t) \varepsilon_h^2(t) \end{aligned} \right\}, \quad (5.6)$$

где  $x_h(t) = C_x \sin(\omega_x t)$ ,  $\varepsilon_h(t) = C_\varepsilon \sin(\omega_\varepsilon t)$ .

Для определения МО последней составляющей  $x_h^2(t) \varepsilon_h^2(t)$  воспользуемся тем фактом, что оба сомножителя являются детерминированными функциями времени, поэтому:

$$M \left\{ x_h^2(t) \varepsilon_h^2(t) \right\} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{C_x^2 C_\varepsilon^2}{T} \int_0^T \sin^2(\omega_x t) \sin^2(\omega_\varepsilon t) dt = \frac{C_x^2 C_\varepsilon^2}{4}. \quad (5.7)$$

Следует отметить, что полученное соотношение справедливо при условии, что  $\omega_x \neq \omega_\varepsilon$ . В том случае, если  $\omega_x = \omega_\varepsilon$  и разность фаз равна нулю, расчеты по приведенной выше формуле дают следующий результат:

$$M \left\{ x_h^2(t) \varepsilon_h^2(t) \right\} = \frac{3}{8} C_x^2 C_\varepsilon^2,$$

и когда разность фаз  $\varphi$  не равна нулю:

$$M \left\{ x_h^2(t) \varepsilon_h^2(t) \right\} = \frac{1}{8} C_x^2 C_\varepsilon^2 \left[ 1 + 2 \cos^2(\varphi) \right]. \quad (5.8)$$

Для вычисления МО составляющих  $\mu_x^2 \varepsilon_h^2(t)$ ,  $\mu_\varepsilon^2 x_h^2(t)$ ,  $\overset{\circ}{x}^2(t) \varepsilon_h^2(t)$  и  $x_h^2(t) \overset{\circ}{\varepsilon}^2(t)$  примем, что гармонический сигнал с амплитудой  $C$  является частным случаем стационарного случайного процесса с нулевым математическим ожиданием и дисперсией:

$$D = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T C^2 \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{2} C^2.$$

Аналогично предыдущим расчетам приходим к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} M \left\{ \mu_x^2 \varepsilon_h^2(t) \right\} &= \frac{\mu_x^2 C_\varepsilon^2}{2}; \quad M \left\{ \mu_\varepsilon^2 x_h^2(t) \right\} = \frac{\mu_\varepsilon^2 C_x^2}{2}; \quad M \left\{ \overset{\circ}{x}^2(t) \varepsilon_h^2(t) \right\} = \frac{\sigma_x^2 C_\varepsilon^2}{2}; \\ M \left\{ x_h^2(t) \overset{\circ}{\varepsilon}^2(t) \right\} &= \frac{\sigma_\varepsilon^2 C_x^2}{2}. \end{aligned}$$

Тогда окончательное выражение для МО квадрата мультипликативной дополнительной погрешности, при статистически независимых сигналах входного воздействия и влияющей величины с учетом гармонических составляющих, запишется в виде:

$$M\{\Delta_{don}^2(t)\} = a^2 \left[ \begin{aligned} &\mu_x^2 \mu_\varepsilon^2 + \sigma_x^2 \sigma_\varepsilon^2 + \mu_x^2 \sigma_\varepsilon^2 + \mu_\varepsilon^2 \sigma_x^2 + \frac{3}{8} C_x^2 C_\varepsilon^2 \\ &+ \frac{\mu_x^2 C_\varepsilon^2}{2} + \frac{\mu_\varepsilon^2 C_x^2}{2} + \frac{\sigma_x^2 C_\varepsilon^2}{2} + \frac{\sigma_\varepsilon^2 C_x^2}{2} \end{aligned} \right]. \quad (5.9)$$

Для пятого члена  $\frac{3}{8} C_x^2 C_\varepsilon^2$  выбрано максимальное значение, соответствующее синфазному воздействию периодических составляющих полезного сигнала и влияющей величины. В случае несоблюдения этого условия этот член будет описываться выражением (5.7) или (5.8).

## 5.2 Мультипликативная скалярная модель с зависимыми сигналами

Учет статистической связи между сигналами входного воздействия и влияющей величины существенно усложняет расчеты, но повышает достоверность полученных результатов, особенно в тех случаях когда корреляция между сигналами достигает очень большой величины.

**Скалярная модель с зависимыми сигналами** (одна влияющая величина  $\varepsilon(t)$ ,  $\rho_{x\varepsilon} \neq 0$ ,  $x_h(t)=0$ ,  $\varepsilon_h(t)=0$ ). Определим квадрат дополнительной погрешности, используя модели сигналов вида (2.8) и (2.9) без учета гармонических составляющих  $x_h(t)$  и  $\varepsilon_h(t)$ . Выражение (5.4) может быть переписано без учета тех членов, МО которых равно нулю, но с учетом последнего члена:

$$M\{\Delta_{don}^2(t)\} = a^2 M \left\{ \begin{aligned} &\mu_x^2 \mu_\varepsilon^2 + \overset{\circ}{x}^2(t) \overset{\circ}{\varepsilon}^2(t) + \mu_x^2 \overset{\circ}{\varepsilon}^2(t) + \\ &\mu_\varepsilon^2 \overset{\circ}{x}^2(t) + 4\mu_x \mu_\varepsilon \overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{\varepsilon}(t) \end{aligned} \right\}. \quad (5.10)$$

Для нахождения математического ожидания слагаемого  $4\mu_x \mu_\varepsilon \overset{\circ}{x} \overset{\circ}{\varepsilon}$  воспользуемся известным свойством математического ожидания: МО произведение двух коррелированных величин  $\xi_1$  и  $\xi_2$  определяется соотношением:

$$M\{\xi_1 \xi_2\} = \mu_{\xi_1} \mu_{\xi_2} + \sigma_{\xi_1} \sigma_{\xi_2} \rho_{\xi_1 \xi_2},$$



где  $\rho_{\xi_1 \xi_2}$  – коэффициент взаимной корреляции сомножителей  $\xi_1$  и  $\xi_2$ . На основании этого запишем:

$$M \left\{ 4\mu_x \mu_\varepsilon \overset{\circ}{x} \overset{\circ}{\varepsilon} \right\} = 4\mu_x \mu_\varepsilon \sigma_x \sigma_\varepsilon \rho_{x\varepsilon}.$$

Решение задачи отыскания МО произведения  $\overset{\circ}{x}^2(t) \overset{\circ}{\varepsilon}^2(t)$  можно произвести «традиционным» путем, через нахождение плотности распределения произведения  $z_1 = \overset{\circ}{x} \overset{\circ}{\varepsilon}$ , с последующим нахождением МО квадрата величины:

$$M \{ z_1^2 \} = \int_{-\infty}^{\infty} z_1^2 p(z_1) dz_1,$$

где  $p(z_1)$  – плотность распределения вероятностей произведения случайных величин.

Второй способ предполагает нахождение МО квадрата произведения с использованием характеристических функций [55].

Однако, в данном случае, более продуктивным и наглядным является путь прямого нахождения моментов функций случайных величин, используя выражение для двумерной плотности распределения вероятности.

Двумерная плотность распределения двух гауссовских процессов коррелированных между собой выражается как:

$$p(x, \varepsilon) = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_\varepsilon\sqrt{1-\rho_{x\varepsilon}^2}} \exp \left[ -\frac{\sigma_\varepsilon^2 \overset{\circ}{x}^2 - 2\rho_{x\varepsilon}\sigma_x\sigma_\varepsilon \overset{\circ}{x} \overset{\circ}{\varepsilon} + \sigma_x^2 \overset{\circ}{\varepsilon}^2}{2\sigma_\varepsilon^2\sigma_x^2(1-\rho_{x\varepsilon}^2)} \right].$$

Выражение для МО функции двух случайных величин может быть представлено в следующем виде:

$$M \{ \varphi(x, \varepsilon) \} = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x, \varepsilon) p(x, \varepsilon) dx d\varepsilon,$$

где  $\varphi(x, \varepsilon)$  – функция случайных величин,  $p(x, \varepsilon)$  – двумерная плотность распределения.

Для данного случая можно записать:

$$M\left\{\overset{\circ}{x}^2\overset{\circ}{\varepsilon}^2\right\} = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_\varepsilon\sqrt{1-\rho_{x\varepsilon}^2}} \times \\ \times \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \overset{\circ}{x}^2\overset{\circ}{\varepsilon}^2 \exp\left[-\frac{\sigma_\varepsilon^2\overset{\circ}{x}^2 - 2\rho_{x\varepsilon}\sigma_x\sigma_\varepsilon\overset{\circ}{x}\overset{\circ}{\varepsilon} + \sigma_x^2\overset{\circ}{\varepsilon}^2}{2\sigma_\varepsilon^2\sigma_x^2(1-\rho_{x\varepsilon}^2)}\right] dx d\varepsilon.$$

Выполнив подстановку  $u = \overset{\circ}{x}/\sigma_x$ ,  $v = \overset{\circ}{\varepsilon}/\sigma_\varepsilon$  получим:

$$M\left\{\overset{\circ}{x}^2\overset{\circ}{\varepsilon}^2\right\} = \frac{\sigma_x^2\sigma_\varepsilon^2}{2\pi\sqrt{1-\rho_{x\varepsilon}^2}} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u^2 v^2 \exp\left[-\frac{u^2 - 2\rho_{x\varepsilon}uv + v^2}{2(1-\rho_{x\varepsilon}^2)}\right] dudv. \quad (5.11)$$

Интегрируя по переменной  $u$ , приходим к выражению вида:  $J = \int_{-\infty}^{\infty} J_1(v)dv$ ,

где через  $J_1$  обозначим выражение (5.11) без учета постоянного сомножителя перед интегралом:

$$J_1 = v^2 \exp\left(-\frac{v^2}{2(1-\rho_{x\varepsilon}^2)}\right) \int_{-\infty}^{\infty} u^2 \exp\left[-\frac{u^2}{2(1-\rho_{x\varepsilon}^2)} + \frac{\rho_{x\varepsilon}uv}{1-\rho_{x\varepsilon}^2}\right] du = \\ = v^2 \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) \sqrt{2\pi(1-\rho_{x\varepsilon}^2)} (1-\rho_{x\varepsilon}^2 + \rho_{x\varepsilon}^2 v^2).$$

Оставшийся интеграл по переменной  $v$  состоит из двух слагаемых:

$$J_1 = \sqrt{2\pi(1-\rho_{x\varepsilon}^2)}^3 \int_{-\infty}^{\infty} v^2 \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) dv + \rho_{x\varepsilon}^2 \sqrt{2\pi(1-\rho_{x\varepsilon}^2)} \int_{-\infty}^{\infty} v^4 \exp\left(-\frac{v^2}{2}\right) dv.$$

Обозначим через  $J_2$  первое слагаемое, а через  $J_3$  второе слагаемое полученного выражения, тогда результаты интегрирования, используя [56] запишутся в виде:

$$J_2 = 2\pi\sqrt{(1-\rho_{x\varepsilon}^2)}^3, \quad J_3 = 6\pi\rho_{x\varepsilon}^2\sqrt{(1-\rho_{x\varepsilon}^2)}.$$

Далее:

$$J_1 = J_2 + J_3 = 2\pi\sqrt{1-\rho_{x\varepsilon}^2}(2\rho_{x\varepsilon}^2 + 1).$$

Окончательное решение, с учетом постоянного множителя перед интегралом из (5.11), запишется в виде:

$$M\left\{x^2\varepsilon^2\right\} = \sigma_x^2\sigma_\varepsilon^2(1+2\rho_{x\varepsilon}^2).$$

Тогда окончательное выражение для МО квадрата мультипликативной дополнительной погрешности при статистически зависимых сигналах входного воздействия и влияющей величины без учета гармонических составляющих, будет иметь вид [40]:

$$M\left\{\Delta_{don}^2(t)\right\} = a^2\left[\mu_x^2\mu_\varepsilon^2 + \sigma_x^2\sigma_\varepsilon^2(1+2\rho_{x\varepsilon}^2) + \mu_x^2\sigma_\varepsilon^2 + \mu_\varepsilon^2\sigma_x^2 + 4\mu_x\mu_\varepsilon\sigma_x\sigma_\varepsilon\rho_{x\varepsilon}\right]. \quad (5.12)$$

С целью упрощения выражения разделим левую и правую часть выражения (5.12) на  $\mu_x^2\mu_\varepsilon^2a^2$  и обозначим  $V_x = \frac{\sigma_x}{\mu_x}$  и  $V_\varepsilon = \frac{\sigma_\varepsilon}{\mu_\varepsilon}$ , где  $V_x$  и  $V_\varepsilon$  – коэффициенты вариации процессов  $x(t)$  и  $\varepsilon(t)$ . Тогда:

$$F(V_x, V_\varepsilon, \rho) = \frac{M\left\{\Delta_{don}^2(t)\right\}}{\mu_x^2\mu_\varepsilon^2 \cdot a^2} = 1 + V_x^2 + V_\varepsilon^2 + V_x^2V_\varepsilon^2(1+2\rho_{x\varepsilon}^2) + 4V_xV_\varepsilon\rho_{x\varepsilon}. \quad (5.13)$$

Для иллюстрации характера полученной зависимости построим графики приведенной функции дополнительной погрешности (5.13), для случаев  $0,2 \leq V_x \leq 1$ ,  $0 \leq \rho_{x\varepsilon} \leq 1$ , при  $V_\varepsilon = 0,1$  (рис. 5.2),  $V_\varepsilon = 0,5$  (рис. 5.3),  $V_\varepsilon = 1$  (рис. 5.4).

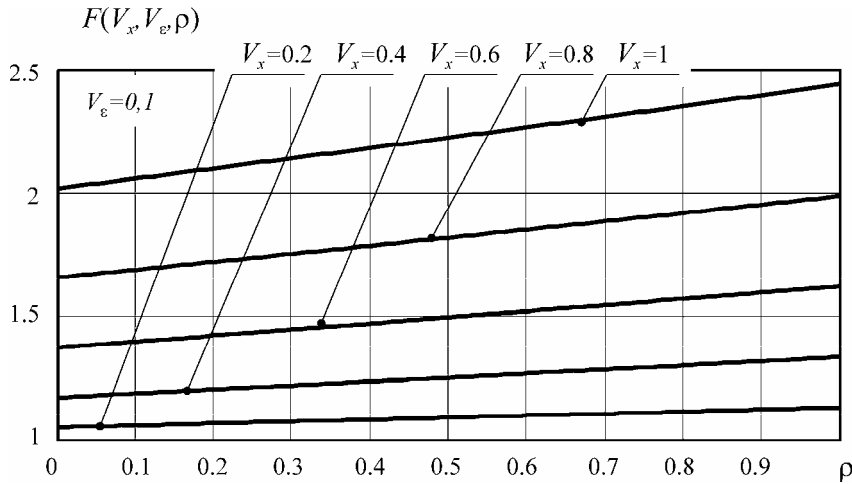


Рис. 5.2. Зависимость приведенной функции дополнительной погрешности от коэффициента корреляции при  $V_\varepsilon = 0,1$

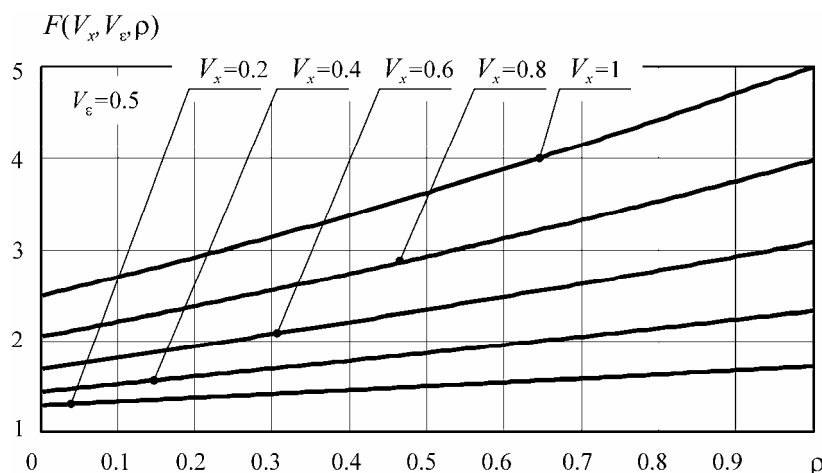


Рис. 5.3. Зависимость приведенной функции дополнительной погрешности от коэффициента корреляции при  $V_\varepsilon = 0,5$

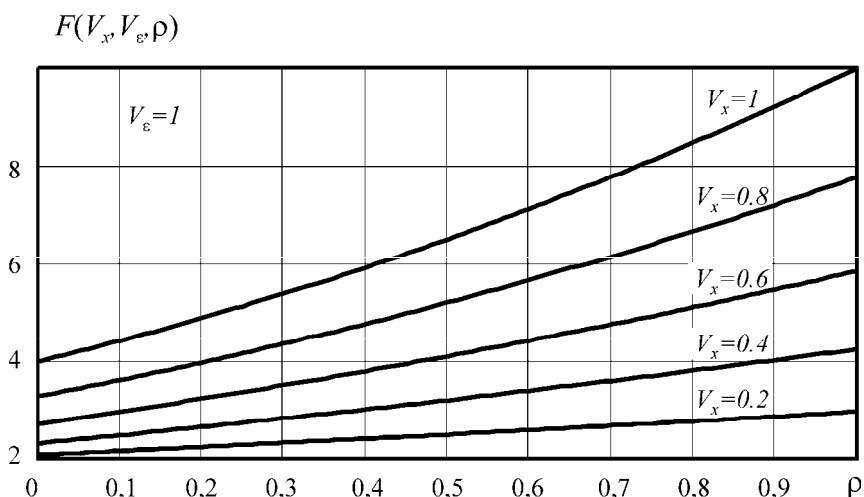


Рис. 5.4. Зависимость приведенной функции дополнительной погрешности от коэффициента корреляции при  $V_\varepsilon = 1$

Как видно из графиков приведенной функции дополнительной погрешности  $F(V_x, V_\varepsilon, \rho)$  (рис. 5.2 – 5.4), неучтенная корреляционная связь между измеряемым параметром и влияющей величиной может привести к занижению погрешности в  $2 \div 2.5$  раза.

**Скалярная модель с учетом гармонических составляющих** (одна влияющая величина  $\varepsilon(t)$ ,  $\rho_{x\varepsilon} \neq 0$ ,  $x_h(t) \neq 0$ ,  $\varepsilon_h(t) \neq 0$ ). Если в измеряемом сигнале, а также в сигнале влияющей величины присутствуют гармонические составляющие, то, как и в случае (5.6), выражение (5.10) усложнится и примет следующий вид:

$$M\{\Delta_{don}^2(t)\} = a^2 M \left\{ \begin{aligned} &\mu_x^2 \mu_\varepsilon^2 + \mu_x^2 \overset{\circ}{\varepsilon}^2(t) + \mu_\varepsilon^2 \overset{\circ}{x}^2(t) + \overset{\circ}{x}^2(t) \overset{\circ}{\varepsilon}^2(t) + 4\mu_x \mu_\varepsilon \overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{\varepsilon}(t) + \\ &+ \overset{\circ}{x}^2(t) \varepsilon_h^2(t) + \mu_x^2 \varepsilon_h^2(t) + \overset{\circ}{\varepsilon}^2(t) x_h^2(t) + \mu_\varepsilon^2 x_h^2(t) + x_h^2(t) \varepsilon_h^2(t) + \\ &+ 4\mu_x \mu_\varepsilon x_h \varepsilon_h + 4\overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{\varepsilon}(t) x_h(t) \varepsilon_h(t) \end{aligned} \right\}. \quad (5.14)$$

Нахождение МО составляющей  $x_h^2(t) \varepsilon_h^2(t)$  производится точно так же, как и в (5.7), но в том случае, когда частоты  $\omega_x$  и  $\omega_\varepsilon$  равны, т.е.  $\omega_x = \omega_\varepsilon$ , то следует учитывать корреляцию между гармоническими составляющими. Величина корреляции будет определяться косинусом угла сдвига фаз  $\varphi$  между этими составляющими [57], т.е.:

$$M\{x_h^2(t) \varepsilon_h^2(t)\} = \frac{1}{4} C_x^2 C_\varepsilon^2 \left( \frac{1}{2} + \cos^2(\varphi) \right).$$

Соответственно, следуя алгоритму, изложенному выше, для составляющих  $4\mu_x \mu_\varepsilon x_h \varepsilon_h$  и  $4\overset{\circ}{x} \overset{\circ}{\varepsilon} x_h \varepsilon_h$  запишется:

$$M\{4\mu_x \mu_\varepsilon x_h(t) \varepsilon_h(t)\} = 2\mu_x \mu_\varepsilon C_x C_\varepsilon \cos(\varphi),$$

$$M\{4\overset{\circ}{x}(t) \overset{\circ}{\varepsilon}(t) x_h(t) \varepsilon_h(t)\} = \frac{1}{2} \sigma_x \sigma_\varepsilon C_x C_\varepsilon \rho_{x\varepsilon} \cos(\varphi).$$

Тогда окончательное выражение для МО квадрата мультипликативной дополнительной погрешности при статистически зависимых сигналах входного воздействия и влияющей величины с учетом не коррелированных гармонических составляющих, будет иметь вид:

$$M\{\Delta_{don}^2(t)\} = a^2 \left[ \begin{aligned} &\mu_x^2 \mu_\varepsilon^2 + \mu_x^2 \sigma_\varepsilon^2 + \mu_\varepsilon^2 \sigma_x^2 + \frac{\sigma_x^2 C_\varepsilon^2}{2} + \frac{\sigma_\varepsilon^2 C_x^2}{2} + \frac{\mu_x^2 C_\varepsilon^2}{2} + \\ &+ \frac{\mu_\varepsilon^2 C_x^2}{2} + \frac{C_x^2 C_\varepsilon^2}{4} + \sigma_x^2 \sigma_\varepsilon^2 (1 + 2\rho_{x\varepsilon}^2) + 4\mu_x \mu_\varepsilon \sigma_x \sigma_\varepsilon \rho_{x\varepsilon} \end{aligned} \right]. \quad (5.15)$$

В том случае, когда гармонические составляющие случайных процессов  $x_h(t)$  и  $\varepsilon_h(t)$  коррелированы, т.е.  $\omega_x = \omega_\varepsilon$ , выражение (5.15) усложняется:

$$M\{\Delta_{don}^2(t)\} = a^2 \left[ \begin{aligned} &\mu_x^2 \mu_\varepsilon^2 + \mu_x^2 \sigma_\varepsilon^2 + \mu_\varepsilon^2 \sigma_x^2 + \frac{\mu_\varepsilon^2 C_x^2}{2} + \frac{\mu_x^2 C_\varepsilon^2}{2} + \\ &+ \frac{\sigma_x^2 C_\varepsilon^2}{2} + \frac{\sigma_\varepsilon^2 C_x^2}{2} + \sigma_x^2 \sigma_\varepsilon^2 (1 + 2\rho_{x\varepsilon}^2) + \\ &+ 4\mu_x \mu_\varepsilon \sigma_x \sigma_\varepsilon \rho_{x\varepsilon} + \frac{C_x^2 C_\varepsilon^2}{4} \left( \frac{1}{2} + \cos^2(\varphi) \right) + \\ &+ 2C_x C_\varepsilon \cos(\varphi) (\mu_x \mu_\varepsilon + \sigma_x \sigma_\varepsilon \rho_{x\varepsilon}) \end{aligned} \right]. \quad (5.16)$$

Для иллюстрации характера полученной зависимости, а также степени влияния угла сдвига фаз между гармоническими составляющими, как и в (5.13), разделим правую и левую части выражения (5.16) на  $\mu_x^2 \mu_\varepsilon^2 a^2$ , а также вынесем за скобки общие множители, при этом положим  $\frac{C_x}{\mu_x} = \frac{C_\varepsilon}{\mu_\varepsilon} = V_C$ . Таким образом, получаем:

$$F(V_x, V_\varepsilon, V_C, \cos(\varphi)) = \left[ \begin{aligned} &1 + V_x^2 + V_\varepsilon^2 + 4V_x V_\varepsilon \rho_{x\varepsilon} + V_x^2 V_\varepsilon^2 (1 + 2\rho_{x\varepsilon}^2) + \\ &+ \frac{V_C^2}{2} \left( V_x^2 + V_\varepsilon^2 + \frac{V_C^2}{2} \left( \frac{1}{2} + \cos^2(\varphi) \right) + 2 \right) + \\ &+ 2V_C^2 \cos(\varphi) (1 + V_x V_\varepsilon \rho_{x\varepsilon}) \end{aligned} \right]. \quad (5.17)$$

Построим графики приведенной функции дополнительной погрешности (5.17), полагая  $V_\varepsilon = 0.3$ ,  $0 \leq \cos(\varphi) \leq 1$ ,  $\rho_{x\varepsilon} = 1$ ,  $0.2 \leq V_C \leq 1$ , при  $V_x = 0.3$  (рис. 5.5),  $V_x = 0.6$  (рис. 5.6),  $V_x = 1$  (рис. 5.7).

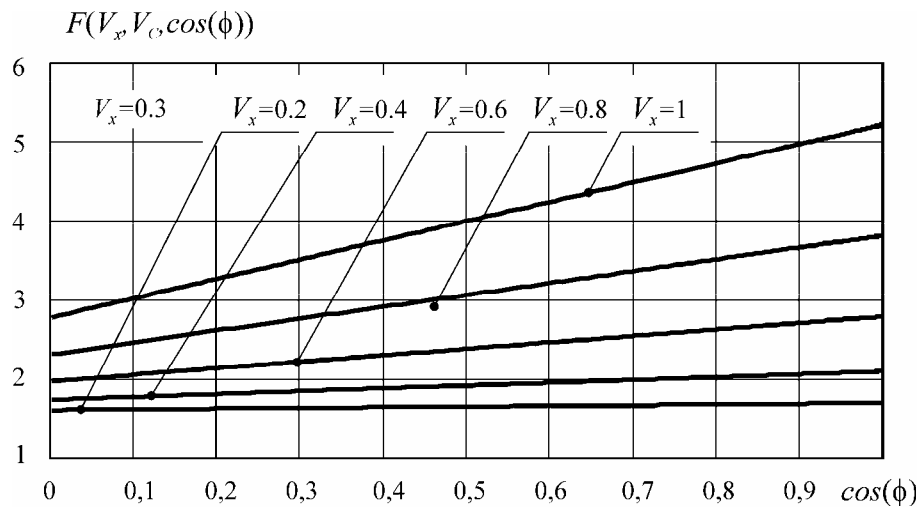


Рис. 5.5. Зависимость приведенной функции дополнительной погрешности от косинуса угла сдвига фаз между гармоническими составляющими при  $V_x = 0.3$

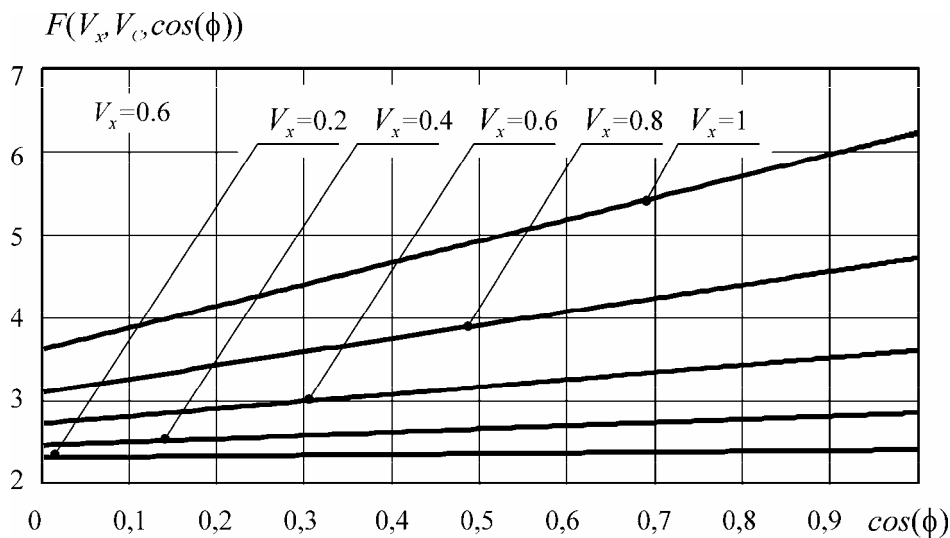


Рис. 5.6. Зависимость приведенной функции дополнительной погрешности от косинуса угла сдвига фаз между гармоническими составляющими при  $V_x = 0.6$

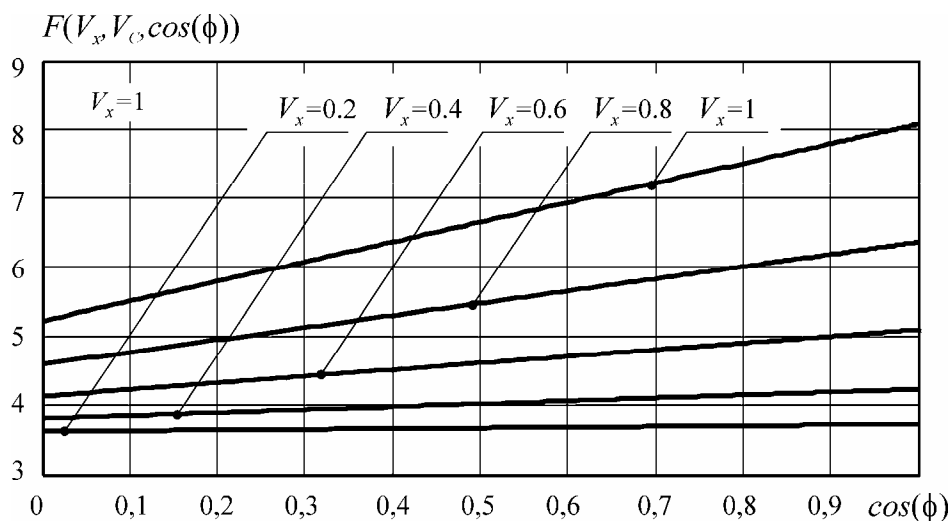


Рис. 5.7. Зависимость приведенной функции дополнительной погрешности от косинуса угла сдвига фаз между гармоническими составляющими при  $V_x = 1$

Как видно из графиков приведенной функции дополнительной погрешности  $F(V_x, V_\varepsilon, V_c, \cos(\varphi))$  (рис. 5.5 – 5.7), учет угла сдвига фаз между гармоническими составляющими позволяет вычислить действительное значение погрешности, которое почти в 2 раза больше чем вычисленное значение без учета сдвига фаз.

### 5.3 Векторная мультипликативная модель

**Векторная модель с независимыми составляющими** (вектор влияющих величин  $[\varepsilon] = [\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t), \varepsilon_1(t), \dots, \varepsilon_n(t)]$ , матрица корреляции вектора  $[\varepsilon]$  нулевая). При воздействии на измерительный преобразователь  $n$  статистически независимых влияющих величин (рис. 5.8), не коррелированных с входным воздействием, выражение (5.3) принимает вид:

$$\Delta_{don}(t) = y(t) - x(t) = x(t) \sum_{i=1}^n a_i \varepsilon_i(t). \quad (5.18)$$

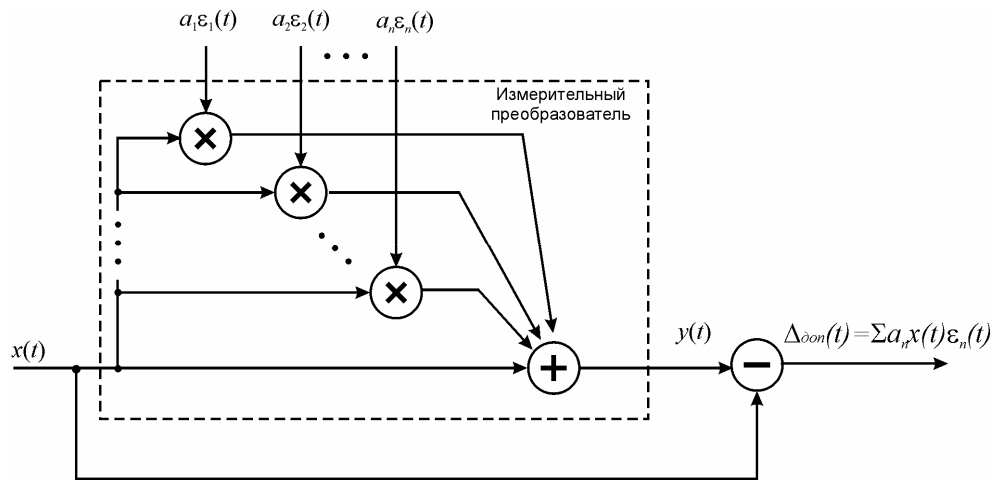


Рис. 5.8. Структура векторной мультипликативной модели дополнительной погрешности

Таким образом, с учетом принятой моделей измерительного сигнала (2.8) и влияющей величины (2.9) (без учета гармонической составляющей), квадрат мультипликативной дополнительной погрешности может быть вычислен по следующей формуле:

$$\Delta_{don}^2(t) = \left( \mu_x + \overset{\circ}{x}(t) \right)^2 \sum_{i=1}^n \left[ a_i \left( \mu_{\varepsilon_i} + \overset{\circ}{\varepsilon}_i(t) \right) \right]^2. \quad (5.19)$$

Математическое ожидание квадрата дополнительной погрешности:

$$M \left\{ \Delta_{don}^2(t) \right\} = M \left\{ \left( \mu_x + \overset{\circ}{x}(t) \right)^2 \sum_{i=1}^n \left[ a_i \left( \mu_{\varepsilon_i} + \overset{\circ}{\varepsilon}_i(t) \right) \right]^2 \right\}.$$

Далее, следуя алгоритму, изложенному выше, отбрасываем все слагаемые, МО которых равно нулю, получая следующее выражение:



$$M\{\Delta_{don}^2(t)\} = M\left\{\sum_{i=1}^n a_i^2 \left[ \sum_{i=1}^n \left[ \mu_x^2 \mu_{\varepsilon_i}^2 + \mu_x^2 \overset{\circ}{\varepsilon}_i^2(t) \right] + \sum_{i=1}^n \left[ \overset{\circ}{x}^2(t) \mu_{\varepsilon_i}^2 + \overset{\circ}{x}^2(t) \overset{\circ}{\varepsilon}_i^2(t) \right] \right] \right\}.$$

Воспользовавшись известным свойством МО (математическое ожидание суммы равно сумме математических ожиданий) разобьем все полученные суммы на отдельные члены. Затем, используя (5.5), получим окончательное выражение для квадрата мультипликативной дополнительной погрешности для случая воздействия на измерительный преобразователь (ИП)  $n$  статистически независимых влияющих воздействий:

$$\begin{aligned} M\{\Delta_{don}^2(t)\} = & \sum_{i=1}^n a_i^2 \left[ \mu_x^2 \mu_{\varepsilon_i}^2 + \mu_x^2 \sigma_{\varepsilon_i}^2 + \mu_{\varepsilon_i}^2 \sigma_x^2 + \sigma_x^2 \sigma_{\varepsilon_i}^2 \right] + \\ & + 2(\mu_x^2 + \sigma_x^2) \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\substack{j=i+1 \\ j \neq i}}^n a_i \mu_{\varepsilon_i} a_j \mu_{\varepsilon_j}. \end{aligned} \quad (5.20)$$

Выражение (5.20) получено без учета статистической зависимости не только между влияющими величинами, но и при отсутствии корреляционной связи этих величин с измеряемым сигналом.

**Векторная модель с зависимыми составляющими** (вектор влияющих величин  $[\mathbf{\varepsilon}] = [\varepsilon_1(t), \varepsilon_2(t), \varepsilon_1(t), \dots, \varepsilon_n(t)]$ , матрица корреляции вектора  $[\mathbf{\varepsilon}]$  ненулевая). При воздействии на ИП  $n$  статистически зависимых влияющих величин, которые коррелированы с входным воздействием, выражение (5.20) существенно усложняется и принимает вид:

$$\begin{aligned} M\{\Delta_{don}^2(t)\} = & \sum_{i=1}^n a_i^2 \left[ \mu_x^2 \mu_{\varepsilon_i}^2 + \mu_x^2 \sigma_{\varepsilon_i}^2 + \mu_{\varepsilon_i}^2 \sigma_x^2 + \sigma_x^2 \sigma_{\varepsilon_i}^2 (1 + 2\rho_{x\varepsilon_i})^2 + \right. \\ & \left. + 4\mu_x \mu_{\varepsilon_i} \sigma_x \sigma_{\varepsilon_i} \rho_{x\varepsilon_i} \right] + \\ & + 2 \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{\substack{j=i+1 \\ j \neq i}}^n a_i a_j \left[ \begin{aligned} & (\mu_x^2 + \sigma_x^2) (\mu_{\varepsilon_i} \mu_{\varepsilon_j} + \sigma_{\varepsilon_i} \sigma_{\varepsilon_j} \rho_{\varepsilon_i \varepsilon_j}) + \\ & + 2\mu_x \sigma_x (\mu_{\varepsilon_i} \sigma_{\varepsilon_j} \rho_{x\varepsilon_j} + \mu_{\varepsilon_j} \sigma_{\varepsilon_i} \rho_{x\varepsilon_i}) + \\ & + \sigma_x^2 (\sigma_{\varepsilon_i}^2 \sigma_{\varepsilon_j} \rho_{x\varepsilon_j} + \sigma_{\varepsilon_j}^2 \sigma_{\varepsilon_i} \rho_{x\varepsilon_i}) \end{aligned} \right]. \end{aligned} \quad (5.21)$$

Структурная схема, иллюстрирующая образование дополнительной погрешности при наличии  $n$  статистически зависимых влияющих величин, коррелированных с входным сигналом, представлена на рис. 5.8.

#### 5.4 Модели мультипликативной дополнительной погрешности при учете динамических свойств каналов.

Ранее во всех расчетах предполагалось, что тракты прохождения полезного сигнала и влияющей величины являются безинерционными, или, по крайней мере, их характеристики и частотный спектр таковы, что искажениями формы сигналов можно пренебречь. На практике это довольно часто встречающийся случай, и практическая полезность выполненных расчетов не вызывает сомнения. Однако рассмотрение ряда типов приборов и методов измерения показывает, что инерционность, по меньшей мере, одного канала (полезного сигнала или параметра влияющего фактора), должна быть учтена. Так, например, постоянная времени кулонометрического гигрометра составляет величину порядка десятков секунд или единиц минут, а время воздействия изменений внешней температуры измеряется десятками минут.

С другой стороны, в этом же случае, рассматривая в качестве влияющего фактора не внешнюю температуру, а напряжение сети, убеждаемся в том, что нужно рассматривать как инерционный канал – канал полезного сигнала, а динамическими характеристиками влияющего фактора можно пренебречь, так как основным инерционным элементом в этом канале является фильтр выпрямителя, постоянная времени которого не превышает нескольких секунд. Количество рассмотренных примеров можно увеличить, и все они свидетельствуют о необходимости разработки методики оценки дополнительной погрешности от влияющего фактора, воздействующего через динамическое звено.

**Скалярная модель с зависимыми сигналами при учете динамики канала влияния** (одна влияющая величина  $\varepsilon(t)$ ,  $\rho_{x\varepsilon} = 1$ ,  $x_h(t) = 0$ ,  $\varepsilon_h(t) = 0$ ). В том случае, когда измеряемый сигнал одновременно является влияющей величиной, коэффициент корреляции  $\rho_{x\varepsilon} = 1$ . При наличии в одном из каналов динамического звена, передаточная функция, которая обозначена через  $W(j\omega)$  (рис. 5.9), коэффициент корреляции примет отличное от единицы значение. На рис. 5.9 через  $\mu_0$  обозначено значение влияющей величины принятое при градуировке. Для того чтобы воспользоваться выражением (5.12) необходимо вычислить значение коэффициента корреляции для процессов  $x(t)$  и  $\varepsilon(t)$ .

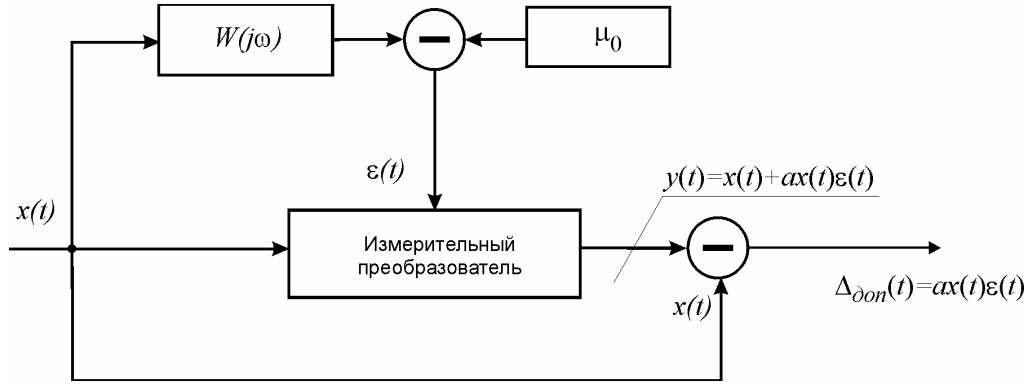


Рис. 5.9. Скалярная мультипликативная модель дополнительной погрешности при учете динамики каналов

Определить коэффициент корреляции можно из известного соотношения Винера-Хинчина, положив  $\tau = 0$  во взаимнокорреляционной функции (ВКФ) входного и влияющего воздействий:

$$R_{x\varepsilon}(\tau, T) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \operatorname{Re}[S_{x\varepsilon}(j\omega)] \cdot \cos(\omega\tau) d\omega, \quad (5.22)$$

где  $\omega$  – частота,  $S_{x\varepsilon}(j\omega)$  – кроссспектральная плотность мощности измеряемой и влияющей величины, определяемая следующим выражением:

$$S_{x\varepsilon}(j\omega) = W(j\omega)S_x(\omega),$$

где  $S_x(\omega)$  – спектральная плотность входного воздействия.

Дисперсия процесса на выходе динамического звена  $\sigma_\varepsilon^2$  может быть найдена из соотношения:

$$\sigma_\varepsilon^2 = \int_0^{+\infty} S_x(\omega) |W(j\omega)| d\omega. \quad (5.23)$$

Рассмотрим случай, когда в качестве динамического звена в канале влияющей величины выступает инерционное звено, для которого:

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T}, \quad (5.24)$$

где  $T$  – постоянная времени инерционного звена.

Примем, что спектральная плотность входного воздействия имеет вид (2.10), но в ненормированном виде:

$$S_x(\omega) = \frac{2\sigma_x^2\alpha}{\pi(\alpha^2 + \omega^2)}, \quad (5.25)$$

Определим дисперсию процесса  $\varepsilon(t)$  на выходе инерционного звена:

$$\sigma_\varepsilon^2 = \int_0^{+\infty} S_x(\omega) |W(j\omega)|^2 d\omega = \frac{\sigma_x^2}{1 + \alpha T}. \quad (5.26)$$

Тогда взаимнокорреляционная функция будет определяться следующим выражением:

$$R_{x\varepsilon}(\tau, T) = \frac{2\sigma_x^2\alpha}{\pi\sigma_x\sigma_\varepsilon} \int_0^{+\infty} \operatorname{Re}[S_{x\varepsilon}(j\omega)] \cos(\omega\tau) d\omega. \quad (5.27)$$

Выполнив преобразования с учетом (5.26) и перейдя к пределу при  $\tau \rightarrow 0$  получаем следующее выражение для коэффициента корреляции:

$$\rho_{x\varepsilon}(T) = \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha T}} \quad (5.28)$$

Таким образом, МО квадрата мультипликативной дополнительной погрешности, с учетом динамического звена вида (5.24) в канале влияющей величины определяется по следующей формуле:

$$M\left\{\Delta_{\text{don}}^2(t)\right\} = a^2 \left[ \begin{aligned} &\mu_x^2\mu_\varepsilon^2 + \mu_x^2\sigma_\varepsilon^2 + \mu_\varepsilon^2\sigma_x^2 + \sigma_x^2\sigma_\varepsilon^2 \left(1 + \frac{2}{1 + \alpha T}\right) + \\ &+ 4\sigma_x\sigma_\varepsilon\mu_x\mu_\varepsilon \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha T}} \end{aligned} \right], \quad (5.29)$$

где  $\mu_\varepsilon = \mu_x - \mu_0$ .

В качестве примера другого вида динамического звена воспользуемся звеном чистого запаздывания:

$$W(j\omega) = e^{-j\omega T}. \quad (5.30)$$

При спектральной плотности входного воздействия вида (5.25) определим ВКФ, соответствующую динамическому звену (5.30), учитывая, что для случая чистого сдвига дисперсии, а соответственно и среднеквадратическое отклонение (СКО) сигналов на входе звена и на выходе равны, т.е.  $\sigma_x = \sigma_\varepsilon$ :

$$R_{x\varepsilon}(\tau, T) = \frac{2\alpha\sigma_x^2}{\pi^2\sigma_x\sigma_\varepsilon} \int_0^{+\infty} \frac{\cos[\omega(T+\tau)]}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega. \quad (5.31)$$

В пределе при  $\tau \rightarrow 0$  коэффициент корреляции будет определяться выражением:

$$\rho_{x\varepsilon}(T) = e^{-\alpha T}. \quad (5.32)$$

Окончательное выражение для МО квадрата мультипликативной дополнительной погрешности, с учетом динамического звена вида (5.30) в канале влияющей величины имеет следующий вид:

$$M\{\Delta_{don}^2(t)\} = a^2 \left[ \mu_x^2 \mu_\varepsilon^2 + \mu_x^2 \sigma_\varepsilon^2 + \mu_\varepsilon^2 \sigma_x^2 + \sigma_x^2 \sigma_\varepsilon^2 (1 + 2e^{-2\alpha T}) + 4\sigma_x \sigma_\varepsilon \mu_x \mu_\varepsilon e^{-\alpha T} \right]. \quad (5.33)$$

Таким образом, при учете динамических свойств канала влияющей величины, в выражение (5.12) вместо коэффициента корреляции  $\rho_{x\varepsilon}$  следует поставить коэффициент корреляции, рассчитанный либо с помощью формулы (5.28), либо (5.32), в зависимости от того, какое звено характеризует динамические свойства канала влияющего воздействия. Если динамическое звено характеризует выражение (5.24), то дисперсия сигнала влияющей величины определяется из соотношения (5.26).

Для иллюстрации характера полученных зависимостей, а также для определения влияния параметров динамических звеньев на дополнительную погрешность, разделим правую и левую части выражений (5.29) и (5.33) на  $\mu_x^2 \mu_\varepsilon^2 a^2$ . Таким образом для инерционного звена получаем:

$$F(V_x, V_\varepsilon, B) = a^2 \left[ 1 + V_x^2 + V_\varepsilon^2 + V_x^2 V_\varepsilon^2 \left( 1 + \frac{2}{1+B} \right) + 4V_x V_\varepsilon \frac{1}{\sqrt{1+B}} \right], \quad (5.34)$$

где  $B = \alpha T$ .

Для звена чистого запаздывания:

$$F(V_x, V_\varepsilon, B) = a^2 \left[ 1 + V_x^2 + V_\varepsilon^2 + V_x^2 V_\varepsilon^2 (1 + 2e^{-2B}) + 4V_x V_\varepsilon e^{-B} \right]. \quad (5.35)$$

Построим графики приведенной функции дополнительной погрешности (5.34) и (5.35), полагая  $0.2 \leq V_x \leq 1$ . При  $V_\varepsilon = 0.3$  соответственно для инерционного звена и звена чистого запаздывания (рис. 5.10) и (рис. 5.13),  $V_\varepsilon = 0.6$  (рис. 5.11) и (рис. 5.14),  $V_\varepsilon = 1$  (рис. 5.12) и (рис. 5.15).

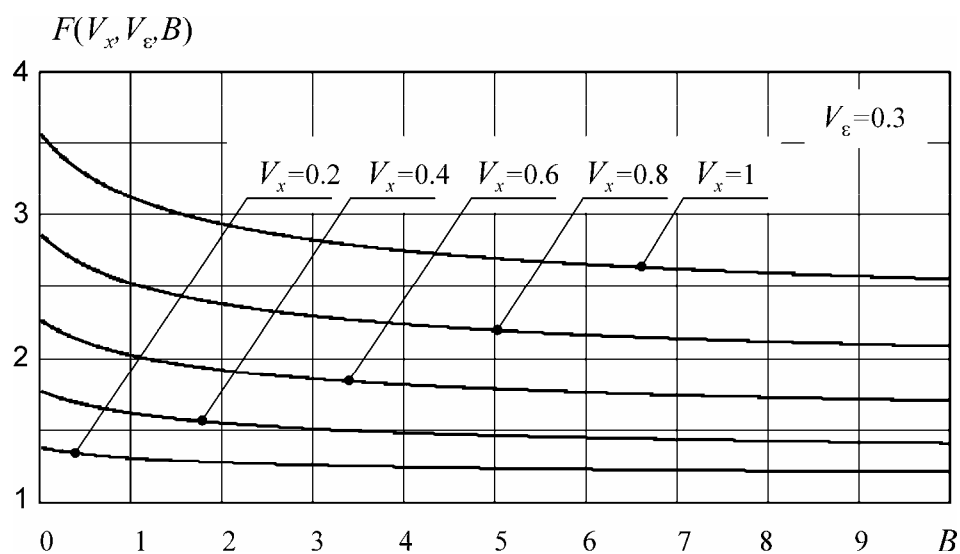


Рис. 5.10. Зависимости приведенной функции дополнительной погрешности от параметра инерционного звена при  $V_\epsilon = 0.3$

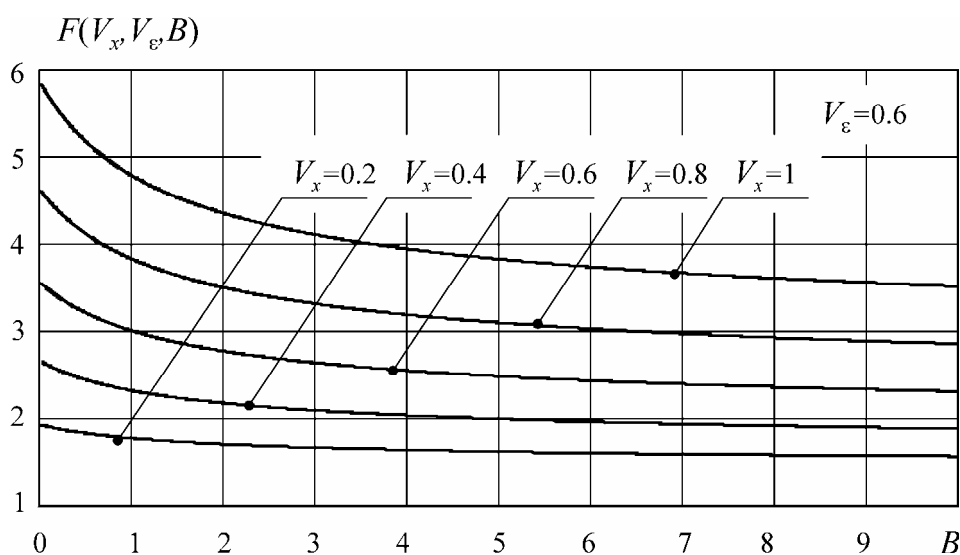


Рис. 5.11. Зависимости приведенной функции дополнительной погрешности от параметра инерционного звена при  $V_\epsilon = 0.6$

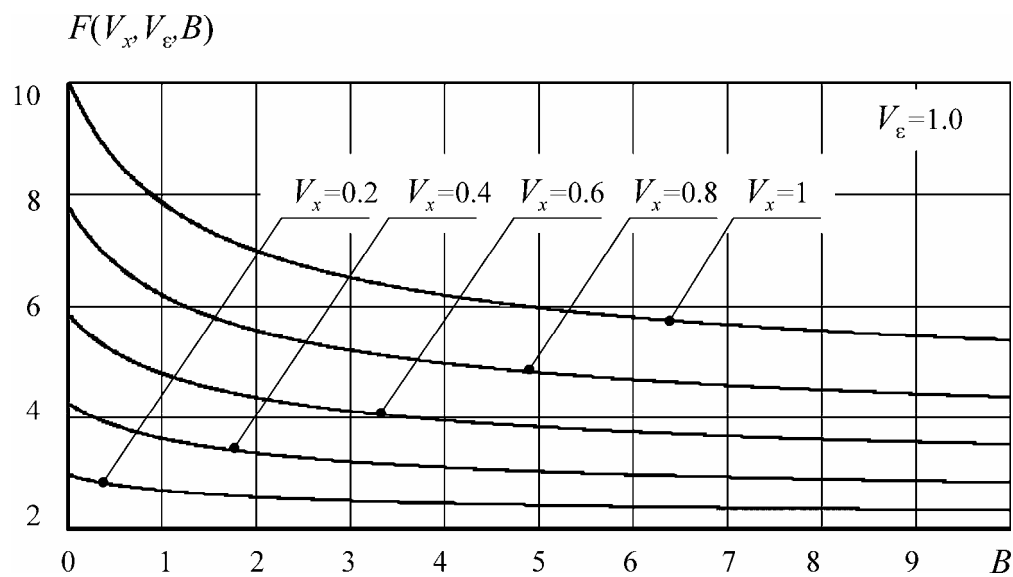


Рис. 5.12. Зависимости приведенной функции дополнительной погрешности от параметра инерционного звена при  $V_\varepsilon = 1$

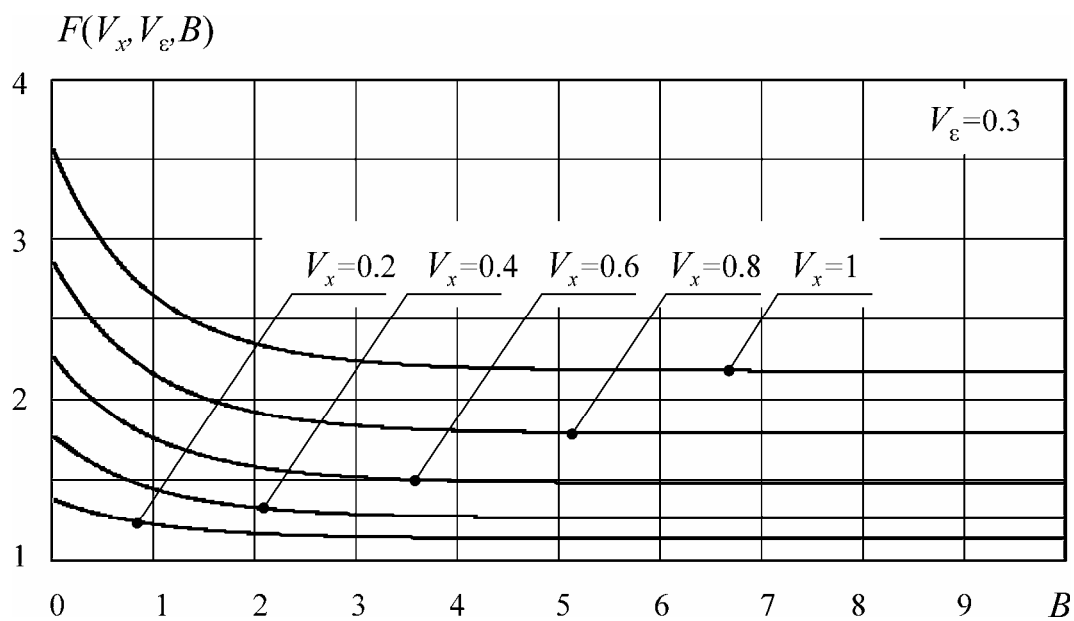


Рис. 5.13. Зависимости приведенной функции дополнительной погрешности от параметра звена чистого запаздывания при  $V_\varepsilon = 0.3$

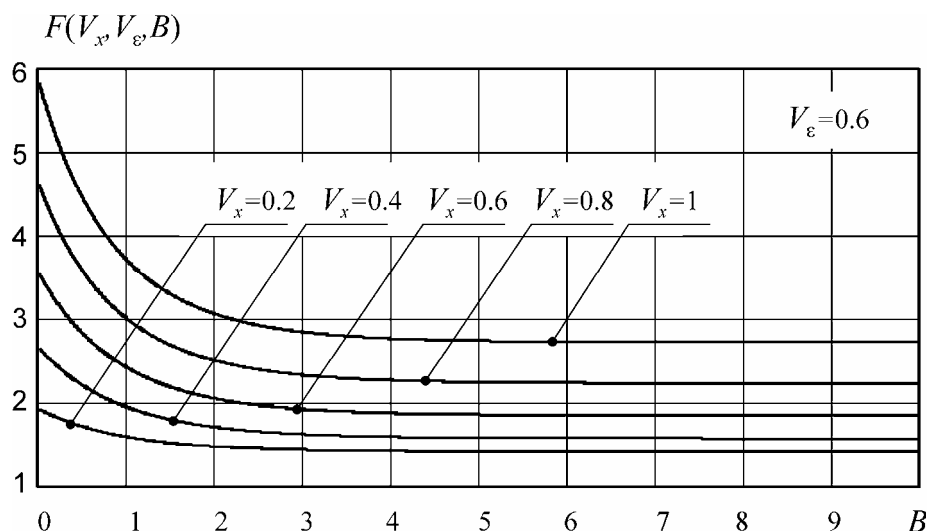


Рис. 5.14. Зависимости приведенной функции дополнительной погрешности от параметра звена чистого запаздывания при  $V_\varepsilon = 0,6$

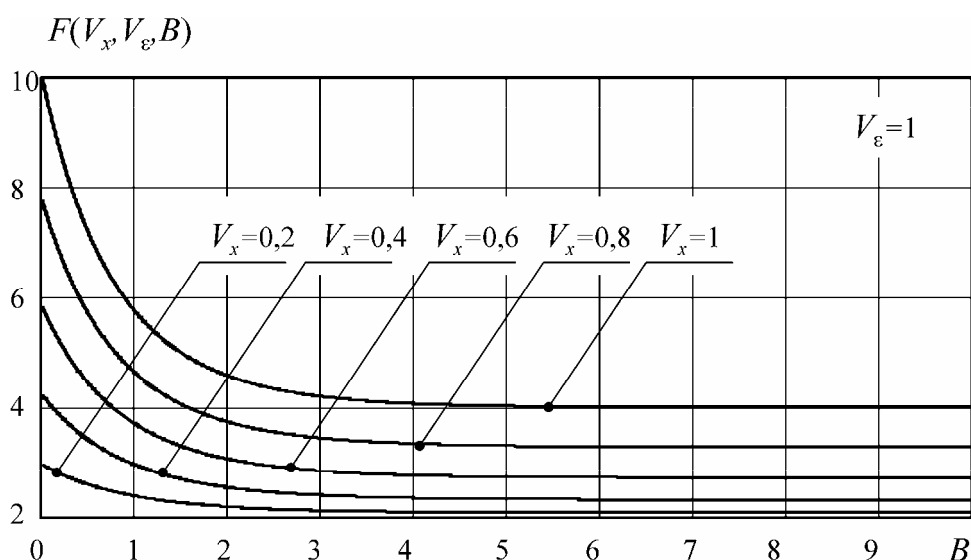


Рис. 5.15. Зависимости приведенной функции дополнительной погрешности от параметра звена чистого запаздывания при  $V_\varepsilon = 1$

Как видно из графиков приведенной функции дополнительной погрешности  $F(V_x, V_\varepsilon, B)$  (рис. 5.10 – 5.15), учет динамических свойств канала влияния может привести к изменению вычисленного значения погрешности в  $2 \div 2,5$  раза.

Предлагаемый алгоритм вычисления параметров модели дополнительной погрешности с применением выражений (5.22) и (5.23) может быть использован и при иных динамических звеньях. Для этого необходимо знать вид функций спектральных плотностей сигналов, а также вид передаточной характеристики динамических звеньев.



В том случае, когда вычисление интегралов в аналитическом виде не представляется возможным (см. выражения (5.22) и (5.23)), следует использовать численные методы.

**Скалярная модель с зависимыми сигналами при учете динамики канала влияния и измерительного канала** (одна влияющая величина  $\varepsilon(t)$ ,  $\rho_{x\varepsilon} = 1$ ,  $x_h(t) = 0$ ,  $\varepsilon_h(t) = 0$ ). В том случае, когда в канале входной величины  $x(t)$  также включено динамическое звено, в сигнале на выходе устройства, помимо дополнительной возникает еще и динамическая погрешность. Применив известные методы расчета можно вычислить отдельно каждую составляющую, затем, суммируя квадраты составляющих, получить квадрат суммарной погрешности. При этом предполагается, что эти составляющие статистически независимы.

В действительности, как будет показано ниже, это допущение не корректно, т.к. не учитывает образование корреляционной связи между составляющими суммарной погрешности, возникающей при прохождении полезного сигнала и сигнала влияющей величины через тракт ИП. Рассмотрим структурную схему, моделирующую процесс образования мультипликативной дополнительной и динамической погрешностей (рис. 5.16).

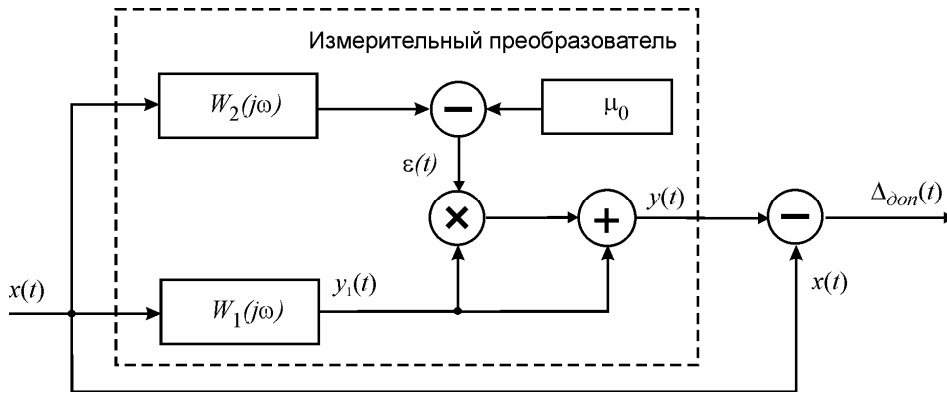


Рис. 5.16. Модель образования динамической и мультипликативной дополнительной погрешностей на выходе измерительного преобразователя

Здесь через  $W_1(j\omega)$  и  $W_2(j\omega)$  обозначены динамические звенья, соответственно, в каналах входного воздействия и влияющей величины, а через  $\Delta_\Sigma(t)$  суммарная динамическая и дополнительная погрешности.

Суммарная погрешность ИП, будет определяться из следующего соотношения [61]:

$$\Delta_\Sigma(t) = x(t) - y_1(t) = x(t) - [ay(t)\varepsilon(t) + y(t)].$$

Как и раньше определим квадрат суммарной погрешности:

$$\begin{aligned}\Delta_{\Sigma}^2(t) &= [x(t) - y(t) - ay(t)\varepsilon(t)]^2 = \\ &= [x(t) - y(t)]^2 + a^2 y^2(t) \varepsilon^2(t) - 2ay(t)\varepsilon(t)[x(t) - y(t)].\end{aligned}\quad (5.36)$$

В выражении (5.36) присутствуют три составляющие. Первая определяет квадрат динамической погрешности  $\Delta_{дин}^2$ ; вторая – квадрат дополнительной погрешности  $\Delta_{дон}^2$ ; третья – член, свидетельствующий о наличии корреляционной связи между дополнительной и динамической погрешностями.

Изложенный ранее алгоритм определения основных параметров модели (коэффициента корреляции, дисперсии) применим и в случае расчета дополнительной погрешности по структурной схеме, представленной на рис. 5.16. Для примера рассмотрим наиболее часто встречающийся случай, когда в качестве динамических звеньев выступают инерционные.

Спектральная плотность входного воздействия имеет вид (5.25). Тогда математическое ожидание сигнала  $y(t)$  будет также равно МО измеряемого параметра, т.е.  $\mu_y = \mu_x$ . МО влияющей величины будет определяться как  $\mu_{\varepsilon} = \mu_x - \mu_0$ , а дисперсии сигналов  $y(t)$  и  $\varepsilon(t)$  могут быть найдены так же, как и в (5.26):

$$\sigma_y^2 = \frac{\sigma_x^2}{1 + \alpha T_1}, \quad \sigma_{\varepsilon}^2 = \frac{\sigma_x^2}{1 + \alpha T_2},$$

где  $T_1$  и  $T_2$  – постоянные времени звеньев соответственно  $W_1(j\omega)$  и  $W_2(j\omega)$ .

Следуя алгоритму нахождения МО, изложенному выше, получаем выражение:

$$M\{\Delta_{\Sigma}^2(t)\} = M\{\Delta_{дин}^2(t)\} + M\{\Delta_{дон}^2(t)\} + M\{\Delta_{\rho}^2(t)\}, \quad (5.37)$$

где, как следует из (5.36):

$$M\{\Delta_{\rho}^2(t)\} = M\{2ay(t)\varepsilon(t)[x(t) - y(t)]\}.$$

Произведя математические преобразования и вычисления, получаем МО динамической погрешности:

$$M\{\Delta_{дин}^2(t)\} = \frac{\sigma_x^2 B_1}{1 + B_1}, \quad (5.38)$$

где  $B_1 = \alpha T_1$ .

Математическое ожидание дополнительной погрешности равно:

$$M\{\Delta_{don}^2(t)\} = a^2 \left[ \mu_x^2 \mu_\varepsilon^2 + \frac{\mu_\varepsilon^2 \sigma_x^2}{1+B_1} + \frac{\mu_x^2 \sigma_x^2}{1+B_2} + \frac{\sigma_x^4}{(1+B_1)(1+B_2)} + \frac{2\sigma_x^4(2B_1B_2+B_1+B_2)^2}{(B_1+B_2)^2(B_1+1)^2(B_2+1)^2} + \frac{4\mu_x\mu_\varepsilon\sigma_x^2(2B_1B_2+B_1+B_2)}{(B_1+B_2)(B_1+1)(B_2+1)} \right], \quad (5.39)$$

где  $B_2 = \alpha T_2$ .

Третья составляющая суммарной погрешности определится из следующего выражения:

$$M\{\Delta_\rho^2(t)\} = 2a\mu_x\sigma_x^2 \frac{B_1(B_2-B_1)}{(B_1+B_2)(B_1+1)(B_2+1)}.$$

Для иллюстрации степени влияния корреляционной связи между погрешностями используем следующее выражение:

$$F = \frac{M\{\Delta_{дин}^2(t)\} + M\{\Delta_{don}^2(t)\} + M\{\Delta_\rho^2(t)\}}{M\{\Delta_{дин}^2(t)\} + M\{\Delta_{don}^2(t)\}}. \quad (5.40)$$

Построим график функции полученного выражения (5.40) (рис. 5.17) при различных значениях параметра  $\mu_\varepsilon$ . При этом положим следующие значения параметров функции (5.37):  $B_1 = 0,5$ ,  $B_2 = 2,5$ ,  $\mu_x = 45$ ,  $a = 0,02$ .

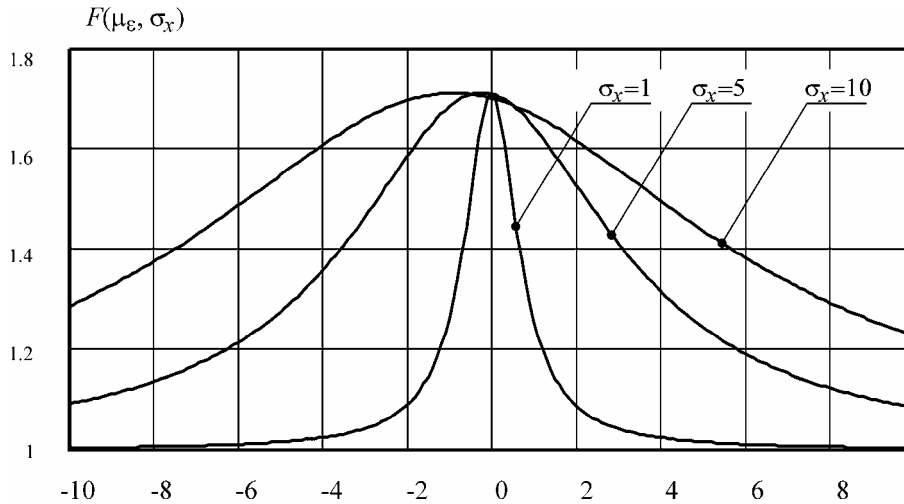


Рис. 5.17. Иллюстрация степени влияния корреляционной связи между динамической и дополнительной погрешностями

Как видно из графика (рис. 5.17) максимальное увеличение суммарной динамической и дополнительной погрешности, при учете корреляционной связи между этими погрешностями, может достигать порядка 60% при  $\mu_\varepsilon \approx 0$  (т.е., ко-

гда МО влияющего воздействия равно значению, принятому при градуировке ИП).

Максимальное увеличение суммарной погрешности при учете корреляционной связи является не существенным и, поэтому, во многих случаях, корреляционной составляющей  $\Delta_p^2(t)$  можно пренебречь.

**Скалярная модель с зависимыми сигналами с учетом динамики канала влияния и измерительного канала** (одна влияющая величина  $\varepsilon(t)$ ,  $\rho_{x\varepsilon} < 1$ ,  $x_h(t) = 0$ ,  $\varepsilon_h(t) = 0$ ). В том случае, если измеряемая и влияющая величина являются различными сигналами, то структурная схема, иллюстрирующая эти воздействия на ИП, выглядит следующим образом (рис. 5.19).

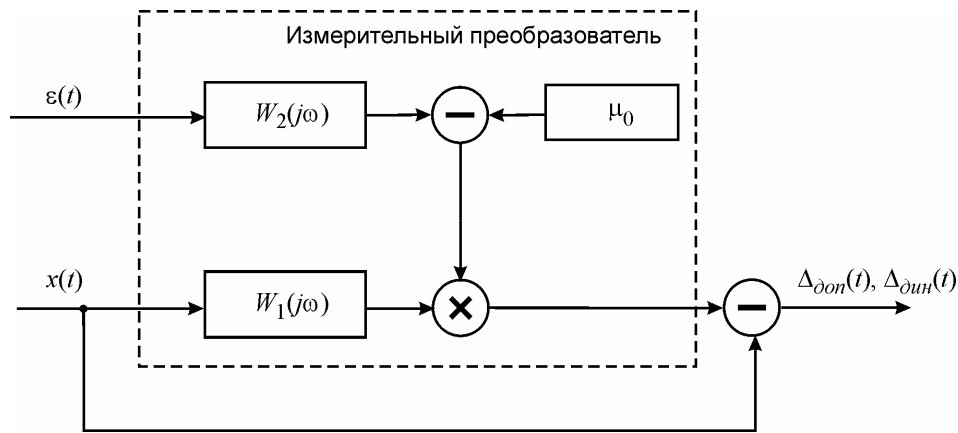


Рис. 5.19. Модель образования динамической и мультипликативной дополнительной погрешностей при учете динамических свойств каналов различных сигналов входного и влияющего воздействий

Процесс образования динамической и мультипликативной дополнительной погрешностей, в этом случае, будет выглядеть следующим образом (рис. 5.19).

Суммарная погрешность ИП, будет определяться из соотношения:

$$\Delta(t) = x(t) - y_1(t) = x(t) - [ay(t)e(t) + y(t)].$$

Определим квадрат суммарной погрешности:

$$\begin{aligned} \Delta^2(t) &= [x(t) - y(t) - ay(t)e(t)]^2 = \\ &= [x(t) - y(t)]^2 + a^2 y^2(t) e^2(t) - 2ay(t)e(t)[x(t) - y(t)]. \end{aligned} \quad (5.41)$$

Три составляющие выражения (5.41), как и в предыдущем случае, определяют квадрат динамической погрешности  $\Delta_{дин}^2$ , квадрат дополнительной по-

грешности  $\Delta_{don}^2$  и член, свидетельствующий о наличии корреляционной связи между дополнительной и динамической погрешностями.

Здесь, как и в предыдущих двух частях, алгоритм определения основных параметров модели (коэффициента корреляции, дисперсии) применим и в случае расчета дополнительной погрешности по структурной схеме, представленной на рис. 5.19. Для примера, как и ранее, рассмотрим наиболее часто встречающийся случай, когда в качестве динамических звеньев выступают инерционные.

Спектральная плотность входного воздействия задана выражением (5.25). Тогда математическое ожидание сигнала  $y(t)$  будет также равно МО измеряемого параметра, т.е.  $\mu_y = \mu_x$ . Смещение МО влияющей величины относительно значения принятого при градуировке ИП будет равно  $\mu_\varepsilon$ , а дисперсии сигналов  $y(t)$  и  $\varepsilon(t)$  могут быть найдены так же, как и в (5.26):

$$\sigma_y^2 = \frac{\sigma_x^2}{1 + \alpha T_1}, \quad \sigma_\varepsilon^2 = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{1 + \alpha T_2}.$$

Полагая, что корреляционная матрица входного воздействия и влияющей величины (где на главной диагонали стоят автокорреляционные, остальные элементы матрицы - взаимнокорреляционные функции) имеет вид:

$$[\mathbf{R}(\tau)] = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 \cdot e^{-\alpha_x |\tau|} & c \cdot e^{-\alpha_{ex} |\tau|} \\ c \cdot e^{-\alpha_{xe} |\tau|} & \sigma_\varepsilon^2 \cdot e^{-\alpha_\varepsilon |\tau|} \end{bmatrix},$$

где  $\alpha_x$  и  $\alpha_\varepsilon$  – параметры корреляционных функций соответственно измеряемого и влияющего воздействий,  $\alpha_{x\varepsilon}$  и  $\alpha_{\varepsilon x}$  – параметры взаимных корреляционных функций измеряемого и влияющего воздействий,  $c = \sigma_x \sigma_\varepsilon \rho_{x\varepsilon}$  – параметр взаимнокорреляционной функции.

Следуя алгоритму нахождения МО, изложенному выше, получаем выражение:

$$M \{ \Delta_\Sigma^2(t) \} = M \{ \Delta_{din}^2(t) \} + M \{ \Delta_{don}^2(t) \} + M \{ \Delta_\rho^2(t) \}, \quad (5.42)$$

где, как следует из (5.41):

$$M \{ \Delta_\rho^2(t) \} = M \{ 2ay(t)e(t)[x(t) - y(t)] \}.$$

Произведя математические преобразования и вычисления, получаем МО динамической погрешности:

$$M \{ \Delta_{din}^2(t) \} = \frac{\sigma_x^2 B_1}{1 + B_1}, \quad (5.43)$$

где  $B_1 = \alpha_x T_1$ .

Математическое ожидание мультипликативной дополнительной погрешности:

$$M\{\Delta_{don}^2(t)\} = a^2 \left[ \begin{aligned} &\mu_x^2 \mu_\varepsilon^2 + \frac{\mu_\varepsilon^2 \sigma_x^2}{1+B_1} + \frac{\mu_x^2 \sigma_x^2}{1+B_2} + \frac{\sigma_x^4}{(1+B_1)(1+B_2)} + \\ &+ \frac{2\sigma_x^4 (2B_1 B_2 + B_1 + B_2)^2}{(B_1 + B_2)^2 (B_1 + 1)^2 (B_2 + 1)^2} + \frac{4\mu_x \mu_\varepsilon \sigma_x^2 (2B_1 B_2 + B_1 + B_2)}{(B_1 + B_2)(B_1 + 1)(B_2 + 1)} \end{aligned} \right], \quad (5.44)$$

где  $B_2 = \alpha_\varepsilon T_2$

Третья составляющая суммарной погрешности, обусловленная корреляционной связью, определяется следующим образом:

$$M\{\Delta_\rho^2(t)\} = 2a\mu_x \sigma_x \sigma_\varepsilon \rho_{x\varepsilon} \frac{B_3(B_3 - B_4)}{(B_3 + B_4)(B_3 + 1)(B_4 + 1)},$$

где  $B_3 = \alpha_{x\varepsilon} T_1$ ,  $B_4 = \alpha_{x\varepsilon} T_2$ .

Максимальное увеличение суммарной динамической и дополнительной погрешности, при учете корреляционной связи между этими погрешностями, может достигать, как и в предыдущем случае, порядка 20% при  $\mu_\varepsilon \approx \mu_0$ . Такое увеличение суммарной погрешности является не существенным и, поэтому, во многих случаях, корреляционной составляющей  $\Delta_\rho^2(t)$  можно пренебречь.

Рассмотренные выше, в качестве примеров, инерционные звенья являются простейшим случаем, т.к. характеризуют измерительный преобразователь как линейную систему. Зачастую вид передаточных характеристик динамических звеньев может существенно отличаться от вида инерционного звена первого порядка. Получение аналитического решения в таком случае вряд ли является целесообразным, поэтому основным методом решения задачи анализа дополнительной погрешности

### 5.5 Модели аддитивной дополнительной погрешности при учете динамических свойств каналов.

Рассмотрим структурную схему, моделирующую процесс образования дополнительной и динамической погрешностей (рис. 5.20), где дополнительная погрешность носит аддитивный характер.

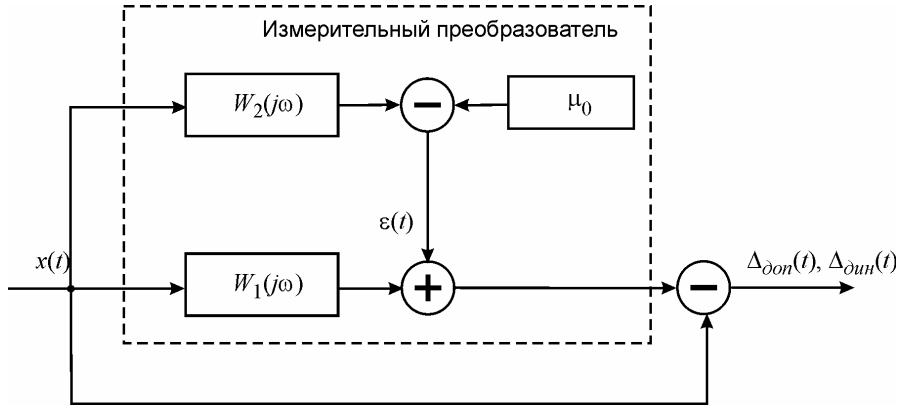


Рис. 5.20. Модель образования суммарной аддитивной дополнительной и динамической погрешностей на выходе измерительного преобразователя

Суммарная погрешность ИП, с учетом того, что дополнительная погрешность является чисто аддитивной, будет определяться из следующего соотношения:

$$\Delta(t) = x(t) - y_1(t) = x(t) - a[\varepsilon(t) - \mu_0] - y(t),$$

где  $a$  – коэффициент влияния, имеющий размерность измеряемой величины.

Квадрат суммарной погрешности:

$$\begin{aligned} \Delta_{\Sigma}^2(t) &= [x(t) - a[\varepsilon(t) - \mu_0] - y(t)]^2 = \\ &= [x(t) - y(t)]^2 + a^2[\varepsilon(t) - \mu_0]^2 - 2a[\varepsilon(t) - \mu_0][x(t) - y(t)]. \end{aligned} \quad (5.45)$$

В выражении (5.45), как и в (5.36), (5.41), присутствуют 3 составляющие, которые определяют квадрат динамической погрешности  $\Delta_{din}^2(t)$ , квадрат дополнительной погрешности  $\Delta_{don}^2(t)$  и корреляционную связь между дополнительной и динамической погрешностями.

Рассмотрим, как и ранее, наиболее часто встречающийся случай, когда в качестве динамических звеньев выступают инерционные, а спектральная плотность входного воздействия имеет вид (5.25).

Математическое ожидание влияющей величины будет определяться как:

$$\mu_{\varepsilon} = \mu_x - \mu_0.$$

Опуская методику математических преобразований и вычислений, получаем выражение для динамической погрешности, которое совпадает с (5.43):

$$M\{\Delta_{din}^2(t)\} = \frac{\sigma_x^2 B_1}{1 + B_1}.$$

Математическое ожидание дополнительной погрешности равно:

$$M\{\Delta_{дон}^2(t)\} = a^2 \left[ \mu_\varepsilon^2 + \frac{\sigma_x^2}{1+B_2} \right].$$

Третья составляющая суммарной погрешности определится из следующего выражения:

$$M\{\Delta_\rho^2(t)\} = 2a\sigma_x^2 \frac{B_1(B_2 - B_1)}{(B_1 + B_2)(B_1 + 1)(B_2 + 1)}.$$

Для иллюстрации степени влияния корреляционной связи между погрешностями используем следующее выражение:

$$F = \frac{M\{\Delta_{дин}^2(t)\} + M\{\Delta_{дон}^2(t)\} + M\{\Delta_\rho^2(t)\}}{M\{\Delta_{дин}^2(t)\} + M\{\Delta_{дон}^2(t)\}}. \quad (5.46)$$

Построим график функции полученного выражения (5.46) (рис. 5.21) при различных значениях параметра  $\mu_\varepsilon = \mu_x - \mu_0$ . При этом положим следующие значения параметров функции (5.46):  $B_1 = 0,3$ ,  $B_2 = 2,4$ ,  $\sigma_x = 5$ ,  $a = 0,8$ .

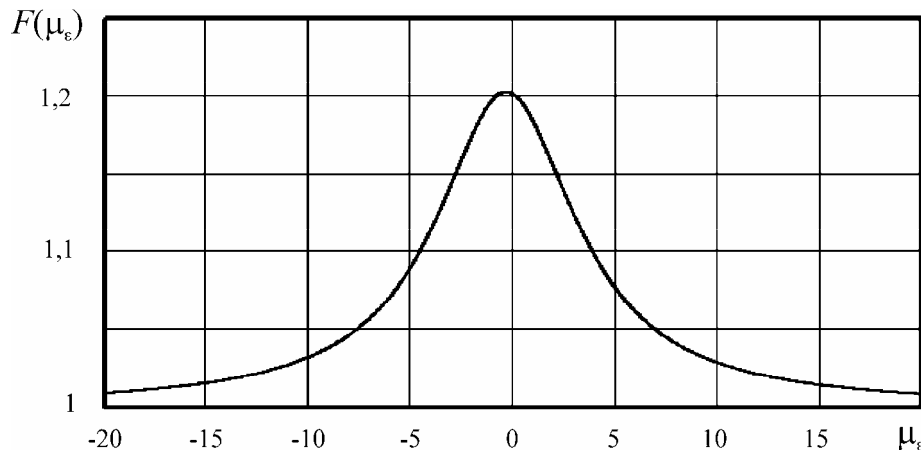


Рис. 5.21. Иллюстрация степени влияния корреляционной связи между динамической и аддитивной дополнительной погрешностями

Как видно из графика (рис. 5.21) максимальное увеличение суммарной динамической и дополнительной погрешности, при учете корреляционной связи между этими погрешностями, как и в предыдущих двух случаях, может достигать порядка 20% при  $\mu_\varepsilon \approx 0$  (т.е., когда МО влияющего воздействия равно значению, принятому при градуировке ИП) и при достаточно большом значении коэффициента влияния  $a$ . В реальных условиях коэффициент влияния, в основном,



имеет порядок  $10^{-2}$ . При таком его значении максимальное увеличение суммарной погрешности при учете корреляционной связи является пренебрежительно малым ( $\sim 5\%$ ) и, поэтому, в подавляющем большинстве случаев, корреляционную составляющую  $\Delta_{\rho}^2$  можно не учитывать.

### 5.6. Векторная модель аддитивно-мультипликативной дополнительной погрешности

Ранее были рассмотрены модели образования дополнительной погрешности, которая носила либо чисто аддитивный, либо чисто мультипликативный характер. На практике встречаются случаи, когда погрешность имеет совместный аддитивно-мультипликативный характер.

На рис. 5.22 представлена модель образования аддитивно - мультипликативной дополнительной погрешности без учета динамических свойств каналов измеряемой и влияющей величины. Здесь через  $a_1$  и  $a_2$  обозначены коэффициенты влияния, причем  $a_1$  имеет размерность обратную размерности влияющей величины, а коэффициент  $a_2$  – обратную влияющей, но прямо пропорциональную измеряемой величине.

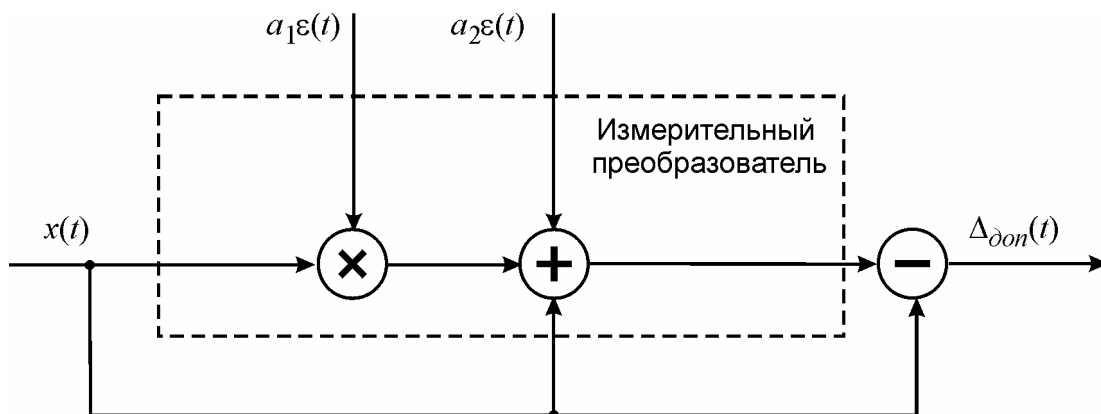


Рис. 5.22. Модель образования аддитивно-мультипликативной дополнительной погрешности измерительного преобразователя

Дополнительная погрешность на выходе ИП равна:

$$\Delta_{don}(t) = a_1 x(t) \varepsilon(t) + a_2 \varepsilon(t).$$

Следуя алгоритму определения математического ожидания квадрата дополнительной погрешности и учитывая корреляционную зависимость между

измеряемым сигналом и влияющей величиной, пропуская все основные вычисления, запишем окончательное выражение:

$$M \left\{ \Delta_{\text{дон}}^2(t) \right\} = a_1^2 \left[ \mu_x^2 \mu_\varepsilon^2 + \sigma_x^2 \sigma_\varepsilon^2 (1 + 2\rho_{x\varepsilon}^2) + \mu_x^2 \sigma_\varepsilon^2 + \mu_\varepsilon^2 \sigma_x^2 + 4\mu_x \mu_\varepsilon \sigma_x \sigma_\varepsilon \rho_{x\varepsilon} \right] + a_2^2 \left[ \mu_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2 \right] + 2a_1 a_2 \left[ \mu_x \mu_\varepsilon^2 + \mu_x \sigma_\varepsilon^2 + 2\mu_\varepsilon \sigma_x \sigma_\varepsilon \rho_{x\varepsilon} \right] \quad (5.47)$$

Полученное выражение состоит из трех частей, образующих три слагаемых суммарной погрешности. Первая часть характеризует мультипликативную составляющую:

$$M \left\{ \Delta_{\text{дон.мульт}}^2(t) \right\} = a_1^2 \left[ \mu_x^2 \mu_\varepsilon^2 + \sigma_x^2 \sigma_\varepsilon^2 (1 + 2\rho_{x\varepsilon}^2) + \mu_x^2 \sigma_\varepsilon^2 + \mu_\varepsilon^2 \sigma_x^2 + 4\mu_x \mu_\varepsilon \sigma_x \sigma_\varepsilon \rho_{x\varepsilon} \right].$$

Вторая часть – аддитивную:

$$M \left\{ \Delta_{\text{дон.адд}}^2(t) \right\} = a_2^2 \left[ \mu_\varepsilon^2 + \sigma_\varepsilon^2 \right].$$

Третья – корреляционную составляющую суммарной аддитивно – мультипликативной погрешности:

$$M \left\{ \Delta_\rho^2(t) \right\} = 2a_1 a_2 \left[ \mu_x \mu_\varepsilon^2 + \mu_x \sigma_\varepsilon^2 + 2\mu_\varepsilon \sigma_x \sigma_\varepsilon \rho_{x\varepsilon} \right].$$

Для иллюстрации степени влияния корреляционной связи между погрешностями используем следующее выражение:

$$F = \frac{M \left\{ \Delta_{\text{дон.мульт}}^2(t) \right\} + M \left\{ \Delta_{\text{дон.адд}}^2(t) \right\} + M \left\{ \Delta_\rho^2(t) \right\}}{M \left\{ \Delta_{\text{дон.мульт}}^2(t) \right\} + M \left\{ \Delta_{\text{дон.адд}}^2(t) \right\}}. \quad (5.48)$$

Построим график функции полученного выражения (5.48) (рис. 5.23) при различных значениях параметра  $\mu_\varepsilon$ . При этом положим следующие значения параметров функции (5.48):  $a_1 = 10^{-2}$ ,  $a_2 = 10^{-2}$ ,  $\sigma_x = 0,4$ ,  $\sigma_\varepsilon = 10^{-2}$ ,  $\mu_x = 1$ ,  $\rho_{x\varepsilon} = 1$ .

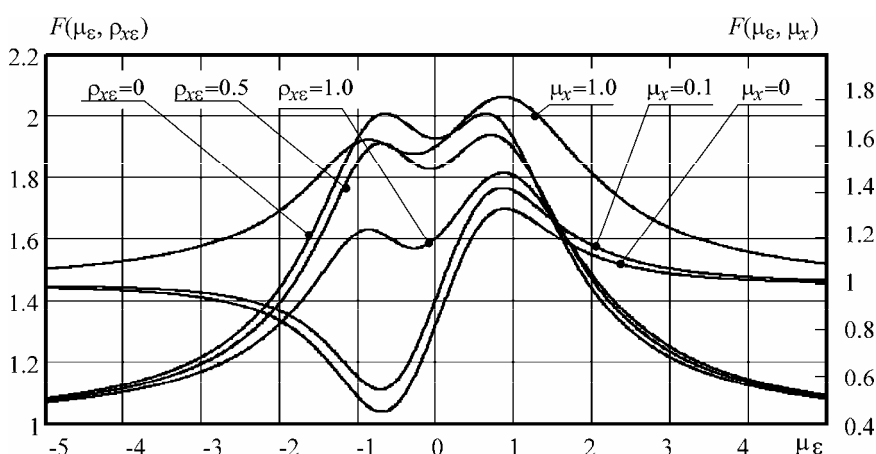


Рис. 5.23 График функции (5.48).

Как видно из графика (рис. 5.23) максимальное увеличение суммарной аддитивно-мультипликативной дополнительной погрешности, при учете корреляционной связи между составляющими погрешности может достигать порядка 124% при  $\mu_\varepsilon \approx 0$ , т.е. (как и в предыдущих случаях), когда МО влияющего воздействия равно значению, принятому при градуировке ИП. Такое увеличение суммарной погрешности за счет корреляционной составляющей является существенным, поэтому ее следует обязательно учитывать при расчетах аддитивно-мультипликативной дополнительной погрешности.

## ГЛАВА 6

### ПАРАМЕТРИЧЕСКАЯ ОПТИМИЗАЦИЯ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАТЕЛЕЙ. КОРРЕКЦИЯ ДИНАМИЧЕСКОЙ ПОГРЕШНОСТИ.

Анализ особенностей функционирования измерительных преобразователей в динамическом режиме показывает, что в ряде случаев имеет место взаимосвязь между различными составляющими суммарной погрешности измерений. В частности, при измерении микроконцентраций, т.е. при малом уровне входного измеряемого сигнала, в конечном результате измерения начинает доминировать случайная погрешность, обусловленная внутренними шумами измерительного преобразователя - случайная составляющая статической погрешности.

Снижение случайной составляющей статической погрешности традиционно решается методом накопления и усреднения результатов измерения, а для измерительных преобразователей непрерывного действия за счет увеличения постоянной времени измерительного прибора. Однако при этом возрастает динамическая погрешность, т.к. на интервале усреднения полностью теряется информация об изменении измеряемой величины во времени. Таким образом, случайную составляющую погрешности и динамическую погрешность, обусловленную инерционностью прибора, необходимо рассматривать как взаимосвязанные величины, так как уменьшение одной из них неизбежно приводит к увеличению другой.

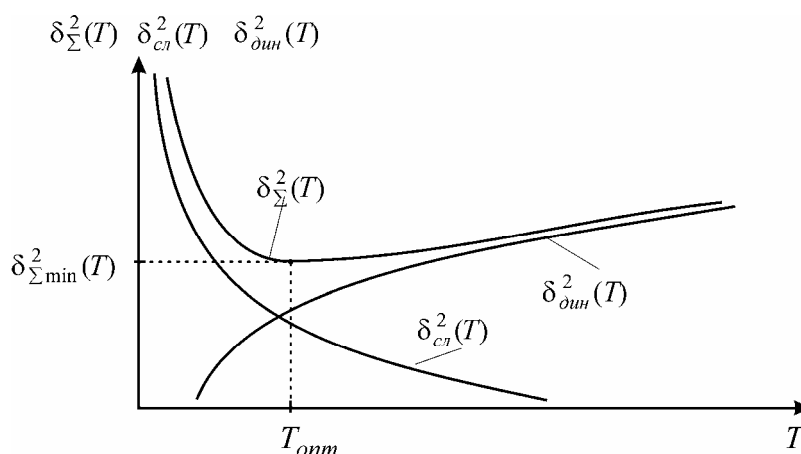


Рис.6.1 Типовая зависимость квадрата случайной составляющей статической погрешности -  $\delta_{сл}^2$ , квадрата динамической погрешности -  $\delta_{дин}^2$  и квадрата суммарной погрешности -  $\delta_{\Sigma}^2$  от постоянной времени измерительного преобразователя -  $T$ .

Представленные на рис. 6.1 типовые зависимости случайной составляющей статической погрешности и динамической погрешности измерительного преобразователя от постоянной времени прибора указывают на то, что существует такое значение параметра -  $T_{opt}$ , при котором суммарное значение квадрата погрешности будет иметь минимальное значение -  $\delta_{\Sigma opt}^2$ .

### 6.1 Случайная составляющая статической погрешности измерительного канала. Связь с параметрами ДХ измерительного преобразователя

Поскольку случайная составляющая статической погрешности определяется принципом работы ИП и его функциональной структурой, то не существует методов, позволяющих решать задачу её оценки в общем виде. Для каждого типа ИП (или варианта его структуры) эта задача решается индивидуально. Более того, при этом интересует вопрос связи случайной составляющей статической погрешности с параметром, характеризующим динамические свойства прибора.

Здесь приводятся результаты проведенных исследований случайной составляющей статической погрешности некоторых измерительных преобразователей, позволяющие получить количественную оценку.

Случайная составляющая статической погрешности радиоизотопного интенсиметра (рис. 6.2) обусловлена флуктуационным характером излучения источника. Величина относительной случайной погрешности ИП определяется выражением [41, 42]:

$$\delta_{сл} = \frac{1}{\sqrt{nT}}, \quad (6.1)$$

где  $n$  - количество импульсов в секунду на выходе регистрирующего устройства;  $T = RC$  - постоянная времени интегрирующей цепи (рис 6.2).

Параметр  $n$ , входящий в выражение (6.2), определяется мощностью источника ионизирующего излучения, которую желательно иметь как можно меньшей. Поэтому уменьшение случайной составляющей статической погрешности возможно только за счет увеличения параметра  $T$ . Увеличение значения посто-

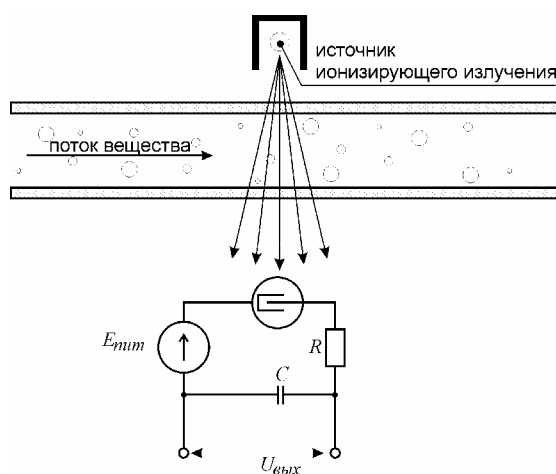


Рис. 6.2 Радиоизотопный интенсиметр

янной времени интегрирующей цепи  $T$ , как говорилось ранее, приводит к увеличению динамической погрешности.

Для общности результатов введем коэффициент  $K_1 = 1/\sqrt{n}$ . Тогда выражение для случайной составляющей статической погрешности радиоизотопного интенсиметра запишется в виде:

$$\delta_{сл} = f(K_1, T) = \frac{K_1}{\sqrt{T}}, \quad (6.3)$$

Как видно из выражения (6.3), случайная составляющая погрешность радиоизотопного интенсиметра зависит от параметра, определяющего также динамические характеристики ИП.

Рассмотрим следующий пример – поточный фотокolorиметр непрерывного действия. Среднеквадратичная случайная составляющая погрешности есть функция оптической плотности пробы, протекающей через измерительную кювету (рис.6.3) и определяется для одного из вариантов структуры фотокolorиметра [43] выражением вида:

$$\delta_{сл} = \frac{\delta_{\xi}}{P} \sqrt{\frac{0.434}{D}}, \quad (6.4)$$

где  $\delta_{\xi}$  - собственные шумы прибора;  $D$  - оптическая плотность;  $P$  - коэффициент пропускания.

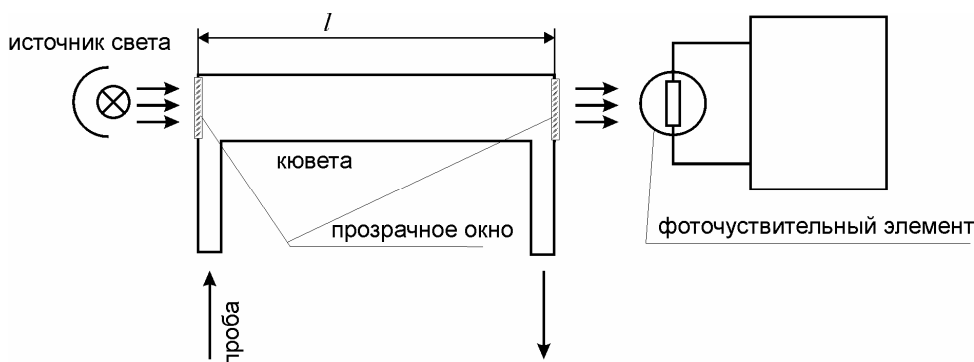


Рис. 6.3 Поточный фотокolorиметр непрерывного действия

Определим постоянную времени измерительной кюветы как:

$$T = \frac{lS}{V_{об}}, \quad (6.5)$$

где  $S$  – площадь поперечного сечения измерительной кюветы;  $V_{об}$  - объемная скорость прокачивания пробы;  $l$  – длина кюветы.

Тогда случайная составляющая статической погрешности фотоколориметра с учетом выражения (6.5) запишется в виде:

$$\delta_{cl} = f(K_2, \tau) = \frac{K_2}{T}, \quad (6.6)$$

где  $K_2 = \frac{\delta_{\xi} S}{V_{об}(l^{-1} - D)} \sqrt{\frac{0,434}{D}}$  - обобщенный параметр прибора.

Из выражения (6.6) видно, что в этом случае, как и случае радиоизотопного интенсиметра, случайная составляющая статической погрешности является функцией динамических параметров измерительного преобразователя.

Одной из основных случайных составляющих погрешности пьезосорбционного чувствительного элемента (ПСЧЭ) является нестабильность частоты колебаний автогенератора [44], которая характеризуется постоянной относительной нестабильности частоты [45]:

$$\theta = \frac{\Delta F}{F} = const, \quad (6.7)$$

где  $\Delta F$  - абсолютное изменение частоты автогенератора за счет нестабильности;  $F$  - собственная частота колебаний кварцевого резонатора.

Погрешность измерения за счет величины  $\theta$  определяется уравнением [46]:

$$\delta_n = \frac{\Delta F}{\Delta F_{H_2O}}, \quad (6.8)$$

где  $\Delta F_{H_2O}$  - изменение частоты колебаний кварцевого резонатора за счет приращения массы поглощаемой пленкой сорбента влаги.

Для вывода зависимости между случайной составляющей статической погрешности ПСЧЭ и его инерционностью заменим нелинейное уравнение статической характеристики на линейное [46]:

$$\Delta F_{H_2O} = k \Delta F_C \varphi, \quad (6.9)$$

где  $k$  - средняя чувствительность ПСЧЭ на участке от 0 до  $\varphi$ ;  $\varphi$  - относительная влажность измеряемого газа;  $\Delta F_C$  - изменение частоты колебаний кварца за счет нанесения пленки сорбента.

Подставляя (6.9) в (6.8) и с учетом того, что постоянная времени ПСЧЭ определяется выражением:

$$T = A \frac{\Delta F_c^2}{F^4}, \quad (6.10)$$

получим:

$$\delta_{cl} = \frac{\theta}{kF\varphi} \sqrt{\frac{A}{T}}, \quad (6.11)$$

где  $A = \frac{N^2 \rho_\kappa^2}{\pi^2 D \rho_c^2}$ ;  $\rho_\kappa$  - плотность кварца;  $\rho_c$  - плотность сорбента;  $N$  - частотный коэффициент кварцевого резонатора;  $D$  - коэффициент диффузии.

Входящий в состав выражений (6.10) и (6.11) параметр  $A$  определяет инерционные свойства сорбента. Для определенного типа сорбента и заданной технологии нанесения на пьезоэлемент параметр  $A$  является величиной постоянной и определяется на основе экспериментальных исследований [47]. Поэтому для определения постоянной времени  $T$  более удобно воспользоваться [48] выражением:

$$T = \frac{4l^2}{\pi^2 D},$$

где  $l$  - толщина пленки сорбента.

Тогда случайная составляющая статической погрешности ПСЧЭ запишется в виде:

$$\delta_{cl} = f(K_3, T) = \frac{K_3}{\sqrt{T}}, \quad (6.12)$$

где  $K_3 = (\theta \sqrt{A}) / (kF\varphi)$  - обобщенный параметр прибора.

Таким образом, полученное выражение (6.12) для случайной составляющей погрешности показывает, что она также является функцией динамического параметра измерительного преобразователя и её значение уменьшается с ростом инерционности.

Измерение влажности в области микроконцентраций кулонометрическим методом ограничено наличием фонового тока, определяемого неионными механизмами проводимости [49]. Величина фонового тока зависит от температуры, влажности анализируемого газа, наличия в нем микропримесей, загрязняющих сорбент, и других факторов.



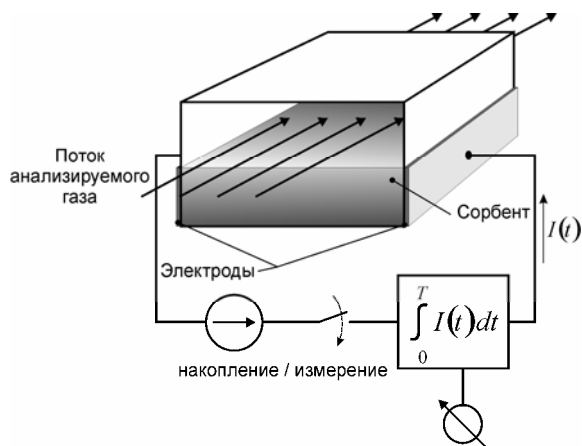


Рис. 6.4 Модель кулонометрической ячейки.

Анализ зависимости статической погрешности измерительного преобразователя из-за наличия фонового тока от длительности цикла работы показывает, что погрешность определяется отношением:

$$\delta_{ст} = \frac{Q_{\Phi}}{Q_{H_2O}},$$

где  $Q_{\Phi} = I_{\Phi} T_H$  количество электричества, зафиксированное интегратором за счет наличия фонового тока (рис. 6.4), а  $Q_{H_2O} = \frac{c_0 G T_H n F}{\mu}$  - количество

электричества необходимое для разложения накопленной в чувствительном элементе влаги, где  $c_0$  - концентрация влаги в анализируемом газе;  $G$  - расход анализируемого газа;  $T_H$  - время пропускания анализируемого газа через чувствительный элемент (время накопления);  $\mu$  - молекулярная масса воды;  $n$  - количество электронов, участвующих в разложении одной молекулы воды;  $F$  - число Фарадея. Следовательно:

$$\delta_{ст} = K_4 \frac{T_H}{T_H} = \frac{K_4}{\Omega}, \quad (6.13)$$

где  $\Omega = T_H / T_H$  - отношение времени накопления к времени измерения, а

$K_4 = \frac{\mu I_{\Phi}}{c_0 G n F}$  - коэффициент, зависящий от параметров измерительного преобразователя и фонового тока (обобщенный параметр прибора).

Таким образом, получено, как и в предыдущих случаях, зависимость случайной составляющей статической погрешности от параметров, характеризующих инерционность прибора, в данном случае времени накопления.

В общем случае, оптимизация параметров измерительных преобразователей является многокритериальной задачей поиска минимума целевой функции на ограниченном множестве варьируемых параметров. Критерии оптимизации, ограничения и целевая функция полностью определяются постановкой задачи и структурой исследуемого преобразователя.

## 6.2 Оптимизация параметров преобразователей

В случае, когда нелинейностью преобразования можно пренебречь и считать измерительный преобразователь линейной системой, используемый математический аппарат анализа линейных систем позволяет во многих случаях решить задачу оптимизации в достаточно простом виде. Рассмотрим ряд примеров. Наиболее просто задача решается для измерительных преобразователей, динамические свойства которых описываются передаточной функцией элементарного звена и, как правило, имеется возможность получения аналитической зависимости между параметрами преобразователя и функцией суммарной погрешности измерения.

Рассмотрим этот случай на примере фотокolorиметра. Пусть на входе преобразователя действует случайный процесс со спектральной плотностью вида (2.10), а передаточная функция самого преобразователя соответствует инерционному звену первого порядка. Тогда динамическая погрешность преобразования описывается выражением (4.6). Используя вариант суммирования для некоррелированных случайной и динамической составляющих погрешности:

$$\delta_{\Sigma}^2 = \delta_{дин}^2 + \delta_{сл}^2. \quad (6.14)$$

И учитывая то, что случайная составляющая статической погрешности фотокolorиметра определяется соотношением:

$$\delta_{сл} = f(K_2, T) = \frac{K_2}{T}, \quad (6.15)$$

где  $K$  - обобщенный параметр прибора, после подстановки (4.6) и (6.15) в (6.14) получим:

$$\delta_{\Sigma}^2(B, K_2) = \frac{B}{1+B} + \left( \frac{K'_2}{B} \right)^2. \quad (6.16)$$

где  $K'_2 = K_2 \alpha$ ,  $\alpha$  - параметр функции СПМ случайного процесса

На рис. 6.5 представлено семейство кривых функции (6.16) при различных значениях параметра  $K'_2$ .

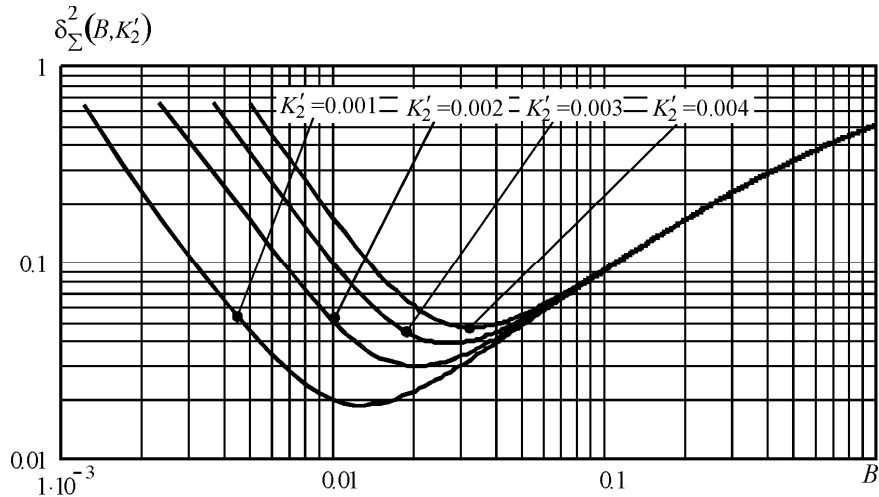


Рис 6.5 Семейство кривых функции квадрата суммарной погрешности (6.16) при различных значениях параметра  $K'_2$ .

Зафиксируем один из аргументов функции (6.16), приравняв соответствующую производную нулю. Решив полученное уравнение относительно искомого аргумента, получим значение оптимального параметра при заданном значении второго аргумента.

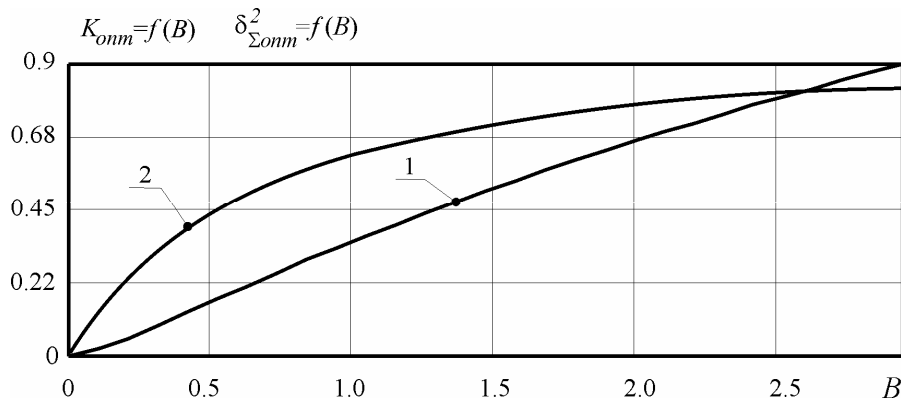


Рис 6.6. Графики функций:

1- зависимости оптимальных значений параметра  $K'_2$  от  $B$ ;

2- стационарных точек квадрата суммарной погрешности.

Тогда функция оптимальных значений параметра  $B$  при заданном значении  $K'_2$  будет иметь вид:

$$B_{opt}(K'_2) = \frac{\sqrt[3]{\left(\frac{4}{3}K_2'^4 + K_2'^2 + \frac{8}{27}K_2'^6 + \frac{1}{9}\sqrt{21K_2'^6 + 81K_2'^4}\right)^2 + \frac{4}{3}K_2'^2 + \frac{4}{9}K_2'^4}}{\sqrt[3]{\left(\frac{4}{3}K_2'^4 + K_2'^2 + \frac{8}{27}K_2'^6 + \frac{1}{9}\sqrt{21K_2'^6 + 81K_2'^4}\right)}} + \frac{2}{3}K_2'^2. \quad (6.17)$$

Функция оптимальных значений  $K'_2$  при заданном значении параметра  $B$  имеет вид (6.18) и представлена на рис. 6.6.:

$$K'_{2opt}(B) = \frac{\sqrt{2B^3}}{2(1+B)}. \quad (6.18)$$

Подставив (6.18) в (6.16), получим функцию, представляющую зависимость множество экстремальных точек суммарной погрешности от параметра  $B$  (рис. 6.7).

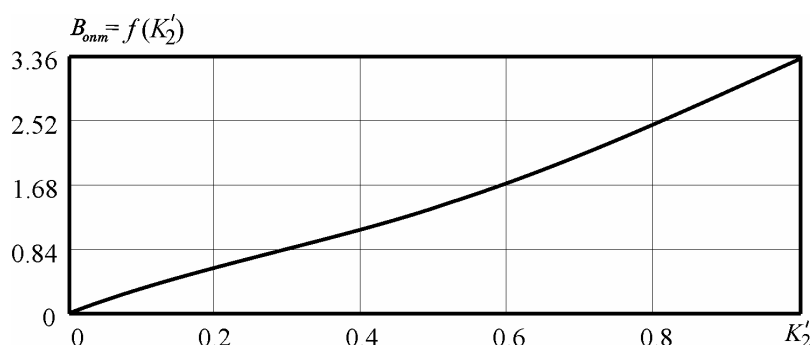


Рис 6.7. График функции оптимальных значений параметра  $B$  от  $K$

Полученные аналитические выражения (6.17), (6.18) позволяют проводить расчет оптимальных значений параметров измерительных преобразователей при одном из заданных значений параметров прибора ( $B$  или  $K$ ), а также определять эти параметры при заданных ограничениях на максимальную величину суммарной погрешности преобразования.

Рассмотрим еще один пример, характерный для измерительных преобразователей в виде звена чистого запаздывания. Если предположить, что на входе преобразователя, как и в предыдущем примере, действует случайный процесс со спектральной плотностью вида (2.10), то квадрат суммарной погрешности запишется следующим образом:

$$\delta_{\Sigma}^2(B, K) = (1 - e^{-B}) + \left(\frac{K}{B}\right)^2, \quad (6.19)$$

где  $K$  - некоторый обобщенный параметр ИП.

Семейство кривых функции (6.19) приведены на рис. 6.8. Выполнив ряд действий, по аналогии с предыдущим случаем, приведем здесь конечный результат. Оптимальное значение параметра  $K$  при заданном значении  $B$  будет определяться выражением:

$$K_{opt}(B) = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{B^3 e^{-B}}. \quad (6.20)$$

Подставляя (6.20) в (6.19), запишем функцию экстремальных значений квадрата суммарной погрешности:

$$\delta_{\Sigma opt}^2(B) = 1 - e^{-B}(1 - B) \quad (6.21)$$

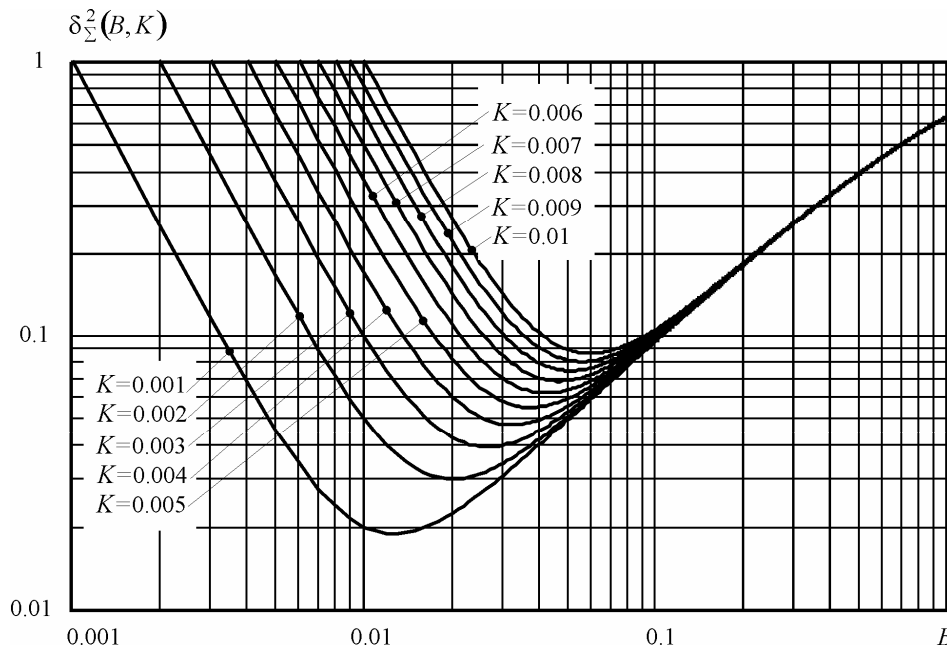


Рис. 6.8 Семейство кривых функции суммарной погрешности (6.19) при различных значениях параметра  $K$

Аналитическое выражение для функции оптимальных значений параметра  $K$  от  $B$  получить не представляется возможным, поэтому, результат подставлен в виде графика  $B_{opt} = f(K)$  на рис. 6.9., здесь, как и в предыдущем примере, представлены функции:  $\delta_{\Sigma opt}^2 = f(B)$  и  $K_{opt} = f(B)$ .

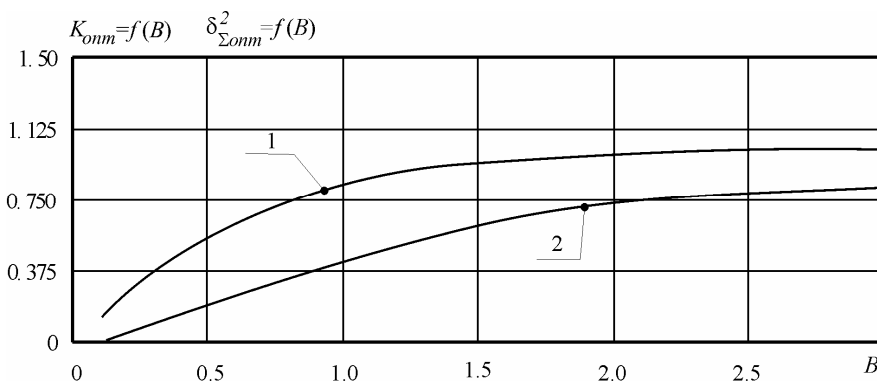


Рис 6.9. Графики функций:

1- зависимость оптимальных значений параметра  $K$  от  $B$ ;  
2- стационарных точек функции квадрата суммарной погрешности

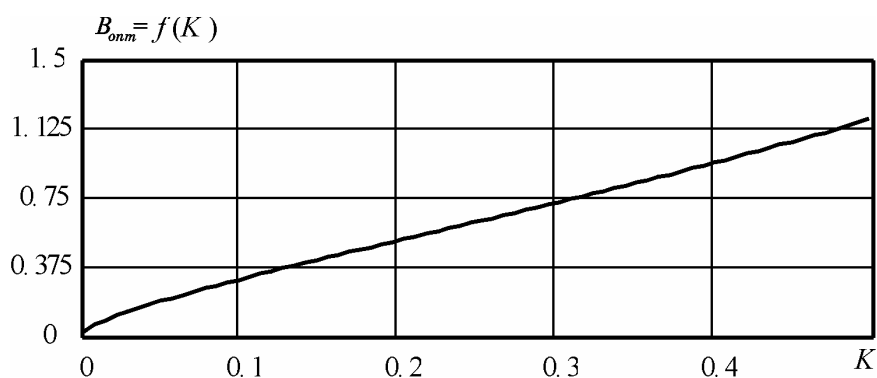


Рис. 6.10 График функции оптимальных значений параметра  $B$  от  $K$ .

По аналогии с предыдущими примерами, рассмотрим функцию квадрата суммарной погрешности сорбционного датчика влажности [50]:

$$\delta_{\Sigma}^2(T, K, \alpha) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left| 1 - \frac{2th\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{Tj\omega}\right)}{\pi\sqrt{Tj\omega}} \right|^2 S(\omega) d\omega + \frac{K}{T}. \quad (6.22)$$

Следует отметить, что в явном виде выполнить замену  $B = \alpha T$  в данном случае не представляется возможным, поэтому функция квадрата суммарной погрешности записана от трех аргументов. На графике семейства функций приведено по параметру  $B$ .

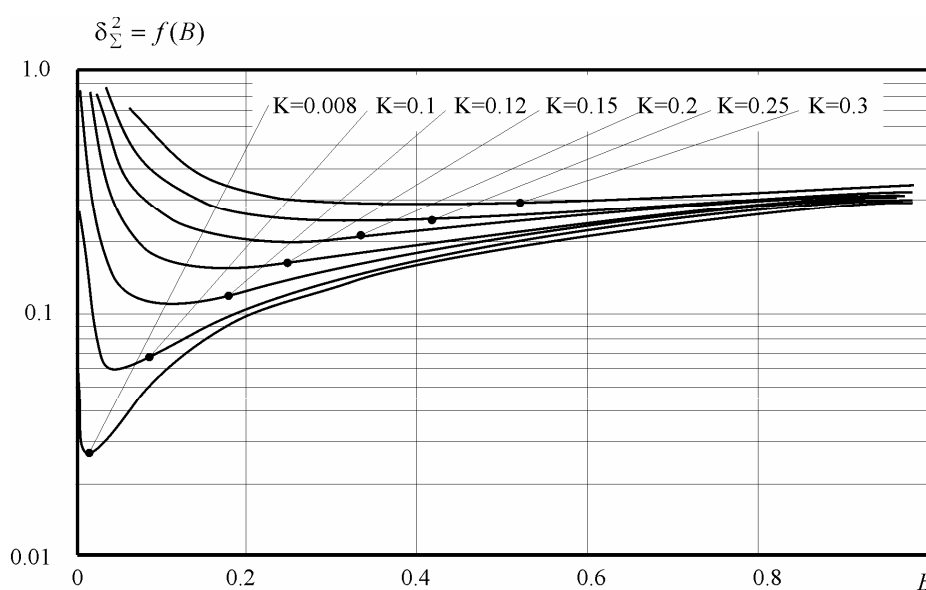


Рис. 6.11 Семейство кривых функции суммарной погрешности сорбционного датчика влажности при различных значениях параметра  $K$ .

Как видно из приведенного графика, функция квадрата суммарной погрешности (6.11) для сорбционного датчика влажности также имеет экстремум, соответствующий минимуму.

### 6.3 Вычисление допусков на аргументы функции суммарной погрешности

Дальнейшим развитием рассмотренного выше метода оптимизации параметров измерительного преобразователя является методика вычисления допусков на параметры ИП, основанная на критерии вероятности превышения квадрата суммарной погрешности  $\delta_{\Sigma}^2$  некоторой заданной величины  $\delta_{\Sigma \text{ зад}}^2$ . Предлагаемый подход, позволяет также определять допустимое значение дисперсии оценок параметров математической модели входного случайного процесса.

Кроме того, возможна также и обратная постановка задачи, когда при известной дисперсии оценки параметров математической модели входного случайного процесса (или при известном доверительном интервале оценки параметра входного случайного процесса), необходимо вычислить дисперсию оценки вычисленного значения квадрата суммарной погрешности (либо доверительного интервала при заданном уровне значимости).

Наиболее просто эта задача решается для случая, когда суммарная погрешность есть функция двух переменных, т.е.  $\delta_{\Sigma}^2 = f(B, K)$ .

Рассмотрим в качестве примера случай, когда функция суммарной погрешности имеет два аргумента. При этом рассматриваемый метод имеет наглядную графическую интерпретацию и основывается на диаграмме изолиний равной суммарной погрешности, построенных в области параметров  $B$  и  $K$ , получаемых на основе решения уравнения:

$$\delta_{\Sigma}^2(B, K) - \delta_{\Sigma \text{ зад}}^2 = 0, \quad (6.23)$$

где  $\delta_{\Sigma \text{ зад}}^2$  - заданное значение суммарной погрешности.

Решая уравнение (6.23) относительно  $K$  при различных значениях  $B$  для каждого из  $i$ , получаем искомые значения координат точек изолиний.

Воспользуемся функцией квадрата суммарной погрешности, соответствующей случаю радиоизотопного интенсиметра. Для входного случайного про-

цесса, имеющего спектральную плотность вида (2.10), функция суммарной погрешности будет:

$$\delta_{\Sigma}^2(B, K) = \frac{B}{1+B} + \frac{K^2}{B}. \quad (6.24)$$

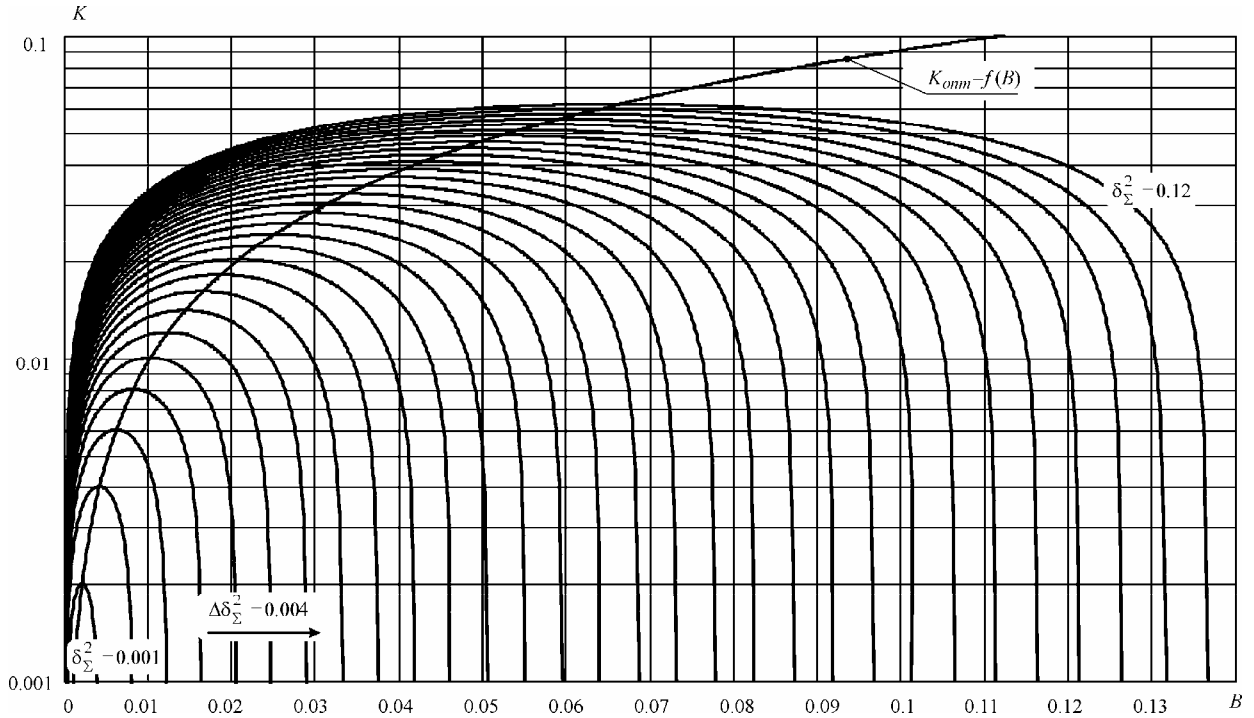


Рис. 6.12 Семейство изолиний равной погрешности

Решив уравнение (5.23) для случая (6.24) и ряда значений  $\delta_{\Sigma_{зад}}^2$ , получим искомые значения функций равной погрешности, представленные на рис. 6.12. Здесь же представлена функция оптимальных значений  $K$  от аргумента  $B$ :

$$K_{opt}(B) = \frac{B}{1+B}.$$

Наиболее простым случаем является вырожденная задача, когда при известных точечных оценках двух параметров необходимо найти третью неизвестную величину. Так, например, при заданных  $K$  и  $\delta_{\Sigma_{зад}}^2$  можно определить искомое значение  $B$ , при котором функция (6.24) не будет превосходить  $\delta_{\Sigma_{зад}}^2$  (точка  $A$  на рис. 6.13), либо интервал возможных значений  $B$ , внутри которого определенное выше условие  $\delta_{\Sigma}^2 \leq \delta_{\Sigma_{зад}}^2$  не будет нарушено (интервал  $DC$  на рис. 6.13).



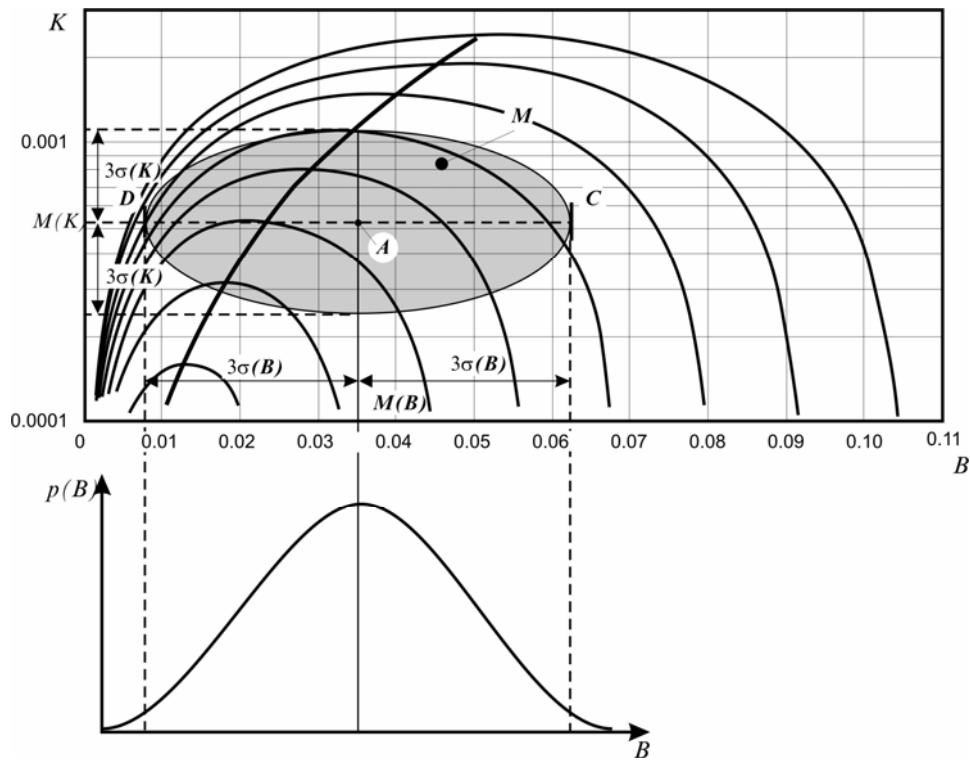


Рис. 6.13. Определение допусков по диаграмме изолиний равных погрешностей

В том случае, если оба аргумента функции (6.24) представлены в виде интервальных оценок, то можно говорить об области возможных значений функции квадрата суммарной погрешности, ограниченной эллипсом доверительной вероятности (заштрихованная область  $M$  на рис. 6.13).

#### 6.4 Коррекция динамической погрешности измерительных преобразователей

Известны способы уменьшения динамической погрешности путем включения в структуру измерительного преобразователя корректирующего динамического звена с передаточной функцией  $W_{кор}(j\omega)$ . При этом эффективность коррекции оценивается по переходным функциям [14]. При измерении стохастических сигналов более эффективным критерием качества коррекции является степень уменьшения дисперсии динамической погрешности.

Рассмотрим методику расчета динамической погрешности измерительного преобразователя стохастических сигналов с коррекцией. На рис. 6.14 представ-

лена структурная схема вычисления динамической погрешности измерительного преобразователя с корректирующим звеном.

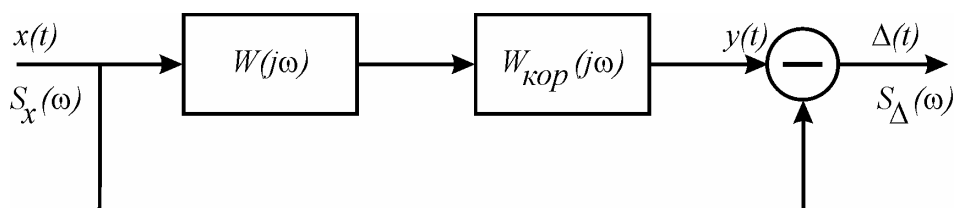


Рис. 6.14. Определение динамической погрешности для ИП к корректором.

Расчет квадрата динамической погрешности может быть выполнен по следующей формуле:

$$M \{ \delta_{\text{дин кор}}^2(t) \} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |1 - W(j\omega)W_{\text{кор}}(j\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega. \quad (6.25)$$

Погрешность, в граничном случае, может быть сведена к нулю при условии, что  $W_{\text{кор}}(j\omega) = 1/W(j\omega)$ . Однако, чаще всего, физическая реализация такого корректирующего звена невозможна. Поэтому задача заключается в отыскании физически реализуемой структуры, позволяющей минимизировать значение динамической погрешности определяемого выражением (6.25). Для критерия качества коррекции  $\chi$  примем следующим соотношение:

$$\chi = \frac{\delta_{\text{дин кор}}^2}{\delta_{\text{дин}}^2}, \quad (6.26)$$

где  $\delta_{\text{дин кор}}^2$ ,  $\delta_{\text{дин}}^2$  - квадрат динамической погрешности ИП с корректором и без корректора, соответственно.

Рассмотрим в качестве примера достаточно часто встречающийся в практике случай, когда измерительный преобразователь описывается инерционным звеном первого порядка и передаточная функция определяется соотношением

$$W(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T},$$

а входной сигнал имеет спектральную плотность мощности в соответствии с (2.10). В этом случае, квадрат относительной динамической погрешности будет определяться выражением (4.6).

В качестве корректора используем динамическое звено, схема замещения которого представлена на рис. 6.15. Здесь усилительное без инерционное звено

с коэффициентом усиления  $K_{yc} = 1/m$  предназначено для компенсации действия делителя напряжения с коэффициентом деления  $m = R_2/(R_1 + R_2)$  ( $0 < m < 1$ ).

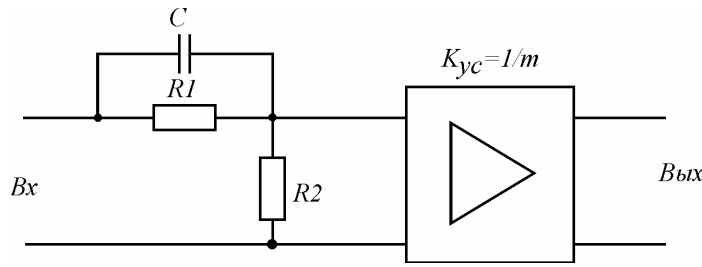


Рис 6.15. Схема корректирующего звена.

Передаточная функция для представленного корректора будет определяться соотношением (без учета усилительного звена):

$$W_{кор}(j\omega) = \frac{m(1 + j\omega T_{кор})}{1 + mj\omega T_{кор}},$$

где  $T_{кор} = R_1 C$  - постоянная времени корректирующего звена. Постоянная времени корректирующего звена выбирается равной постоянной времени измерительного преобразователя, т.е.  $T_{кор} = T$ . Передаточная функция системы  $W_c(j\omega)$  состоящей из измерительного преобразователя корректирующего звена и усилителя, в этом случае, будет иметь следующий вид:

$$W_c(j\omega) = W(j\omega)W_{кор}(j\omega)K_{yc} = \frac{1}{1 + j\omega m T}.$$

В результате получена функция передачи инерционного звена первого порядка с постоянной времени меньше исходной в  $1/m$  раз.

Квадрат динамической погрешности будет определяться выражением:

$$\delta_{дин кор}^2(B, m) = \frac{\Delta_{дин кор}^2(B, m)}{\sigma_x^2} = \frac{mB}{1 + mB}. \quad (6.27)$$

Применив введенный показатель качества коррекции (6.26) и воспользовавшись соотношениями (4.6) и (6.27), приходим к следующему выражению:

$$\chi(B, m) = \frac{m(1 + B)}{1 + mB}. \quad (6.28)$$

Вполне очевидно, что при бесконечно большом значении коэффициента усиления ( $m \rightarrow 0$ ) динамическая погрешность будет стремиться к нулю:

$$\lim_{m \rightarrow 0} \frac{mB}{1 + mB} \rightarrow 0$$

Таким образом, можно сколь угодно уменьшать динамическую погрешность, выбирая соответствующие значение параметра  $m$ . Однако, следует отметить, что эти результаты получены в предположении об идеальности усилителя в корректирующем устройстве. На практике увеличение значения  $K_{yc}$  ограничено рядом причин, таких как дрейф нуля, внутренние шумы первого каскада усиления, помехи на входе. Все это приводит к росту погрешности измерений, пропорционально коэффициенту усиления. Для реального ИП квадрат суммарной погрешность будет определяться следующим выражением (при соблюдении статистической независимости составляющих):

$$\delta_{\Sigma}^2(B, m, D) = \frac{mB}{1 + mB} + \frac{D^2}{m^2}, \quad (6.29)$$

где  $D^2 = \delta_{yc}^2 / \delta_x^2$  - отношение дисперсией шумов усилителя ( $\delta_{yc}^2$ ) приведенных ко входу усилительного звена и входного сигнала ИП ( $\delta_x^2$ ).

На основании полученного выражения и выражения (6.28) определим функцию качества коррекции:

$$\chi(B, m, D) = \frac{m(B+1)}{1 + mB} + \frac{D^2(B+1)}{m^2 B}. \quad (6.30)$$

Проведенный анализ полученного выражения показывает, что имеется некоторое оптимальное значение  $m_{opt}$  при котором суммарная погрешность имеет минимальное значение:

$$m_{opt}(B, D) = \frac{H(B, D)^{2/3} + 12D^2 B^2 + 4D^4 B^4 + 2D^2 B^2 + H(B, D)^{1/3}}{3BH(B, D)^{1/3}},$$

$$\text{где } H(B, D) = D^2 B^2 \left[ 36D^2 B^2 + 8D^4 B^4 + 3\sqrt{3} (8D^2 B^2 + 27)^{1/2} + 27 \right].$$

Результаты анализа погрешности ИП при наличии корректора и неидеального усилителя приведены на рис 6.17.

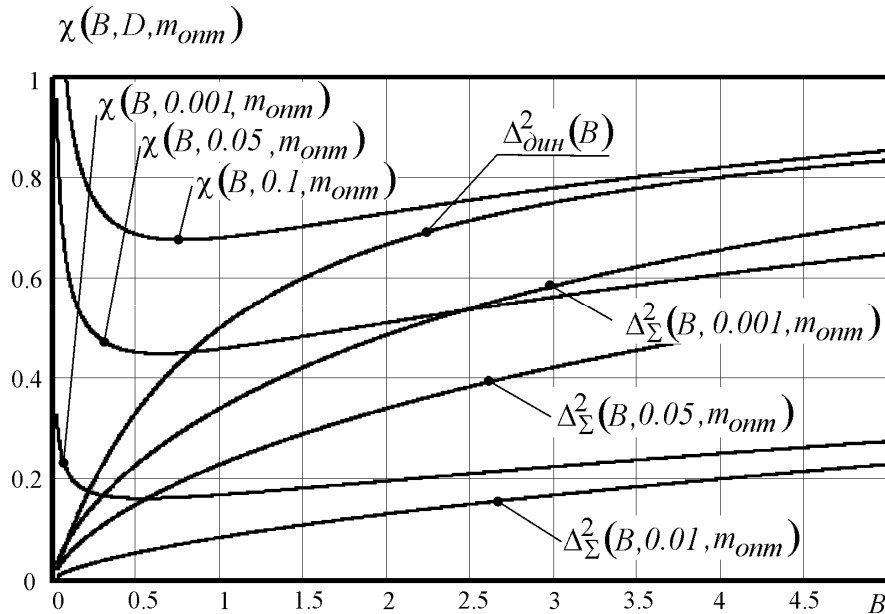


Рис. 6.17 Результаты анализа ИП с коррекцией динамической погрешности и неидеальным усилителем.

Кривая  $\Delta^2_{\Sigma}(B, D, m_{opt})$  соответствует минимально достижимой динамической погрешности при заданных условиях,  $\Delta^2_{дин}(B)$  соответствует динамической погрешности ИП без коррекции, здесь же приведена функция качества коррекции  $\chi(B, D, m_{opt})$  и функция оптимальных значений параметра  $m$ .

Приведенные данные свидетельствуют о возможности существенного уменьшения динамической погрешности путем введения в структуру ИП корректирующего звена.

### 6.5 Анализ работы неравноточных измерительных каналов в динамическом режиме

Одним из основных методов повышения точности измерений является многократное повторение замеров с последующей статистической обработкой полученных данных. При данном подходе, как известно, если соблюдаются соответствующие условия, случайная составляющая статической погрешности  $\delta_{сл}$  будет иметь меньшее значение в  $1/\sqrt{n}$  раз, где  $n$  - количество измерений [51].

Следует учесть, что в рабочем режиме АСУ ТП входные сигналы измерительных каналов изменяют свое значение во времени, т.е. измерения являются динамическими. Вполне очевидно, что в этом случае, применение методов мно-

гократных замеров является неприемлемым, а на практике для повышения точности используется так называемый принцип аппаратной избыточности [42], т.е. создаются параллельные каналы измерения (рис. 6.18).

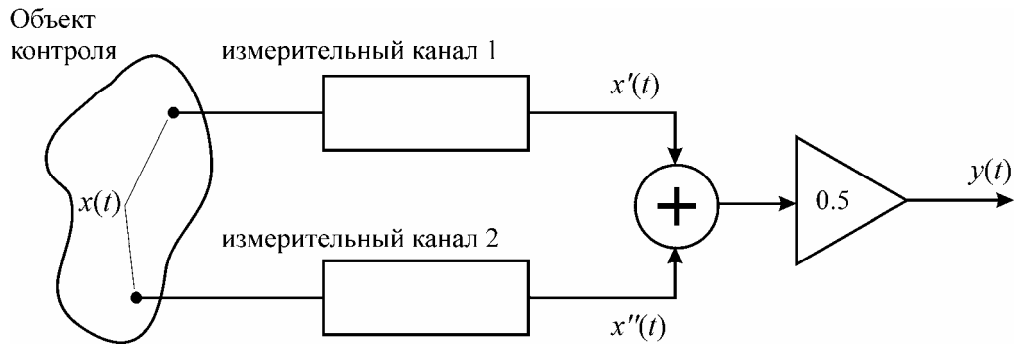


Рис.6.18 Структурная схема параллельных равноточных измерительных каналов

При работе в динамическом режиме возникает еще одна достаточно значимая составляющая погрешности – динамическая ( $\delta_{дин}$ ), обусловленная инерционностью первичного измерительного преобразователя. Как было показано в разделе 6.1, для большого класса ИП существует связь между случайной составляющей статической погрешности  $\delta_{сл}$  и динамической погрешностью  $\delta_{дин}$ .

В случае равноточных измерительных каналов (рис. 6.18) динамические погрешности каждого из них ( $\delta_{дин1}$ ,  $\delta_{дин2}$ ) будут иметь равное значение ( $\delta_{дин}$ ) и единичную корреляцию ( $\rho_{\delta_{дин1}\delta_{дин2}} = \rho_{\delta_{дин2}\delta_{дин1}} = 1$ ), а, следовательно, уменьшение суммарной ( $\delta_{дин\Sigma}$ ) динамической погрешности не будет:

$$\delta_{дин\Sigma} = \sqrt{\frac{\delta_{дин1}^2 + \delta_{дин2}^2 + 2\rho_{\delta_{дин1}\delta_{дин2}}\delta_{дин1}\delta_{дин2}}{2}} = \frac{\delta_{дин1} + \delta_{дин2}}{2} \Big|_{\delta_{дин1}=\delta_{дин2}} = \delta_{дин}.$$

Для случайной составляющей статической погрешности, в силу их независимости, уменьшение составит  $1/\sqrt{2}$ .

Полученный результат достаточно очевиден и большого интереса не представляет, поскольку не дает ощутимого выигрыша по точности, а на практике имеет достаточно высокую стоимость реализации.

Рассмотрим работу неравноточных измерительных каналов в составе АСУ ТП. В нашем случае под неравноточными каналами подразумеваются каналы, в состав которых входят ИП с различными по величине параметрами передаточных функций ИП. Для реализации неравноточных измерений преобразуем структурную схему (рис. 6.19).

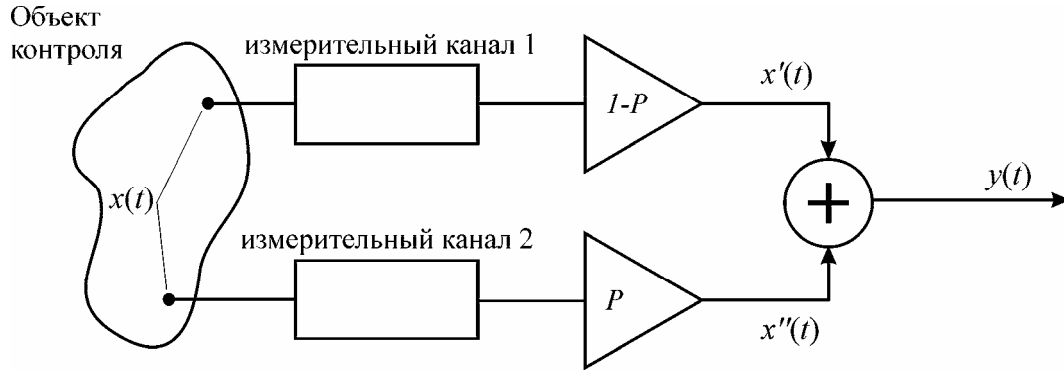


Рис.6.19 Структурная схема параллельных неравноточных измерительных каналов

В качестве входного воздействия будем рассматривать стационарный случайный процесс с известной функцией спектральной плотности мощности  $S_x(\omega)$ .

Квадрат динамической погрешности одного измерительного канала определяется на основе выражения (функция СПМ нормированная):

$$\delta_{дин1,2}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |1 - W_{1,2}(j\omega)|^2 S_x(\omega) d\omega, \quad (6.31)$$

где  $W_{1,2}(j\omega)$  - передаточная функция ИП измерительного канала 1, 2.

Для случая, когда динамика ИП может быть описана передаточной функцией вида:

$$W_{1,2}(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T_{1,2}}, \quad (6.32)$$

а функция спектральной плотности мощности входного сигнала  $x(t)$ :

$$S_x(\omega) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}, \quad (6.33)$$

квадрат динамической погрешности одного из каналов может быть описан на основе выражения (4.6):

$$\delta_{дин1,2}^2 = \frac{B_{1,2}}{1 + B_{1,2}},$$

где  $B_{1,2} = \alpha T_{1,2}$  - безразмерный коэффициент.

Квадрат суммарной погрешности (случайной составляющей статической погрешности и динамической погрешности) измерительного канала может быть определен как:

$$\delta_{\Sigma 1,2}^2 = \frac{B_{1,2}}{1+B_{1,2}} + \frac{K_{1,2}}{B_{1,2}},$$

где  $K_{1,2}$  - параметр ИП определяемый его конструкцией и принципом действия.

Передаточная функция схемы измерения изображенной на рис.6.19, при условии, что каждый канал имеет ИП с передаточной функцией вида (6.32), может быть записана в виде:

$$W(j\omega) = \frac{1-P}{1+j\omega T_1} + \frac{P}{1+j\omega T_2},$$

где  $T_1$  и  $T_2$  - параметры передаточной функции ИП соответственно первого и второго измерительного канала. Обозначим  $\lambda = T_2/T_1$  и при условии, что функция спектральной плотности мощности входного сигнала соответствует (6.33) на основании (6.31) запишем:

$$\Delta_{\text{дин}\Sigma}^2 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left| 1 - \left( \frac{P}{1+j\omega T_1} + \frac{1-P}{1+j\omega T_1 \lambda} \right) \right|^2 \frac{2\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} d\omega,$$

и выполнив несложные преобразования, получаем аналитическое выражение квадрата динамической погрешности для неравноточных каналов:

$$\delta_{\text{дин}\Sigma}^2(B, K, \lambda) = \frac{B(B\lambda^2 + B\lambda + \lambda^2 + 2P\lambda + P^2 - 2P\lambda^2 + \lambda - 2P^2\lambda + P^2\lambda^2)}{(B+1)(B\lambda^2 + B\lambda + \lambda + 1)}.$$

Для квадрата случайной составляющей статической погрешности с учетом структуры неравноточных измерительных каналов представленной на рис. 6.19 запишем соотношение:

$$\delta_{\text{сл}}^2(B, K, \lambda) = \left( \frac{KP}{B} \right)^2 + \left( \frac{K(1-P)}{B\lambda} \right)^2.$$

На рис. 6.20 показано семейство функций суммарной погрешности:

$$\delta_{\Sigma}^2(B, P, \lambda) = \delta_{\text{дин}}^2(B, P, \lambda) + \delta_{\text{сл}}^2(B, P, \lambda) \quad (6.34)$$

при  $\lambda=10$  и при различных значениях параметра  $P$ .



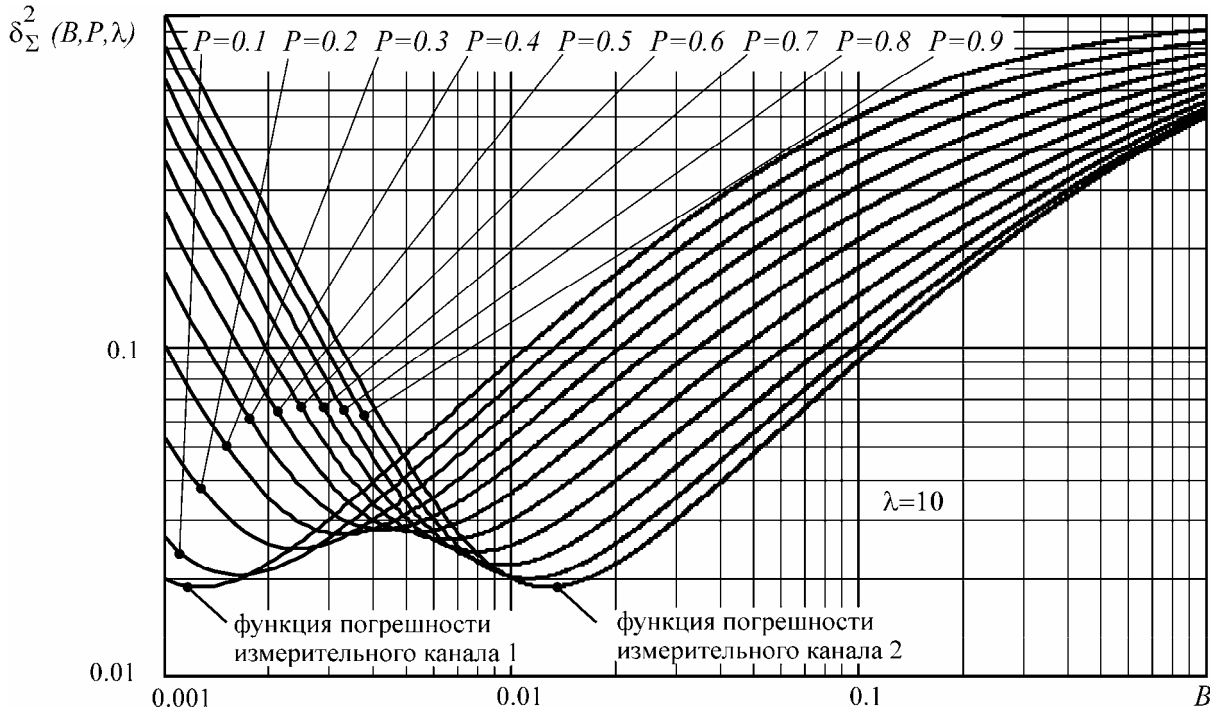


Рис. 6.20 Семейство функций квадрата суммарной погрешности неравноточных каналов.

Из приведенного графика (рис. 6.20) видно, что, изменяя параметр  $P$  в измерительных каналах (рис. 6.19) можно изменять положение точки минимума квадрата суммарной погрешности по переменной  $B$ , тем самым подстраивать измерительную систему под параметры входного процесса (по критерию минимума погрешности).

Для отыскания оптимального значения параметра  $P$  решим уравнение:

$$\frac{\partial \delta_{\Sigma}^2(B, P, \lambda)}{\partial P} = 0$$

относительно  $P$ , получим функцию оптимальных значений параметра (рис. 6.21):

$$P_{opt} = f(B, \lambda). \quad (6.35)$$

Подставив (6.35) в соотношение (6.34) получим функцию минимально достижимых значений погрешности:

$$\delta_{\Sigma}^2(B, \lambda) = \delta_{оин}^2(B, P, \lambda) \Big|_{P=P_{opt}(B, P, \lambda)} + \delta_{сл}^2(B, P, \lambda) \Big|_{P=P_{opt}(B, P, \lambda)}. \quad (6.36)$$

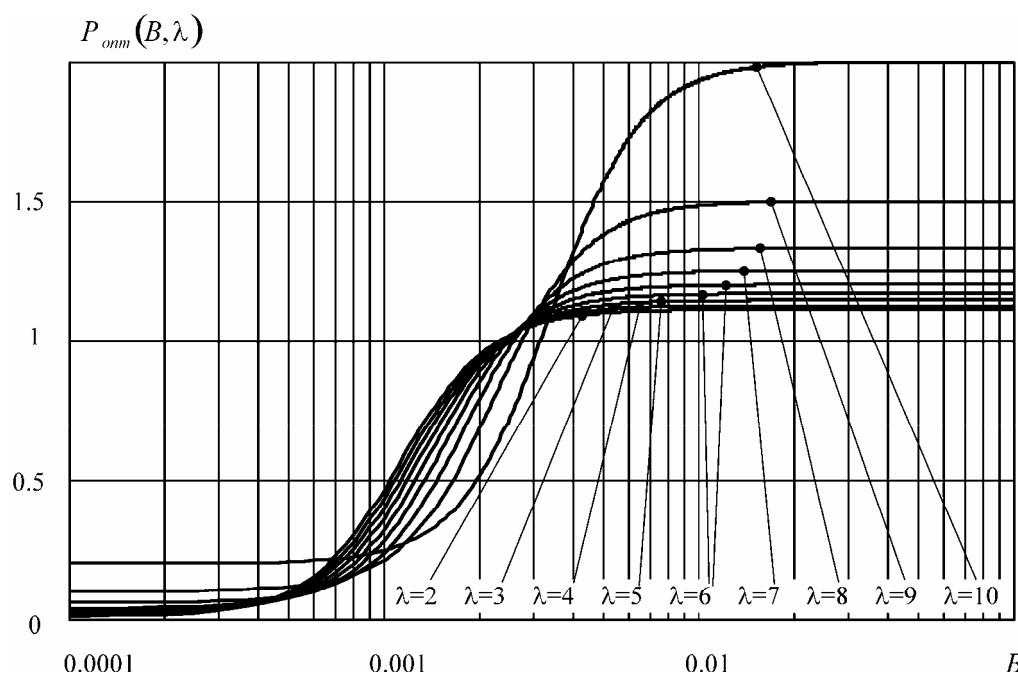


Рис. 6.21 Функция оптимальных значений параметра  $P$  при различных значениях  $\lambda$ .

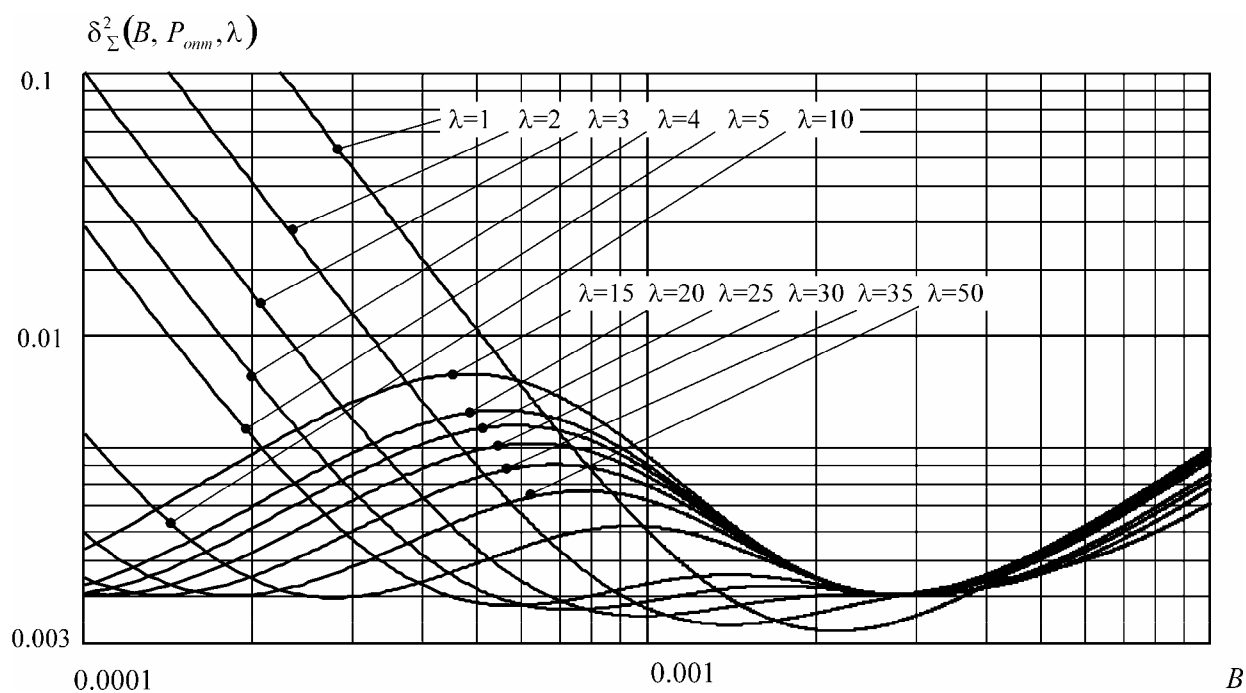


Рис. 6.22 Функция минимальных значений квадрата суммарной погрешности (6.36) при различных значениях  $\lambda$ .

Для анализа получаемого снижения погрешности проведем сравнение полученного результата с двумя случаями.

Случай А – равноточные каналы. Для реализации этого режима работы системы (рис. 6.19) необходимо положить в выражении (6.34):  $\lambda=1$ ,  $P=0.5$ , параметры передаточной функции (6.32)  $T_1=T_2=T_1\lambda/2$ :

$$\delta_{A\Sigma}^2(B) = \delta_{\text{дин}}^2(B, P, \lambda) \Big|_{\substack{P=0.5 \\ \lambda=1}} + \delta_{\text{сл}}^2(B, P, \lambda) \Big|_{\substack{P=0.5 \\ \lambda=1}}.$$

Случай Б – неравноточные каналы с коэффициентом  $P = \text{const}$ . В этом случае выражение (6.34) запишем в следующем виде:

$$\delta_{B\Sigma}^2(B) = \delta_{\text{дин}}^2(B, P, \lambda) \Big|_{\substack{P=0.5 \\ \lambda=10}} + \delta_{\text{сл}}^2(B, P, \lambda) \Big|_{\substack{P=0.5 \\ \lambda=10}}.$$

Для численной оценки введем в рассмотрение коэффициент уменьшения погрешности:

$$\Theta_{A,B}(B, P, \lambda) = \frac{\delta_{\Sigma}^2(B, P, \lambda)}{\delta_{A,B\Sigma}^2(B)}. \quad (6.37)$$

На рис. 6.23 и рис. 6.24 приведены графики функции (6.37) для случая А и Б соответственно. Как видно из графика, приведенного на рис. 6.23, для случая А в диапазоне значений параметра  $B$  от  $5 \cdot 10^{-3}$  до  $5 \cdot 10^{-2}$  неравноточные каналы не могут обеспечить уменьшение погрешности (здесь  $\Theta_A(B, P, \lambda) > 1$ ), но при значении  $B > 5 \cdot 10^{-2}$  может быть достигнуто уменьшение квадрата погрешности более чем в 2 раза ( $\Theta_A(B, P, \lambda) < 1$ ).

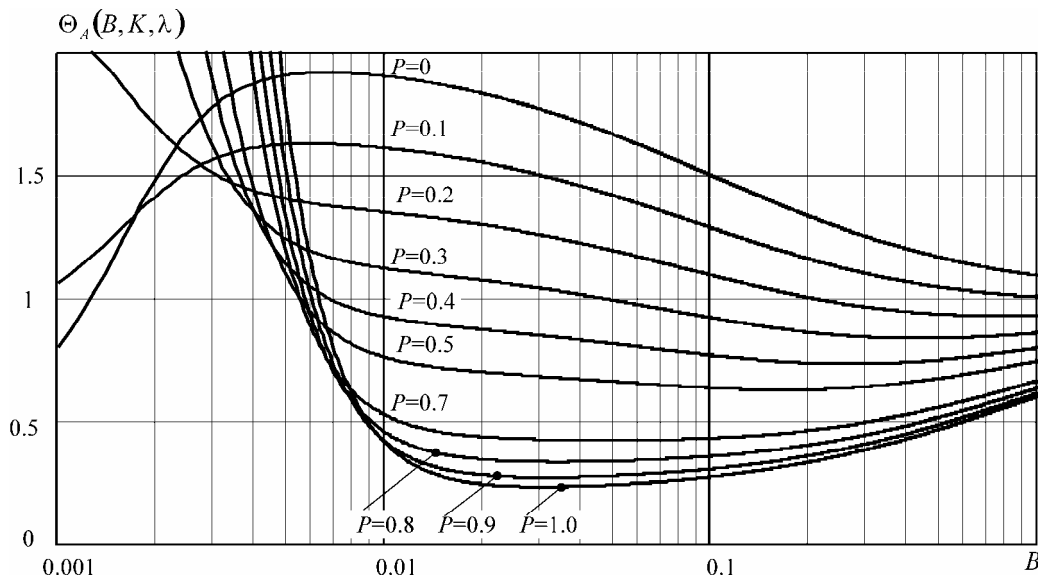


Рис. 6 Семейство функций (6.37) для случая А.

Для случая Б (рис. 6.24) уменьшение квадрата погрешности имеется на всем диапазоне параметра  $B$  ( $\Theta_B(B, P, \lambda) < 1$ ) за исключение только одной точки при  $B = 5 \cdot 10^{-3}$  где  $\Theta_B(B, P, \lambda) = 1$ .

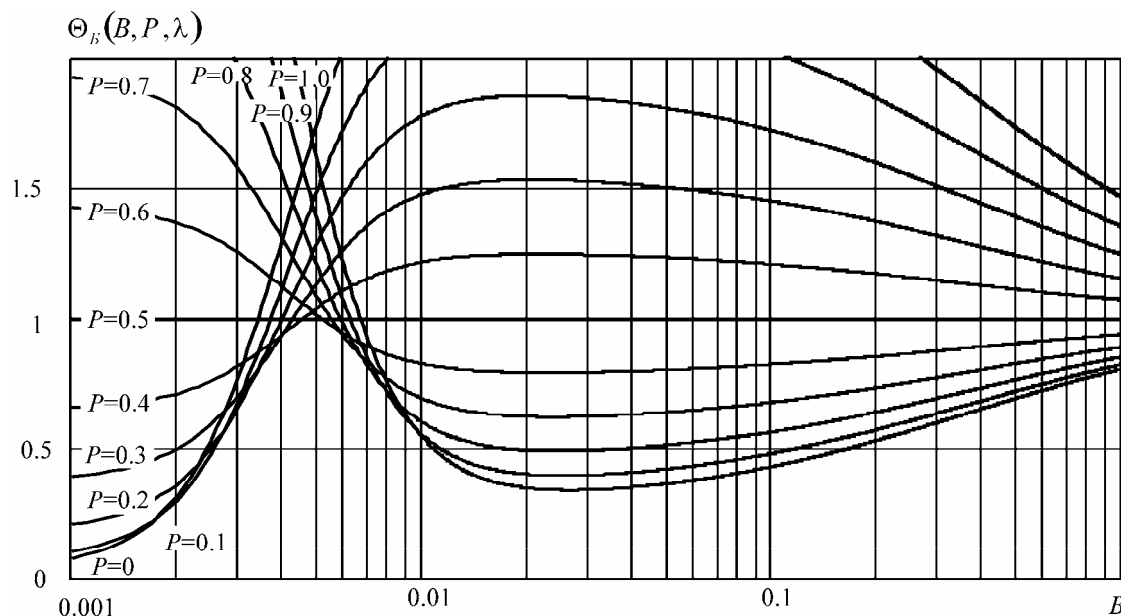


Рис. 6.24 Семейство функций (6.37) для случая Б.

Проведенный анализ неравноточных измерительных каналов организованных по предположенной схеме (рис. 6.19) показывает, что их применение в ряде случаев оказывается более эффективной, чем применение равноточных каналов. Возможность настройки параметров системы, как было показано в рассматриваемом примере, позволяет снизить квадрат погрешности более чем в два раза. Кроме того, несомненным преимуществом предложенного подхода является возможность управления динамическими характеристиками измерительной системы без изменения параметров ИП.

## ГЛАВА 7

### ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СТОХАСТИЧЕСКИХ ВХОДНЫХ ВОЗДЕЙСТВИЙ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ КАНАЛОВ

#### 7.1 Постановка задачи моделирования случайных процессов

При имитационном моделировании ИП одной из важнейших задач является моделирование входных воздействий в виде случайных процессов с заданными характеристиками. Существующие методы формирования случайных процессов, с заданными АКФ и одномерным законом распределения вероятностей (ОЗРВ), делятся на две основные группы (рис. 7.1) – методы формирования только гауссовских случайных процессов и методы формирования процессов с другими ОЗРВ (в том числе и гауссовскими).

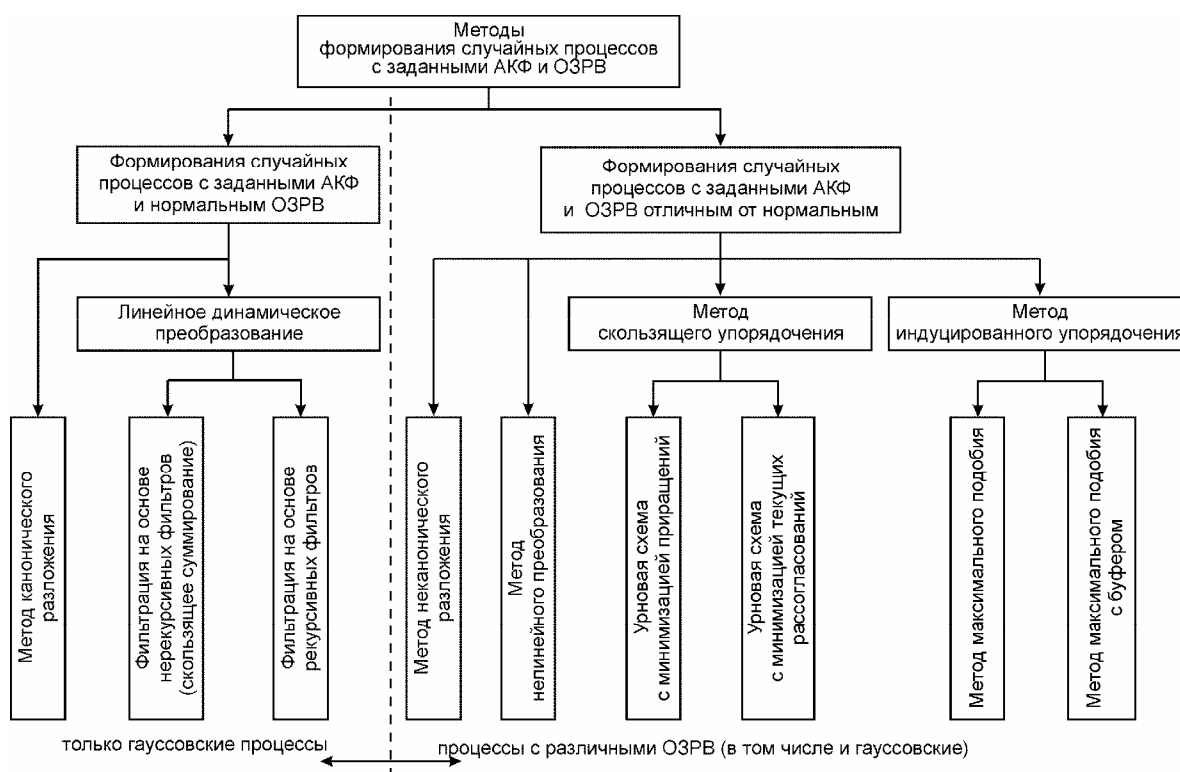


Рис. 7.1 Классификация методов формирования случайных процессов

Основной идеей методов входящих в первую группу (за исключением канонического разложения) является инвариантность гауссовского случайного процесса относительно линейного динамического преобразования [52]. То есть, если на входе линейного динамического преобразователя действует гауссовский белый шум, то на его выходе так же будет гауссовский случайный процесс, АКФ

которого полностью определяется передаточной функции преобразователя. Таким образом, для решения поставленной задачи необходимо осуществить переход от функции спектральной плотности или АКФ к передаточной функции линейного динамического преобразователя.

Метод канонического разложения основан на представлении случайного процесса в виде бесконечного ряда детерминированных функций [53].

Методы, применяемые при формировании случайных процессов с ОЗРВ, отличным от нормального, можно условно подразделить на три подгруппы.

Процесс формирования случайного процесса методами скользящего упорядочения и индуцированного упорядочивания можно представить структуры изображенной на рис. 7.2. Отличие этих методов заключается в способе реализации формирователя АКФ.



Рис. 7.2 Структура формирователя случайного процесса с заданными АКФ и ОЗРВ

Датчик случайных чисел (ДСЧ на рис. 7.19) формирует последовательность случайных чисел, имеющую равномерный ОЗРВ и АКФ в виде  $\delta$ -функции (процесс типа «белый шум»). Далее с помощью нелинейного преобразования ОЗРВ приводится к заданному виду. Конечным этапом является формирование заданной АКФ без нарушения ОЗРВ. Одним из методов решения этой задачи является перестановка элементов в исходной реализации случайного процесса.

В методе скользящего упорядочения для этой цели применяется урновое устройство, т.е. из буфера конечной длины, куда помещена часть значений исходного процесса, извлекается компонента, отвечающая некоторому критерию упорядочения. Извлечённое значение принимается в качестве очередного значения результирующего процесса, а на его место помещается следующее значение исходного процесса.

В последнюю подгруппу входит метод прямого нелинейного преобразования, структурная схема которого представлена на рис 7.3.

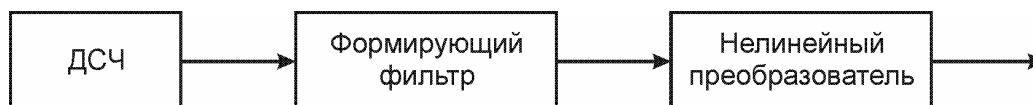


Рис. 7.3 Вариант структура формирователя случайного процесса с заданными АКФ и ОЗРВ

Известно, что всегда существует некоторое нелинейное безинерционное преобразование [54] позволяющее получить из гауссовского случайного процесса случайный процесс с любым требуемым ОЗРВ. При этом если исходный процесс имеет автокорреляционную функцию  $R(\tau)$ , то преобразованный процесс будет иметь АКФ  $R_o(\tau)$  связанную с  $R(\tau)$ , некоторой зависимостью:

$$R(\tau) = \varphi(R_o(\tau)),$$

где  $\varphi(\cdot)$  – некоторая функция, вид которой, определяется конкретным видом нелинейного преобразования.

Очевидно, что, разрешив указанное уравнение относительно  $R_o(\tau)$  можно определить АКФ исходного процесса, для которой, после преобразования будет получаться требуемая АКФ результирующего процесса.

Метод неканонического разложения применим для формирования случайных процессов имеющих как нормальный так и отличный от нормального ОЗРВ.

Наиболее удобным методом, при моделировании каналов ИИС, является разработанный автором метод формирования реализаций случайных процессов с заданной АКФ и одномерным законом распределения, имеющий незначительные затраты машинного времени и не накладывающий строгих ограничений на вид закона распределения и АКФ.

## 7.2 Датчики случайных чисел

Одной из основных частей систем имитационного моделирования являются генераторы случайных чисел, называемые так же датчиками случайных чисел (ДСЧ) [55]. Назначением ДСЧ является генерация последовательности случайных чисел имеющих равномерный закон распределения и спектральную плотность мощности типа «белый шум».

Качество работы ДСЧ оценивается по ряду критериев [56], таких как стабильность статистических параметров и характеристик, отсутствие корреляционной связи между значениями и т.д. Очевидно, что эти параметры определяются способом реализации ДСЧ. В настоящее время существует два основных метода построения ДСЧ – алгоритмический (программный) и физический (аппаратный). Ряд авторов выделяет третий метод – табличный. Однако суть этого метода заключается в воспроизведении значений полученных одним из двух вышеуказанных методов.

В основе практически всех используемых в настоящее время алгоритмических ДСЧ лежит линейный конгруэнтный генератор [57].

$$\xi_{n+1} = (a\xi_n + c) \bmod m \text{ для } n=0, 1, 2, \dots, \quad (7.1)$$

где  $\xi_0$  – начальное значение ( $\xi_0 \geq 0$ ),  $a$  – множитель (мультипликатор) ( $a \geq 0$ ),  $c$  – приращение (инкремент) ( $c \geq 0$ ),  $m$  – модуль ( $m > \xi_0, m > a, m > c$ ), операция  $\bmod$  – деление по модулю.

Правильный выбор значений параметров  $a$ ,  $b$  и  $m$  в (7.1) обеспечивает качество работы ДСЧ.

Алгоритм конгруэнтного инверсного ДСЧ [58] достаточно прост и похож на алгоритм линейного конгруэнтного ДСЧ (1):  $\xi_n$  равномерно распределенные на отрезке  $[0, 1]$  получают нормированием целых чисел задаваемых рекуррентным соотношением:

$$\xi_{n+1} = (a \cdot \overline{\xi_n} + c) \bmod m \text{ для } n=0, 1, 2, \dots \quad (7.2)$$

где  $\overline{\xi_n}$  – результат битовой инверсии числа  $\xi_n$ .

Квадратичный конгруэнтный генератор определяется рекуррентным соотношением:

$$\xi_{n+1} = (a \cdot \xi_n^2 + b \cdot \xi_n + c) \bmod m \text{ для } n=0, 1, 2, \dots \quad (7.3)$$

Из формулы (7.3) видно, что в том случае если  $a=0$ , квадратичный конгруэнтный генератор преобразуется в простой линейный конгруэнтный ДСЧ (7.1).

Квадратичный конгруэнтный инверсный генератор определяется рекуррентным соотношением:

$$\xi_{n+1} = (a \cdot \overline{\xi_n^2} + b \cdot \overline{\xi_n} + c) \bmod m \text{ для } n=0, 1, 2, \dots \quad (7.4)$$

Из формулы (7.4) видно, что в том случае если  $a=0$ , квадратичный конгруэнтный инверсный генератор преобразуется в линейный конгруэнтный инверсный генератор. Максимальный период генераторов, при соответствующем выборе коэффициентов  $a$ ,  $b$  и  $c$  определяется величиной параметра  $m$ .





На рис. 7.4 использованы следующие обозначения:  $\nu = \varphi - M\{\varphi\}$ ,  $\varphi: N \geq (a, 1)$ ,  $\xi \in [0; 1]$ ,  $\eta \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ . Величины (рис 7.4)  $\nu_1, \nu_2$ ;  $\xi_1, \xi_2$ ;  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n$  независимые

#### 7.4 Метод формирования гауссовских случайных процессов с заданной функцией автокорреляции.

Основным методом формирования гауссовских случайных процессов является линейное динамическое преобразование случайного процесса типа «белый шум». В соответствии с соотношением:

$$S_y(\omega) = |W(j\omega)|^2 S_x(\omega),$$

функция спектральной плотности на выходе линейного динамического звена  $S_y(\omega)$  полностью определяется квадратом модуля его передаточной функции, при условии, что входной случайный процесс имеет спектральную плотность  $S_x(\omega)$  типа «белым шумом».

Передаточные функции формирующих фильтров для ряда функций автокорреляции приведены в приложении 6.

При прохождении случайного процесса через динамическое звено так же изменяется его дисперсия, для вычисления нормирующего множителя, можно воспользоваться соотношением:

$$k = \sqrt{\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} |F(j\omega)|^2 d\omega}.$$

Для ряда формирующих фильтров расчетная формула приведена в таблице приложения 6, при этом предполагается, что дисперсия входного случайного процесса равна единице.

#### 7.5 Метод формирования систем гауссовских случайных процессов с заданным коэффициентом взаимной корреляции

*Формирование коррелированных случайных процессов на основе суммирования.* В том случае, когда требуется сформировать два случайных процесса с заданным коэффициентом корреляции и не накладывается дополнительных требо-

ваний на вид ОЗРВ, АКФ и ВКФ то более приемлемым является простой метод формирования, предложенный автором, требующий значительно меньших вычислительных затрат. В основу метода положена схема формирования, приведенная на рис. 7.5.

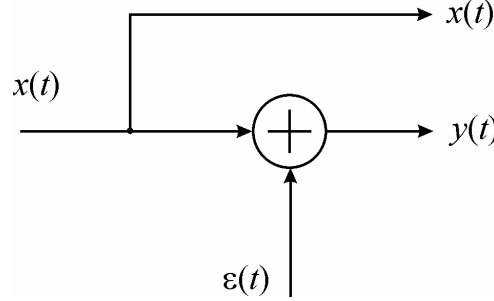


Рис. 7.5 Схема формирования коррелированных процессов

Взаимная корреляционная функция случайных процессов  $x(t)$  и  $y(t)$  определяется соотношением:

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{1}{\sqrt{\sigma_x^2 \sigma_y^2}} \int_0^\infty x(t)y(t+\tau)dt.$$

В силу того, что  $\rho_{x\varepsilon} = 0$ , то  $\sigma_y^2 = \sigma_x^2 + \sigma_\varepsilon^2$ , тогда можно записать:

$$\begin{aligned} \rho_{xy}(\tau) &= \frac{1}{\sqrt{\sigma_x^2 (\sigma_x^2 + \sigma_\varepsilon^2)}} \int_0^\infty x(t) [x(t+\tau) + \varepsilon(t+\tau)] dt = \\ &= \frac{1}{\sigma_x^2 \sqrt{1 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_x^2}}} \left[ \int_0^\infty x(t)x(t+\tau) dt + \int_0^\infty x(t)\varepsilon(t+\tau) dt \right]. \end{aligned}$$

Выполнив необходимые преобразования, приходим к следующему выражению:

$$\rho_{xy}(\tau) = \frac{\rho_{xx}(\tau)}{\sigma_x^2 \sqrt{1 + \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_x^2}}}, \text{ и при } \tau = 0 \text{ получаем } \rho_{xy} = \frac{\sigma_x^2}{\sqrt{1 + \sigma_\varepsilon^2 \sigma_x^2}}.$$

Положим, что  $\sigma_x^2 = 1$  а  $\sigma_\varepsilon^2 / \sigma_x^2 = n$ , тогда полученное выше выражение можно записать в следующем виде:

$$\rho_{xy} = \frac{1}{\sqrt{1+n}}.$$

Преобразованную схему формирования как показано на рис. 7.6

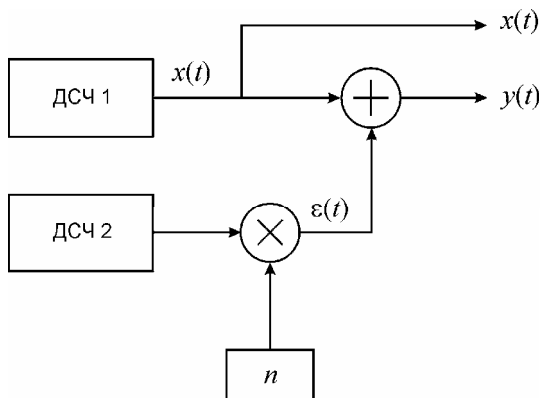


Рис. 7.6 Преобразованная схема формирования коррелированных случайных процессов

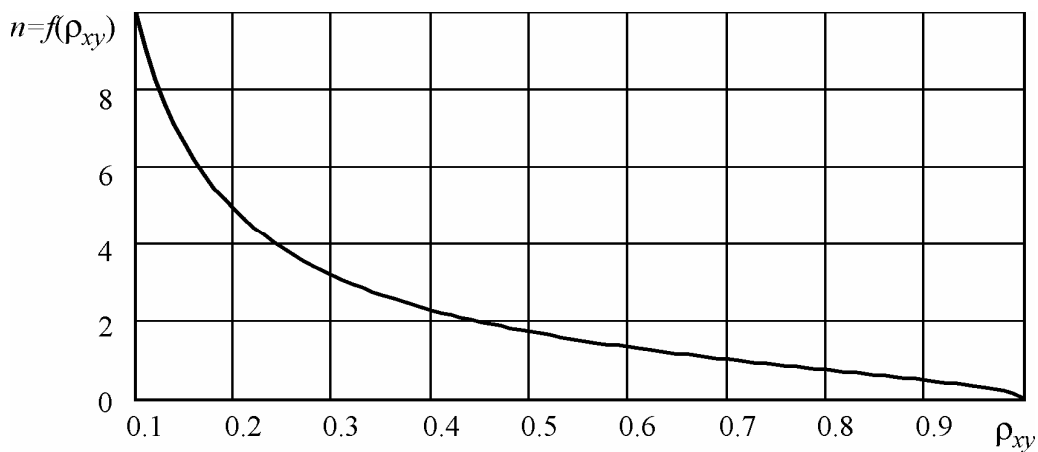


Рис. 7.7 Зависимость параметра  $n$  схемы формирования от заданного значения  $\rho_{xy}$ .

Таким образом, задавшись требуемым коэффициентом корреляции  $\rho_{xy}$ , необходимое значение параметра схемы формирования определяется на основе выражения:

$$n = \frac{\sqrt{1 - \rho_{xy}^2}}{\rho_{xy}}, \quad (7.5)$$

или по графику, приведенному на рис. 7.7.

Для приведение к единице дисперсии суммарного случайного процесса  $y(t)$  выведем нормирующий коэффициент  $k$ , полагая что  $\sigma_x^2 = 1$  и  $\sigma_{\varepsilon'}^2 = 1$ , тогда  $\sigma_{\varepsilon}^2 = n^2$ , следовательно:

$$k = 1/\sqrt{1+n^2}.$$

*Формирование коррелированных случайных процессов на основе линейного динамического преобразования.* Другим способом формирования связанных случайных процессов является линейное динамическое преобразование по схеме приведенной на рис. 7.8.

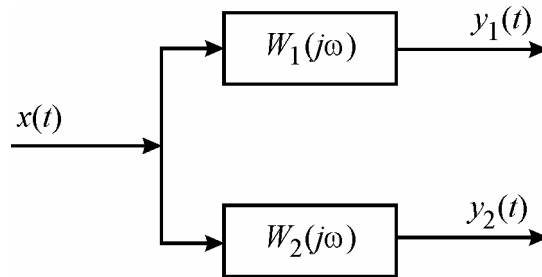


Рис. 7.8 Формирователь коррелированных случайных процессов.

В схему формирователя входят два динамических звена с передаточными функциями вида:

$$W_1(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T_1}, \quad W_2(j\omega) = \frac{1}{1+j\omega T_2}.$$

Входной случайный процесс имеет функцию спектральной плотности мощности вида (2.10). Для нахождения кросспектральной плотности мощности для процессов  $y_1(t)$  и  $y_2(t)$  воспользуемся соотношением Винера-Ли [5] в спектральной форме:

$$S_{y_1 y_2}(j\omega) = S_{xx}(\omega) W_1(j\omega) \overline{W_2(j\omega)},$$

перейдя затем к ВКФ на основе теоремы Винера-Хинчина [5]:

$$R_{y_1 y_2}(\tau) = \frac{1}{\pi} \int_0^{+\infty} \operatorname{Re}[S_{y_1 y_2}(j\omega)] \cos(\omega\tau) d\omega.$$

Выполнив необходимые преобразования, приходим к следующему выражению:

$$R_{y_1 y_2}(\tau) = \frac{e^{-\alpha\tau} (T_1 + T_2 - \alpha^2 T_1 T_2^2 - \alpha^2 T_1^2 T_2) + e^{-\frac{\tau}{T_1}} (\alpha^3 T_1^2 T_2^2 - \alpha T_1^2)}{(1 - \alpha^2 T_1^2 - \alpha^2 T_2^2 + \alpha^4 T_1^2 T_2^2)(T_1 + T_2)} +$$

$$+ \frac{e^{-\frac{\tau}{T_2}} (\alpha^3 T_1^2 T_2^2 - \alpha T_2^2)}{(1 - \alpha^2 T_1^2 - \alpha^2 T_2^2 + \alpha^4 T_1^2 T_2^2)(T_1 + T_2)}.$$

Поскольку в данном случае интересует только коэффициент корреляции, то полученное выражение можно упростить:

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} R_{y_1 y_2}(\tau) = \frac{2\alpha T_1 T_2 + T_1 + T_2}{(T_1 + T_2)(1 + \alpha T_1 + \alpha T_2 + \alpha^2 T_1 T_2)},$$

далее, выполнив нормирование и введя безразмерные коэффициенты  $B_1 = \alpha T_1$  и  $B_2 = \alpha T_2$ , получаем выражение для коэффициента корреляции на выходе системы представленной на рис. 7.27:

$$\rho_{y_1 y_2} = \frac{2B_1 B_2 + B_1 + B_2}{(B_1 + B_2)\sqrt{(1 + B_1)(1 + B_2)}},$$

или более простой случай, когда в одном из каналов, например во втором, (рис. 7.8) отсутствует динамическое звено ( $T_2 = 0$ ):

$$\rho_{y_1 x} = \frac{1}{\sqrt{1 + B_1}},$$

Тогда при заданном значении коэффициента корреляции постоянная времени динамического звена может быть найдена по формуле:

$$T_1 = \frac{1 - \rho_{y_1 x}^2}{\alpha \rho_{y_1 x}^2}.$$

Расчет нормирующих коэффициентов для данного метода может быть произведен по методике приведенной в разделе 7.4, для каждого из каналов формирователя.

## 7.6 Метод формирования систем гауссовских случайных процессов с заданными функциями автокорреляции и взаимной корреляции

Метод формирования систем гауссовских случайных процессов с заданными АКФ и ВКФ так же основываются на линейном динамическом преобразова-

нии гауссовских случайных процессов типа «белый шум». В общем виде формирователь системы нормальных случайных процессов представлен на рис. 7.9, здесь  $[X]$  - вектор входных статистически независимых случайных процессов,  $[Y]$  - вектор сформированных случайных процессов,  $[W(j\omega)]$  - матрица передаточных функций.

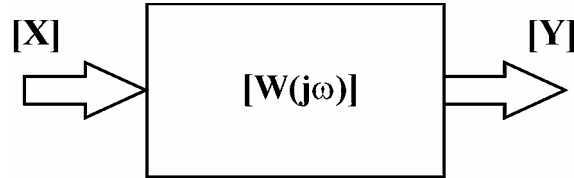


Рис. 7.9 Общая структура формирователя системы случайных процессов с заданными АКФ и ВКФ.

Рассмотрим частный случай, когда необходимо сформировать для случайных процесса с заданной матрицей корреляционных функций:

$$[R(\tau)] = \begin{bmatrix} R_{y_1, y_1}(\tau) & R_{y_1, y_2}(\tau) \\ R_{y_2, y_1}(\tau) & R_{y_2, y_2}(\tau) \end{bmatrix},$$

на основе двух независимых случайных процессов  $x_1(t)$  и  $x_2(t)$ . Структурная схема формирователя для данного случая приведена на рис. 7.10.

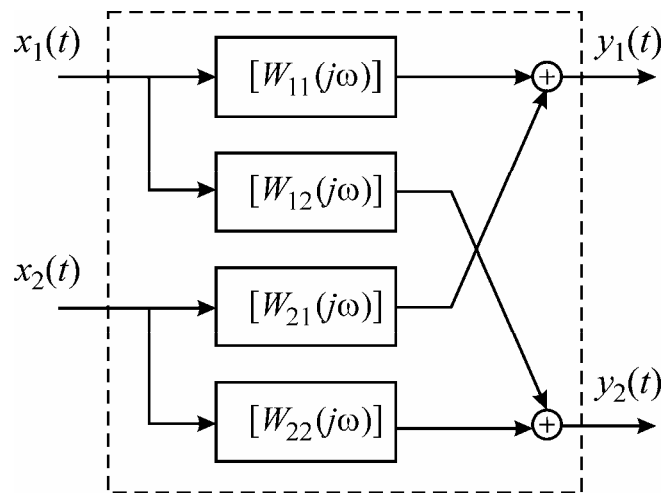


Рис. 7.10 Структурная схема формирователя двух случайных процессов с заданными АКФ и ВКФ.

Матрица передаточных функций имеет вид:

$$[W(j\omega)] = \begin{bmatrix} W_{11}(j\omega) & W_{12}(j\omega) \\ W_{21}(j\omega) & W_{22}(j\omega) \end{bmatrix}$$

Изложение метода подбора передаточных функций и расчет их коэффициентов потребовал бы достаточно большого объема, поэтому для более подробного ознакомления с ним, мы переадресуем читателя к работам авторов данного подхода, а именно [52]. Отметим, что изложенный в разделе 7.5 метод формирования случайных процессов с заданным коэффициентом корреляции является частным случаем более общего метода изложенного в работе [52], но имеющий значительно более простой метод расчета параметров передаточных функций.

### 7.7 Метод скользящего упорядочения для формирования случайного процесса с заданным ОЗРВ И АКФ

Изменение динамических характеристик случайного процесса без изменения его ОЗРВ возможно реализовать методом упорядочения элементов исходной последовательности. Одним из способов реализации данного подхода является скользящее упорядочение [59]. Структура базового алгоритма скользящего упорядочения приведена на рис. 7.11.

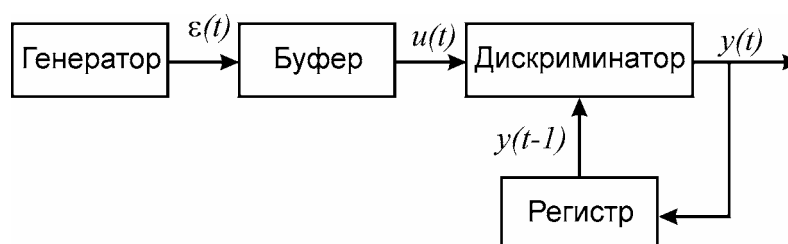


Рис. 7.11 Структура базового алгоритма скользящего упорядочения.

Генератор (рис 7.11) обеспечивает выдачу последовательности случайных чисел  $\varepsilon(t)$  с заданным ОЗРВ. В каждый такт работы алгоритма элемент последовательности попадает в буфер из которого информация переносится в регистр и на выход ( $y(t)$ ). Дискриминатор обеспечивает выбранный критерий упорядочения и в конечном счете взаимную связь сечений процесса.

Одним из вариантов критерия упорядочения является минимизация модулей первых разностей [59]. Он характеризуется тем, что в каждый момент времени  $t$  из буфера объемом  $n$  с содержимым  $u(t) = \{u_1(t), u_1(t), \dots, u_n(t)\}$  извлекается элемент  $u_k(t)$  который и принимается в качестве элемента  $y(t)$ . На место извлеченного элемента  $u_k(t)$  заносится очередное значение  $\varepsilon(t)$  белого шума с



выхода генератора. Индекс  $k$  определяется по критерию:

$$|u_k(t) - y(t)| = \min_i \{|u_i(t) - y(t-1)|\}, \quad i = \overline{1, n}$$

Таким образом, в качестве очередного значения  $y(t)$  выходного процесса выбирается тот элемент вектора  $u(t)$ , который менее всех остальных отличается от предыдущего значения  $y(t-1)$ .

Особенностью использования приведенного выше критерия является формирование случайного процесса имеющего АКФ близкую к функции вида:

$$R(\tau) = \delta^2 e^{-\alpha|\tau|} \cos(\beta\tau),$$

причем с ростом объема буфера период колебаний растет. Пример оценок АКФ (в нормированном виде) случайного процесса сформированного с использованием данного критерия приведен на рис. 7.15.

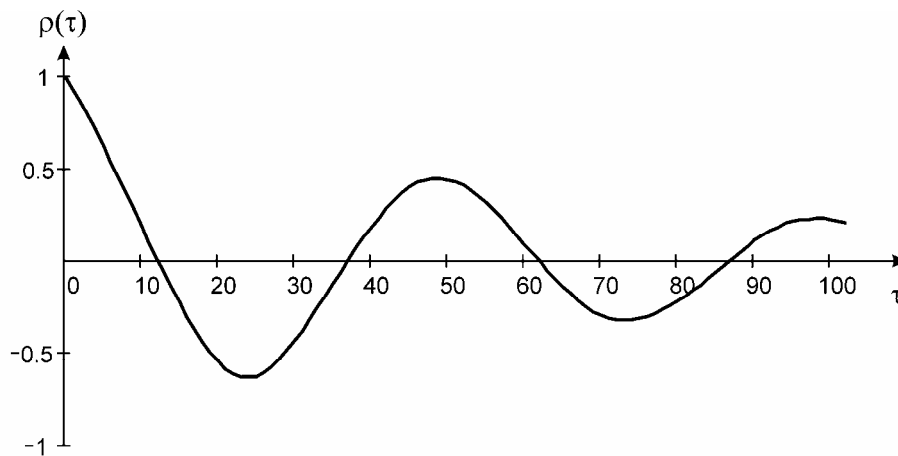


Рис. 7.12 График нормализованных оценок АКФ случайного процесса сформированного методом скользящего упорядочения на основе критерия минимума модуля первых разностей.

Достаточно близкий результат достигается при использовании критерия дискриминации вида:

$$y(t) \cdot y(t-1) = \max_i \{u_i(t) \cdot y(t-1)\}, \quad i = \overline{1, n}.$$

Суть этого критерия заключается в том, что на каждом шаге максимизируется мгновенное значение корреляционного момента

$$\rho(\tau) = y(t)y(t-1).$$

К автокорреляционным функциям пилообразного вида приводит алгоритм с критерием дискриминации следующего вида

$$y(t) \cdot y(t-1) = \min_i \{u_i(t) \cdot y(t-1)\}, \quad i = \overline{1, n},$$

т.е. на каждом шаге выполнения алгоритма происходит минимизация корреляционного момента.

Аналогичный результат дает алгоритм скользящего упорядочения использующий критерий дискриминации вида:

$$|u_k(t) - y(t)| = \max_i \{|u_i(t) - y(t)|\}, \quad i = \overline{1, n},$$

здесь на каждом шаге максимизируется модуль первых разностей.

Вполне очевидным является тот факт, что критериев дискриминации может быть сколь угодно много, и каждый из них будет обладать специфическими свойствами. Для ряда таких критериев дискриминации можно найти полный анализ в работе [59].

## 7.8 Метод максимального подобия для скалярных процессов

Основная идея, предлагаемого метода формирования скалярного случайного процесса заключается в следующем. Формируется исходная реализация случайного процесса с требуемым законом распределения и АКФ близкой к  $\delta$ -функции. Затем формируется реализация некоторого управляющего случайного процесса имеющего необходимую АКФ. После чего исходная реализация преобразуется таким образом, чтобы получившейся случайный процесс стал максимально подобен управляющему процессу. При этом, важно отметить, что указанное преобразование не должно изменять закон распределения исходного случайного процесса. Из подобия случайных процессов следует идентичность их нормированных АКФ. Поэтому получившаяся таким образом реализация случайного процесса будет иметь необходимый закон распределения и требуемую АКФ.

Таким образом, процесс решения поставленной задачи распадается на три основных этапа: формирование исходного случайного процесса, формирование управляющего случайного процесса и непосредственное преобразование исходной реализации [60].

Методы формирования случайных процессов с заданным одномерным законом распределения достаточно хорошо известны, сравнительно просты в реализации и подробно обсуждались в первой главе данной работы, поэтому будем

считать, что реализация исходного случайного процесса сформирована и записана в вектор  $[A]$ .

Для формирования управляющего случайного процесса с заданной АКФ можно применить фильтрацию. С этой целью исходный случайный процесс подаётся на вход линейного динамического преобразователя с выхода которого снимается случайный процесс, имеющий заданную АКФ, но закон распределения которого близок к нормальному [52]. Получившийся таким образом управляющий случайный процесс записывается в вектор  $[B]$ . Между параметрами линейного динамического преобразователя и АКФ выходного процесса существует однозначная связь [52]. Соответственно, изменяя параметры преобразователя можно задать практически любую физически реализуемую АКФ.

На заключительном этапе необходимо произвести преобразование исходного случайного процесса. В предлагаемом методе это производится следующим образом: для каждого элемента управляющего вектора  $[B]$  подбирается подобный ему элемент в исходном векторе  $A$ . Иными словами, образуются пары элементов одинакового ранга: максимальный элемент вектора  $A$  образует пару с максимальным элементом вектора  $[B]$ , минимальный с минимальным и т.д. После этого каждый элемент вектора  $A$  перемещается на ту позицию в результирующем векторе  $C$  на которой находился подобный ему элемент вектора  $[B]$ .

Предлагаемый метод можно представить следующей схемой (рис. 7.13).

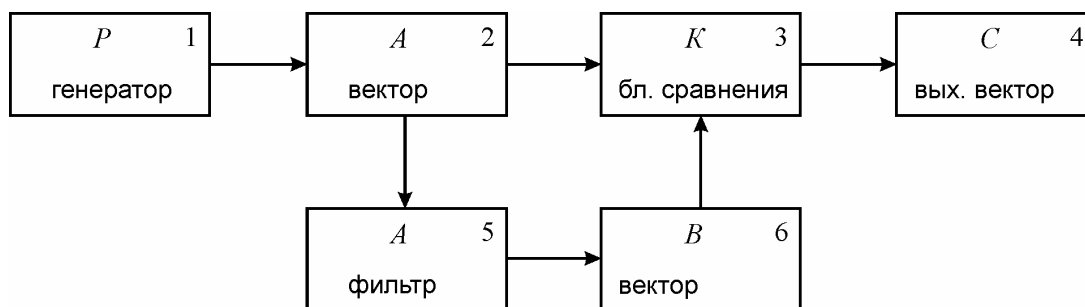


Рис. 7.13 Структурная схема метода формирования случайных процессов с заданными характеристиками.

Более подробно указанное преобразование можно представить следующим алгоритмом:

1. Создаётся вспомогательный вектор  $E$  длиной  $n$ , каждому  $i$ -му элементу, которого присваивается значение  $i$  (где  $i = 1, 2 \dots n$ ). В результате в этом

векторе будут находиться значения  $1, 2, 3, \dots, n$ , которые будут расположены в порядке возрастания.

2. Указанный вектор дописывается справа от управляющего вектора  $[B]$  образуя, таким образом, матрицу  $D$  содержащую  $n$  строк и два столбца. Очевидно, что во втором столбце этой матрицы будут записаны порядковые номера значений находящихся в векторе  $[B]$ .
3. Производится сортировка по возрастанию (или по убыванию) матрицы  $D$  по первому столбцу. Т.е. после сортировки значения в первом столбце будут расположены в порядке возрастания, а каждый порядковый номер во втором столбце переместится вместе с соответствующим ему значением из первого столбца. В качестве метода сортировки применяется алгоритм «быстрой сортировки».
4. Производится сортировка по возрастанию (или соответственно по убыванию) элементов вектора  $A$ .
5. После этого создаётся вектор  $C$  в который будет записан конечный результат. Запись происходит следующим образом: из вектора  $A$  выбирается  $i$ -ый элемент (где,  $i = 1, 2, \dots, n$ ) и помещается в элемент вектора  $C$  порядковый номер которого определяется значением находящимся в  $i$ -ом элементе второго столбца массива  $D$ :

$$C_{[D_{2,i}]} = A_i$$

В результате в полученном векторе  $C$  будут содержаться упорядоченные значения исходного вектора имеющие АКФ близкую к заданной.

На рис. 7.14 показан пример формирования случайного процесса согласно предлагаемого метода для арксинусоидального распределения и АКФ вида:

$$R(\tau) = e^{-\alpha|\tau|} \cos \omega\tau,$$

где  $\alpha$  и  $\omega$  – параметры АКФ.

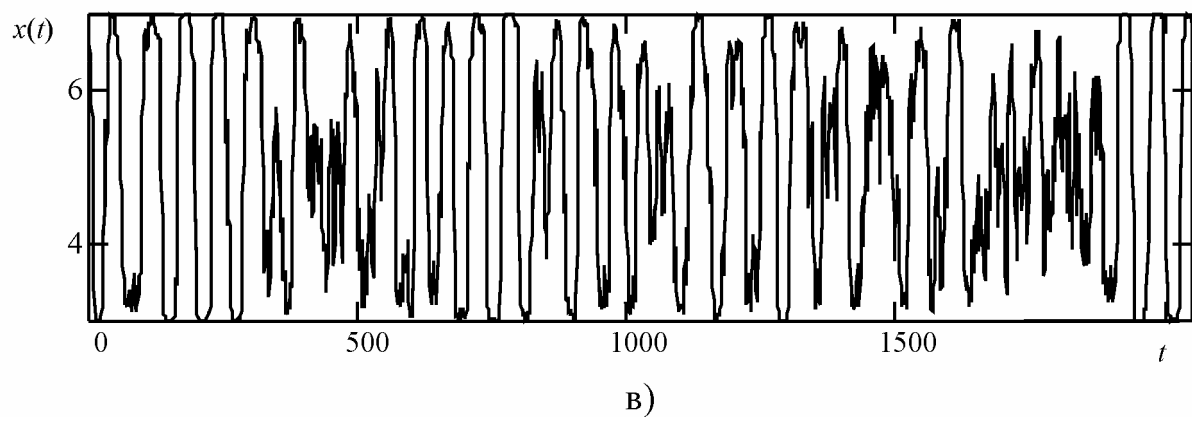
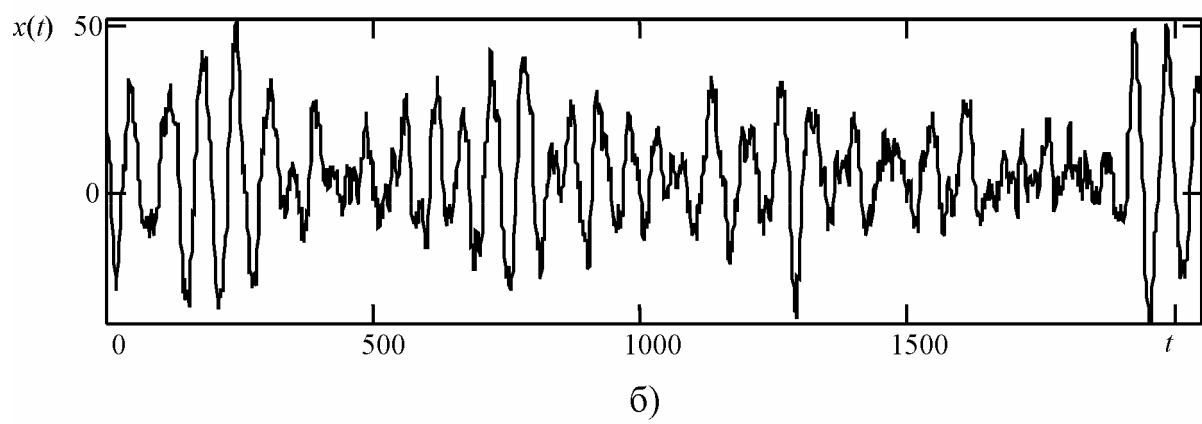
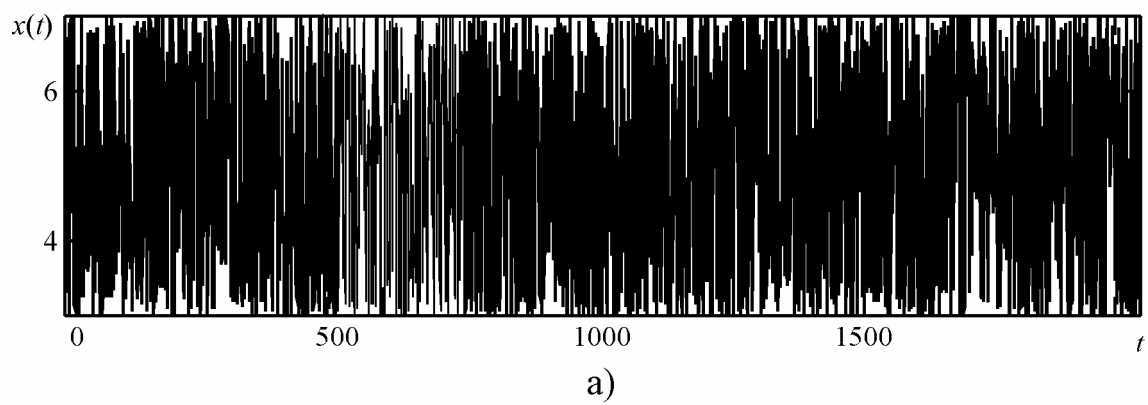


Рис. 7.14 а) Исходный случайный процесс, б) Управляющий случайный процесс в) Результирующий случайный процесс.

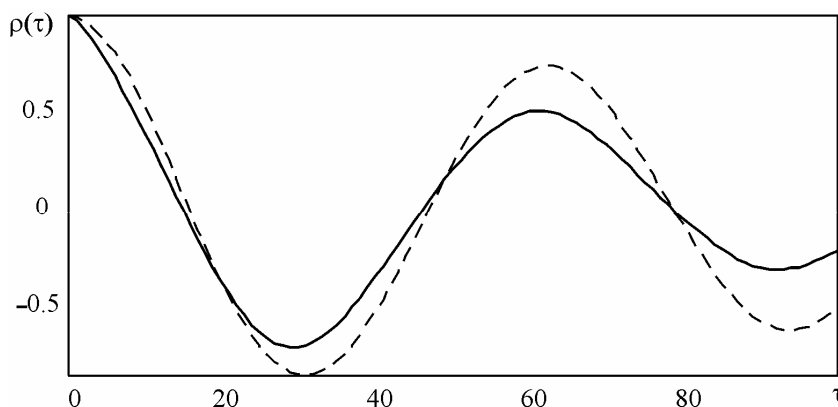


Рис. 7.15 График результирующей АКФ (пунктирной линией показана теоретическая АКФ, сплошной – оценки АКФ результирующего процесса).

Как видно из приведённых графиков, трудно добиться абсолютного подобия между управляющим и результирующим процессом, так как они имеют разные ОЗРВ. Поэтому при моделировании АКФ с помощью данного метода неизбежно возникает погрешность, заключающаяся в том, что оценки АКФ результирующего случайного процесса не совпадают с теоретической АКФ реализуемой фильтром (рис 7.15).

### 7.9 Метод максимального правдоподобия для системы случайных процессов

В основу метода формирования системы случайных процессов положена комбинация метода максимального подобия и метода формирования системы нормальных случайных процессов с заданными АКФ и ВКФ [52]. Структурная схема метода для системы их тех процессов показана на рис. 7.16.

Как и в методе для скалярных процессов источником случайных чисел является генератор  $P$ , в данном случае используются три независимых генератора. Генераторы и следующая за ними система фильтров реализует метод формирования нормальных случайных процессов с заданными АКФ и ВКФ. Методы синтеза передаточных функций фильтров и расчета их параметров подробно изложены в [52].

На первом этапе (сечение  $A$ , рис. 7.16) формируется система случайных процессов имеющих распределение близкое к нормальному (нормализация за счет линейного инерционного преобразования формирующими фильтрами) с заданными АКФ и ВКФ.

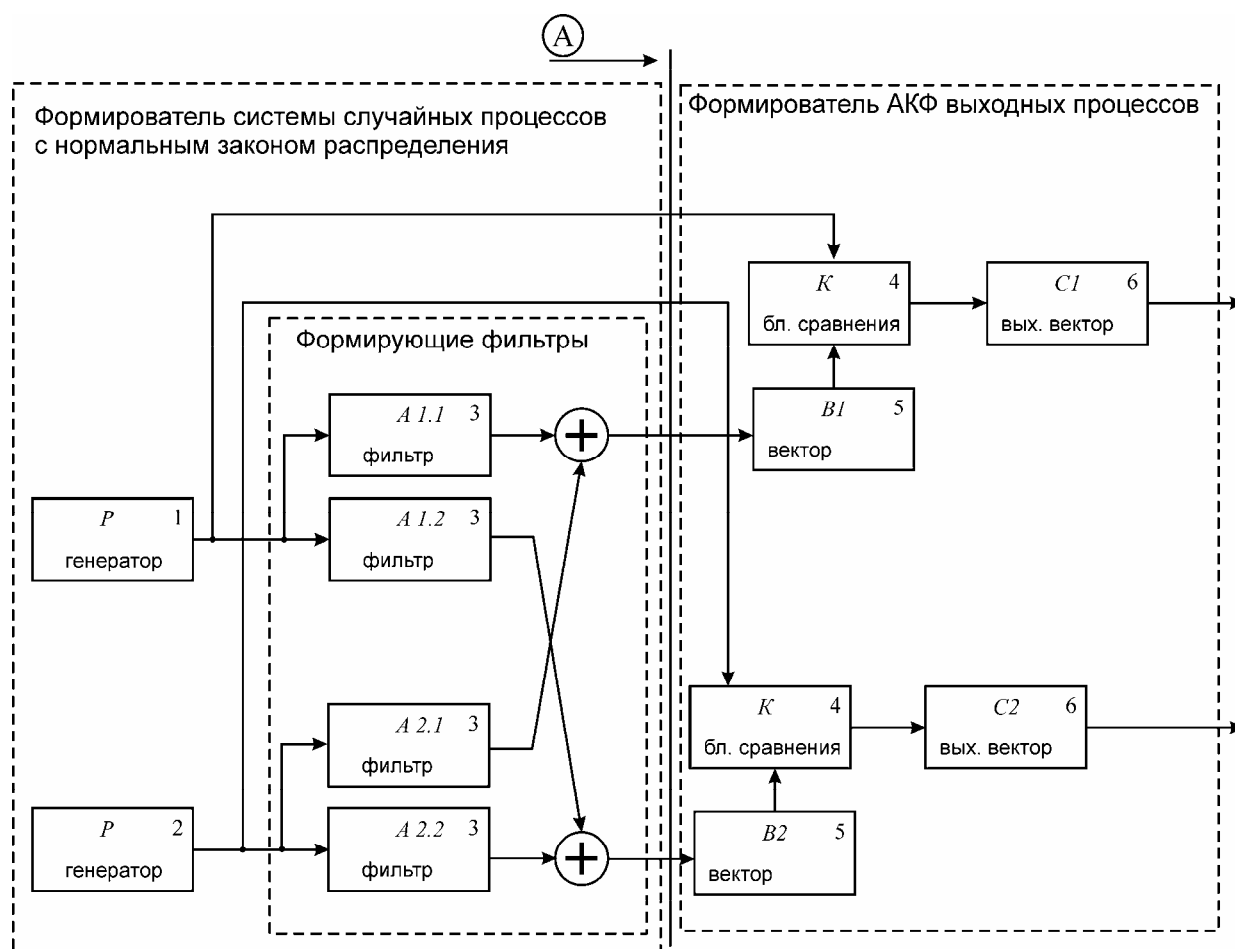


Рис. 7.16 Структурная схема метода формирования системы случайных процессов с заданными характеристиками

Следующий этап формирования системы случайных процессов в каждом из каналов происходит идентично, что и для скалярного процесса. Поскольку вектора  $B1$ ,  $B2$  (рис.7.16) после первого этапа формирования имеют заданную ВКФ, то и выходные вектора отсчетов случайного процесса так же будут иметь ВКФ достаточно близкую к заданной.

## ГЛАВА 8

### ИМИТАЦИОННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ КАНАЛОВ

#### 8.1 Основные принципы моделирования погрешности измерительных каналов

Аналитический анализ погрешностей измерительного канала возможен только в небольшом числе простых случаев. Кроме того, полученный результат в виде дисперсии погрешности не всегда дает полную информацию о погрешности канала. Как известно, для задания доверительного интервала значения погрешности необходимо знание закона её распределения. В случае линейных преобразований и нормальном распределении всех входных величин данная задача не представляет особой сложности. Но в случае нелинейных преобразований и отличие от нормального распределение входных величин значительно усложняет данную задачу. Использование имитационного моделирования позволяет получить исчерпывающую информацию о среднем значении погрешности и о виде её распределения (конечно в виде оценок).

Имитационное моделирование требует наличие как минимум двух основных объектов - модель измерительного канала и модель входных воздействий. Вопросы вида моделей измеряемой величины и влияющих сигналов, а также методы имитационного моделирования рассмотрены во второй главе. В данной главе будут рассмотрены общие вопросы моделирования измерительных каналов и их конкретные модели.

В общем случае модель погрешности можно представить в виде приведенном на рис. 8.1. Генератор случайных процессов по заданным моделям измеряемой и влияющих величин создает входные воздействия на модель измерительного канала. Как правило, при учете влияющих величин их количество ограничивают тремя. Поэтому максимальный размер формируемой системы случайных процессов ограничивается четырьмя (с учетом измерительного сигнала). Измерительный канал описывается некоторым функционалом:  $\tilde{y}(t) = \mathbb{F}_a\{x(t), [\varepsilon(t)], [\mathbf{a}]\}$  и отображает действительное измерительное преобразование, здесь:  $[\mathbf{a}]$  - вектор параметров модели измерительного канала;  $[\varepsilon(t)]$  - вектор влияющих величин;  $x(t)$  - измеряемая величина. Кроме действительного



го преобразования в модель введен дополнительный канал с функционалом требуемого преобразования -  $\mathbb{F}_m\{\cdot\}$  и позволяющего путем изменением компонентов векторов  $[\mathbf{a}]$  и  $[\boldsymbol{\varepsilon}(t)]$  формировать требуемую передаточную функцию канала. Такой подход позволяет получать на выходе не только суммарную погрешность канала, но и выделять отдельные составляющие погрешности.

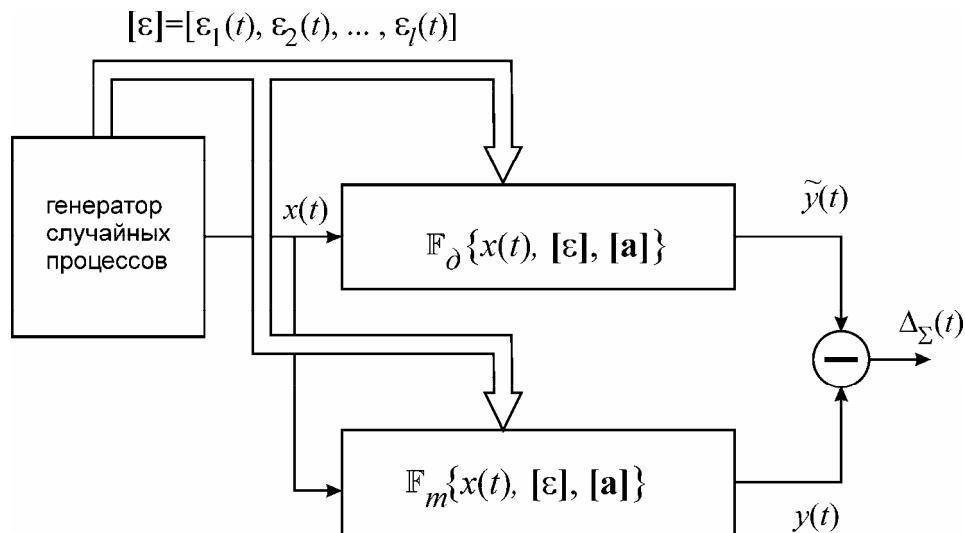


Рис. 8.1 Обобщенная имитационная модель погрешности измерительного канала

Так, например, приняв за ноль один из элементов вектора  $[\boldsymbol{\varepsilon}(t)]$ , сохранив при этом в дополнительном канале все те же параметры что и в основном можно оценить вклад этой влияющей величины в суммарную погрешность.

## 8.2 Полиномиальная модель погрешности измерительного канала

Полиномиальная модель погрешности измерительного канала построена на основе нелинейной модели канала Гаммерштейна-Винера (рис. 8.3) и в соответствии с общей моделью погрешности и включает в себя два канала: канал действительного измерительного преобразования  $\tilde{y}(t) = \mathbb{F}_a\{x(t), [\boldsymbol{\varepsilon}(t)], [\mathbf{a}]\}$  и канал требуемого измерительного преобразования -  $\tilde{y}(t) = \mathbb{F}_\delta\{x(t), [\boldsymbol{\varepsilon}(t)], [\mathbf{a}]\}$ .

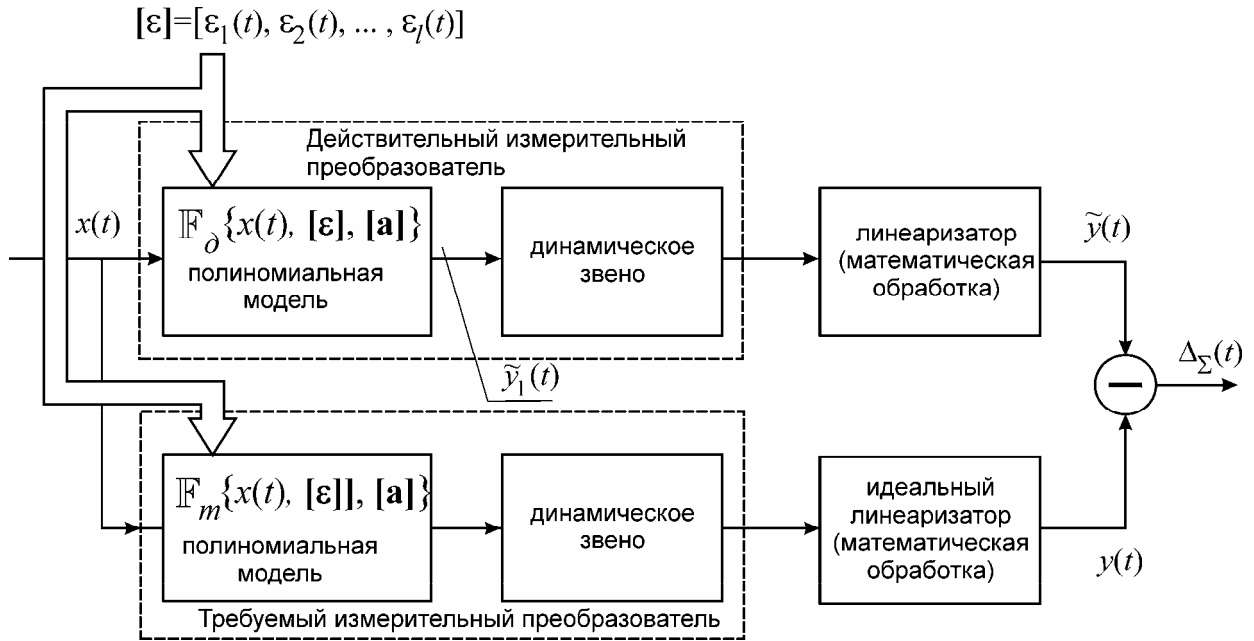


Рис. 8.3 Структура полиномиальной модели погрешности измерительного канала

Реализация нелинейного звена  $\tilde{y}_1(t) = \mathbb{F}_{\delta}\{x(t), [\boldsymbol{\varepsilon}(t)], [\mathbf{a}]\}$ , без учета динамики каналов, может быть записана в следующем виде:

$$\begin{aligned} \tilde{y}_1(t) = & a_{0,0} + a_{0,1}x(t) + a_{0,2}x^2(t) + a_{0,3}x^3(t) + \\ & + a_{1,1}\varepsilon_1(t) + a_{1,2}\varepsilon_1^2(t) + a_{1,3}\varepsilon_1^3(t) + \\ & + a_{2,1}\varepsilon_2(t) + a_{2,2}\varepsilon_2^2(t) + a_{2,3}\varepsilon_2^3(t) + \\ & + a_{3,1}x(t)\varepsilon_1(t) + a_{3,2}x(t)\varepsilon_1^2(t) + a_{3,3}x(t)\varepsilon_1^3(t) + \\ & + a_{4,1}x(t)\varepsilon_2(t) + a_{4,2}x(t)\varepsilon_2^2(t) + a_{4,3}x(t)\varepsilon_2^3(t), \end{aligned}$$

или в компактной форме:

$$\tilde{y}_1(t) = a_{0,0} + \sum_{i=1}^3 a_{0,i}x^i(t) + \sum_{i=1}^3 a_{1,i}\varepsilon_1^i(t) + \sum_{i=1}^3 a_{2,i}\varepsilon_2^i(t) + \sum_{i=1}^3 a_{3,i}x(t)\varepsilon_1^i(t) + \sum_{i=1}^3 a_{4,i}x(t)\varepsilon_2^i(t),$$

где матрица параметров модели:

$$[\mathbf{a}] = \begin{bmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & a_{0,2} & a_{0,3} \\ 0 & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ 0 & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ 0 & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \\ 0 & a_{4,1} & a_{4,2} & a_{4,3} \end{bmatrix},$$

отображает коэффициенты: нелинейности канала измерения -  $a_{0,k}$ ; первого канала аддитивной погрешности -  $a_{1,k}$ ; второго канала аддитивной погрешности -  $a_{2,k}$ ; первого канала мультипликативной погрешности -  $a_{3,k}$ ; второго канала мультипликативной погрешности -  $a_{4,k}$  ( $k = \overline{1,3}$ ).

Частные случаи реализации заданной функции преобразования измеряемой величины:

- нелинейный измерительный канал:

$$\tilde{y}_1(t) = a_{0,0} + a_{0,1}x(t) + a_{0,2}x^2(t) + a_{0,3}x^3(t);$$

- аддитивная погрешность с нелинейным каналом влияния:

$$\tilde{y}_1(t) = a_{0,1}x(t) + a_{1,1}\varepsilon_1(t) + a_{1,2}\varepsilon_1^2(t) + a_{1,3}\varepsilon_1^3(t);$$

- частный случай линейного канала влияния:

$$\tilde{y}_1(t) = a_{0,1}x(t) + a_{1,1}\varepsilon_1(t);$$

- мультипликативная погрешность с нелинейным каналом влияния:

$$\tilde{y}_1(t) = a_{0,1}x(t) + a_{3,1}x(t)\varepsilon_1(t) + a_{3,2}x(t)\varepsilon_1^2(t) + a_{3,3}x(t)\varepsilon_1^3(t);$$

- частный случай линейного канала влияния:

$$\tilde{y}_1(t) = a_{0,1}x(t) + a_{4,1}x(t)\varepsilon_1(t).$$

Аналогичным образом реализуется и функция дополнительного канала (требуемое преобразование)  $\tilde{y}_1(t) = \mathbb{F}_\phi \{x(t), [\varepsilon(t)], [\mathbf{a}]\}$ .

При учете динамики каналов влияния, каждый из этих каналов будет представлять собой модель Гаммерштейна, а общую структуру функции измерительного канала, без учета динамики канала измерения, будет иметь вид, показанный на рис. 8.4.

На рис. 8.4 динамические звенья каналов  $W_{A1}(j\omega)$  и  $W_{A2}(j\omega)$  отражают инерционность каналов влияния аддитивной составляющей дополнительной погрешности, а  $W_{M1}(j\omega)$  и  $W_{M2}(j\omega)$  отражают инерционность каналов влияния мультипликативной составляющей дополнительной погрешности.



Рис. 8.4 Модуль нелинейности полиномиальной модели

В зависимости от метода нормирования дополнительных погрешностей структура канала может быть изменена. Если дополнительная погрешность приведена к выходу измерительного канала, то полином первого модуля необходимо разделить на две части и разнести относительно динамического звена, как показано на рис. 8.5.

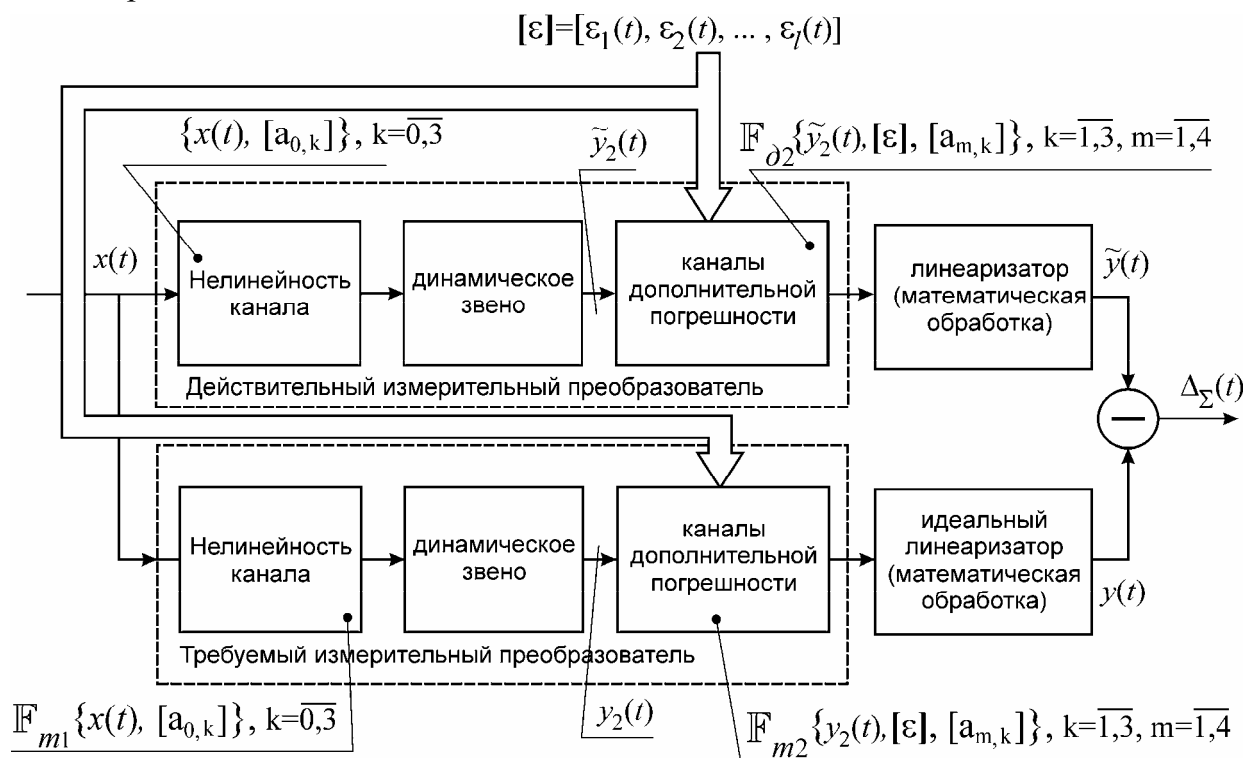


Рис. 8.5 Структура модели погрешности с разделенным полиномом

В случае если нормирование дополнительной погрешности произведено с учетом линеаризатора, то модуль каналов дополнительных погрешностей необходимо вынести за модуль линеаризатора.

Полная модель одного канала, с учетом разделения полинома может быть представлена в виде структурной схемы, представленной на рис. 8.6.

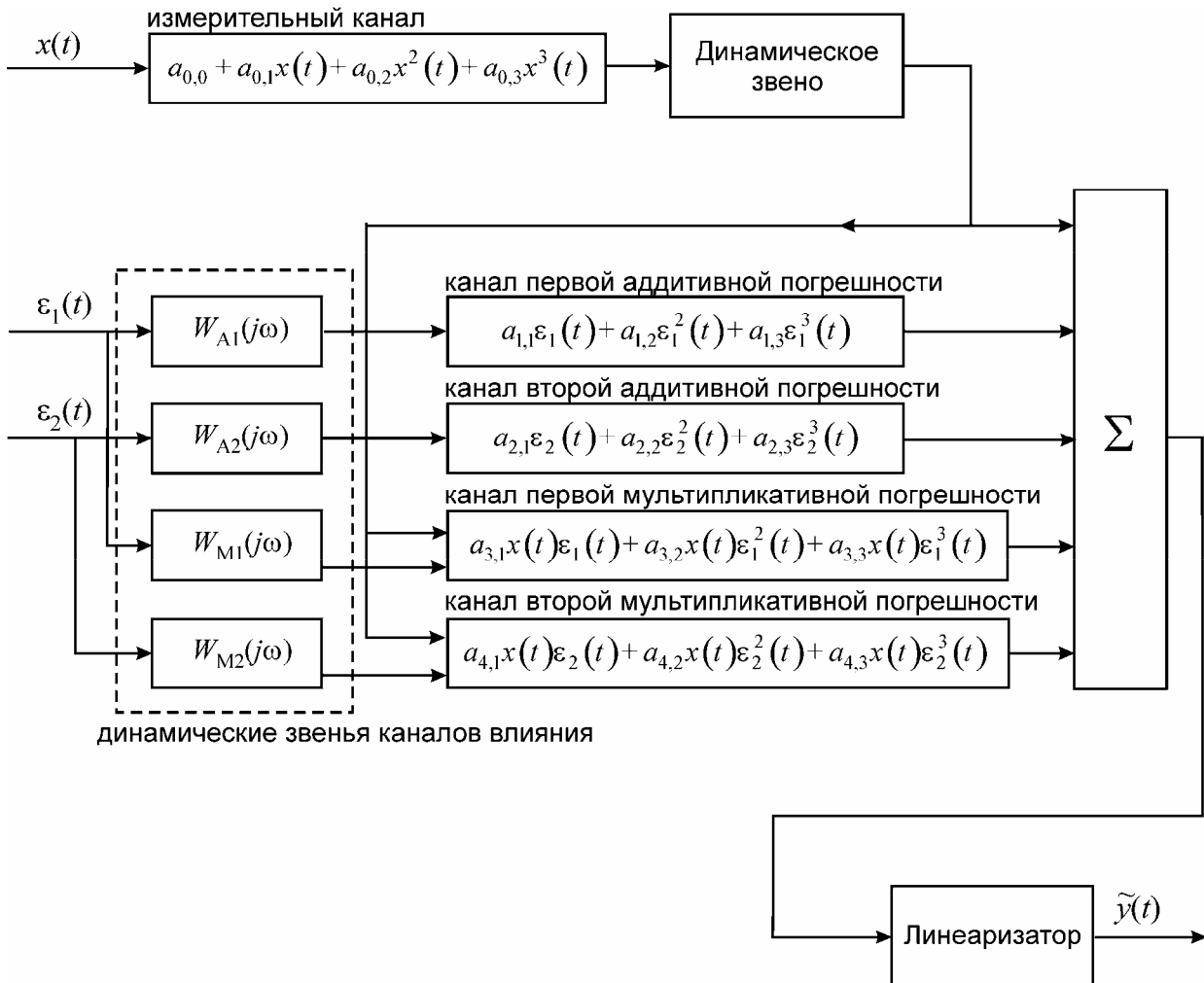


Рис. 8.6 Полная модель измерительного канала с разделенным полиномом

При использовании канала с разделенным полиномом следует учитывать условие нормировки дополнительной погрешности, в случае, если нормировка была произведена в статическом режиме (без учета динамики канала измерения), то целесообразность разделения полинома, очевидно, будет сомнительна.

### 8.3 Модели измерительного канала с ИП циклического действия

Полученное в разделе 3.2.2 выражение передаточной функции циклического измерительного преобразователя (3.14) является приближенным выражением

и не учитывает составляющую погрешности, обусловленную временем нечувствительности. Для проведения анализа значимости вклада этой погрешности в суммарную были разработаны две имитационные модели. Первая имитационная модель реализует принцип работы циклического измерения с учетом всех составляющих погрешности и по ней проводится оценка истинного значения погрешности.

Структурная схема первой модели приведена на рис. 8.7. и диаграмма работы на рис. 8.8. Модель реализована в среде Simulink (Matlab 6.5), в её состав входят следующие модули: 1 – «входной клапан» (умножитель) прекращающий подачу сигнала  $x(t)$  на ИП в течение времени нечувствительности (управляющий сигнал  $z(t)$  имеет два уровня «1» и «0», см. рис. 8.8); 3 – интегратор, выполняющий роль накопителя, сброс выходного значения  $x''(t)$  в «0» в конце цикла накопления происходит по сигналу  $s'(t)$  задержанному относительно сигнала  $s(t)$  на один такт модельного времени  $\Delta t$  (звено чистого запаздывания модуль 2); 4 – интегратор, выполняющий функцию устройства хранения значения полученного с интегратора 3 поступающего на вход предустановки  $x_0$ . Выходное значение нормируется блоком 5.

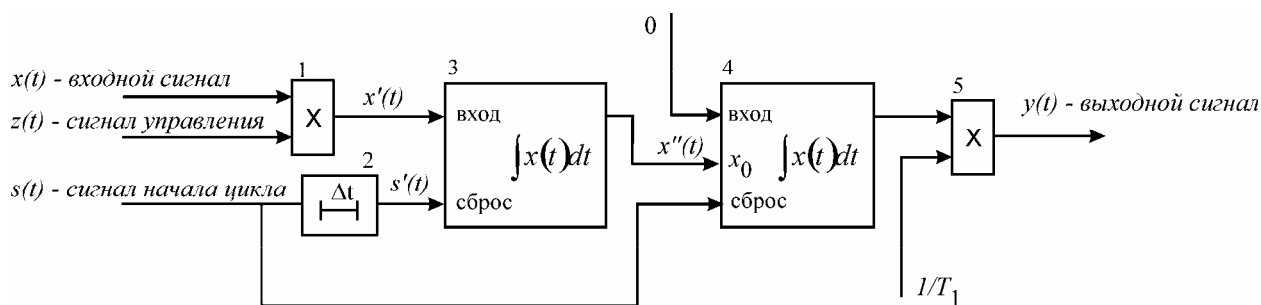


Рис. 8.7 Структурная схема первой модели циклического ИП

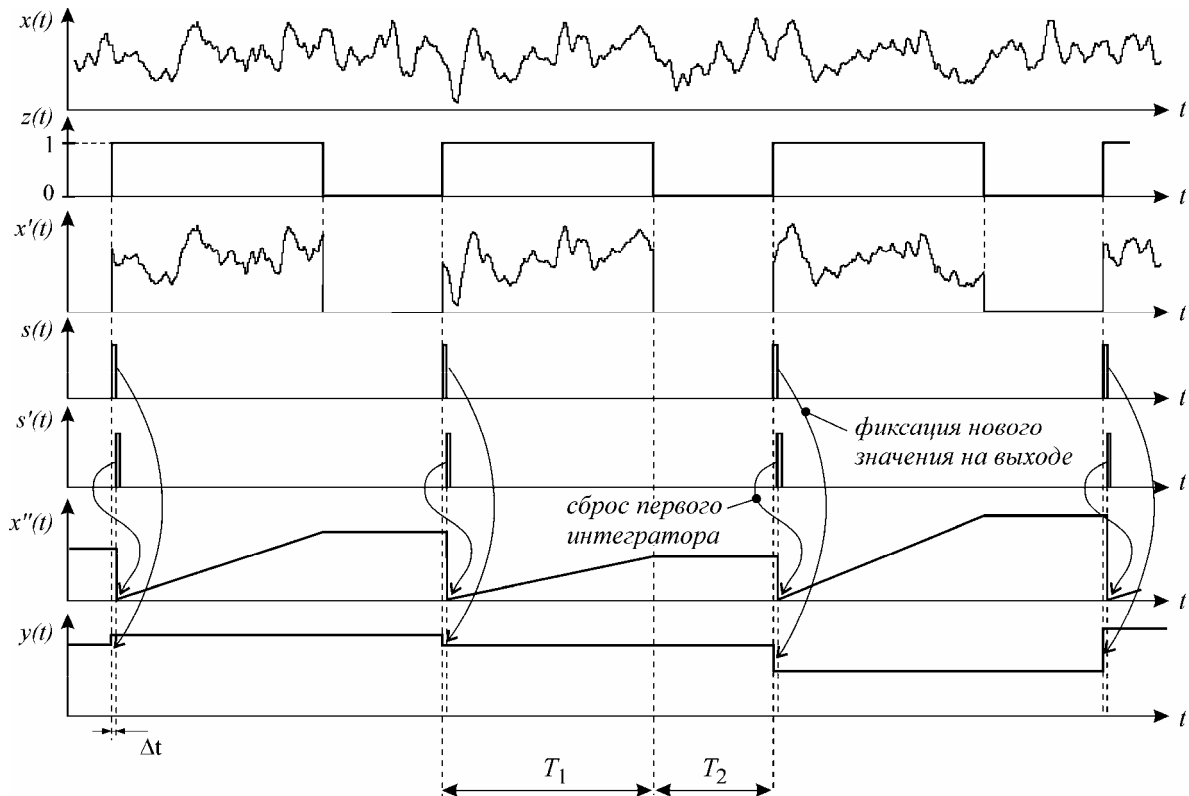


Рис. 8.8 Временная диаграмма работы первой модели циклического ИП

Структурная схема модели, реализующий выражение (3.14) приведена на рис. 8.9. В силу того, что в составе библиотеки программы Simulink отсутствует модуль позволяющий реализовать так называемое «скользящее усреднение» была реализована его дискретный аналог – модуль 1 и 2 (рис. 8.8). Буфер формирует вектор размером  $T_1/\Delta t$ , где  $\Delta t$  - дискретность модельного времени, поступающего на модуль 3 суммирующего все его элементы. Таким образом, на выходе сумматора сигнал равен сумме всех отсчетов входного сигнала на интервале

$$\text{времени } T_1: v_i = \sum_{k=i-\frac{T_1}{\Delta t}}^i x_k.$$

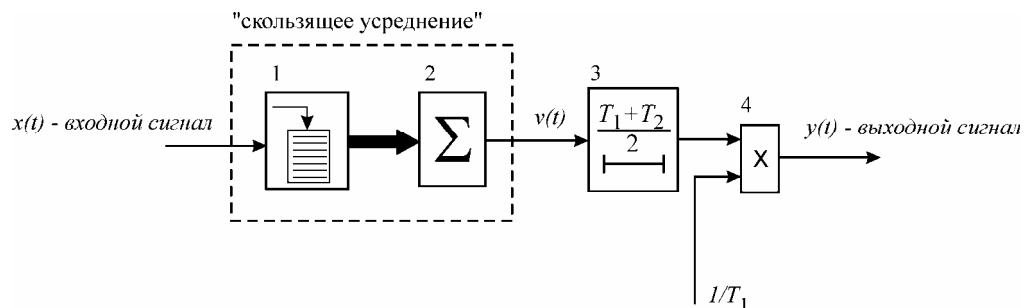


Рис. 8.9 Структурная схема непрерывной модели циклического ИП

Результаты моделирования с использованием первой модели при  $B_1 = 0.5$  приведены на рис. 8.10.

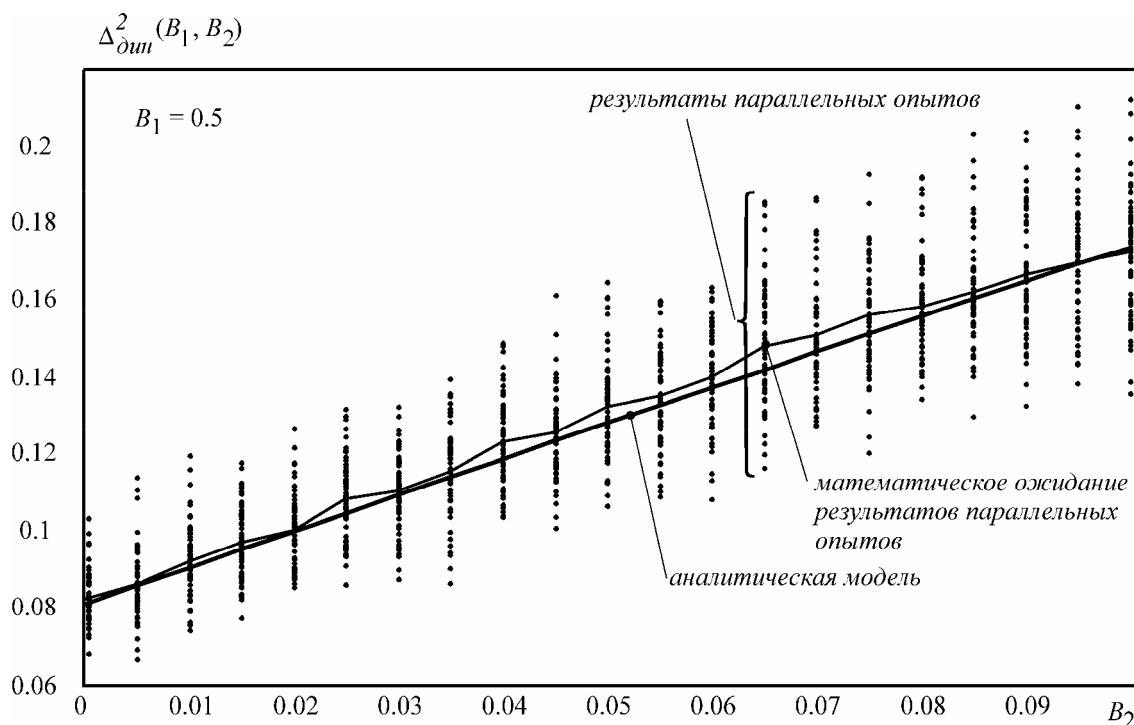


Рис. 8.10 Результаты моделирования погрешности на основе первой модели циклического ИП (рис. 8.7)

Среднеквадратичное отклонение данных полученных при моделировании от данных, полученных по аналитическому выражению (3.14), менее чем 0.6 %, что говорит о хорошем совпадении результатов. Аналогичное совпадение наблюдалось и при других значениях параметра  $B_1$ . Результаты моделирования с использованием второй модели дали практически идентичные результаты, среднеквадратическое отклонении результатов между моделями не превышает значения 0.2 %.

Полученные результаты подтверждают правильность выдвинутого предположения о незначительном вкладе погрешности, обусловленной временем нечувствительности, в динамическую погрешность измерительного канала с циклическим ИП. Таким образом моделирование погрешности измерительного канала с циклическим преобразователем с достаточной точностью возможно проводить на основании выражения (3.14), затраты времени на моделирование при этом будут на порядок меньше чем при использовании модели представленной на рис. 8.7.



## ЛИТЕРАТУРА

1. РМГ 29-99 ГСИ. Метрология. Основные термины и определения. Введен 2001-01-01. Взамен ГОСТ 16263-70.
2. Бородатый В.И., Пинчевский А.Е., Семенюк А.Л. Теоретические и прикладные проблемы системных измерений // Теоретические основы метрологического обеспечения ИИС: Сб. науч. тр. – Львов, 1987. – 97 с. с. 4-13.
3. ГОСТ 8.009-89 Нормируемые метрологические характеристики средств измерения. – Взамен ГОСТ 8.009-72; Введ. 01.01.86. – М.: Изд-во стандартов 1988 г. – 132 с. – (ГСИ). УДК 389.14:006.354. Группа Т80. ОКСТУ 0008
4. Миф Н.П. Оптимизация точности измерительных преобразователей в производстве. – М.: Издательство стандартов, 1991. – 136 с.
5. Корн Г., Корн Т., Справочник по математике для научных работников и инженеров. М: Наука, 1970.
6. Кузнецов Б.Ф., Пинхусович Р.Л. Пудалов А.Д. Стохастические модели сигналов в информационно-измерительных системах // Математические методы в технике и технологиях: Сб. трудов XVI Международ. науч. конф. В 10-и т. Т. 6. Секция 9, 13/ Под общ. ред. В.С. Балакирева./ РГАСХМ ГОУ, Ростов н/Д, 2005. – 234 с. С 46 – 48
7. Волгин В.В., Каримов Р.Н. Оценка корреляционных функций в промышленных системах управления. – М.: Энергия, 1979. – 80 с., ил. – (Б-ка по автоматике; Вып. 600)
8. Льюнг Л. Идентификация систем. Теория пользователя: Пер. с англ. / Под. Ред. Я.З. Ципкина. – Наука. Гл. ред. физ. – мат. лит., 1991. – 432 с.
9. NCAR Land Surface Model (Сетевые источники данных по метеорологии и прогнозированию погоды):  
[http://www.ametsoc.org/AMS/pubs/elecsupps\\_toc.html](http://www.ametsoc.org/AMS/pubs/elecsupps_toc.html)
10. Кузнецов Б.Ф., Пинхусович Р.Л. Оценка дополнительной погрешности при динамических измерениях // Известия Восточно – сибирского отделения метрологической академии. Выпуск 2. Иркутск, 2001.
11. Романенко А.Ф. Сергеев Г.А. Вопросы прикладного анализа случайных процессов. М.: Сов. радио 1968.

12. Кузнецов Б.Ф., Пинхусович Р.Л. Параметрическая оптимизация измерительных преобразователей стохастических сигналов // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика, Москва, 2000 г. №2
13. Кузнецов Б.Ф., Пинхусович Р.Л., Ильина И.Л. Циклический кулонометрический метод измерения микроконцентраций влажности в газах // Приборы. Москва, 2001 г. № 5.
14. Вашны Е. Динамика измерительных цепей, – М.: Энергия, 1969. – 287 с.
15. Кузнецов Б.Ф. Метод расчета динамической погрешности измерительных каналов АСУТП с преобразователями циклического действия // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика, Москва, 2005 г. №7 (стр. 48-50)
16. Бреслер П.И. Оптические абсорбционные газоанализаторы и их применение. Л.: Энергия, 1980. Бреслер П.И. Оптические абсорбционные газоанализаторы и их применение. Л.: Энергия, 1980.
17. Измерения в промышленности: Справ. изд. в 3-х кн. Кн. 2. Способы измерения и аппаратура. Пер. с нем. / Под ред. Профоса П. - 2-е изд., перераб. и доп. - М.: Металлургия, 1990.
18. Ваня Я. Анализаторы газов и жидкостей/ Пер. с чешск. Под ред. О.С. Арутюнова. М.: Энергия, 1970.
19. Кремлевский П.П. Расходомеры и счетчики количества. Л.: Машиностроение, 1975.
20. Павленко В.А. Газоанализаторы. М.: Мир, 1965.
21. Коротков П.А., Беляев Д.В., Азимов Р.К. Тепловые расходомеры. Л.: Машиностроение, 1969.
22. Сорбционные преобразователи и приборы для измерения влажности газов. Обзор. инф. сер.: Аналитические приборы и приборы для научных исследований. М.: ИнформПрибор, 1988.
23. Приборы для хроматографии / Под ред. К.И. Сакодынского. М.: Машиностроение 1973.
24. Гонек Н.Ф. Манометры. Л.: Машиностроение. 1979.
25. Лабутин С.А. Нелинейные модели измерительных преобразователей на классах сигналов // Метрология № 3, 2000 г. с. 22-40.

26. Грановский В.А. Динамические измерения: Основы метрологического обеспечения. Л.: Энергоатомиздат, Ленингр. отд – ние, 1984. – 224 с.
27. Метрологические основы технических измерений. М: Изд-во стандартов, 1991.
28. Музыкин С.Н., Радионова Ю.М. Моделирование динамических систем. – Ярославль: Верх. – Волж. кн. из-во, 1984. – 304 с.
29. Математическое обеспечение сложного эксперимента. Т. 2. Математические модели при измерениях / Под ред. И. И. Ляшко. – Киев: Наукова думка, 1983
30. Крылов В. В., Херманис Э. Х. Модели систем обработки сигналов. – Рига: Зинатне, 1981
31. Парасочкин В. А. // Теоретическая электротехника. – 1987 – Вып. 43. – с. 56.
32. Ланнэ А. А. Нелинейные динамические системы: синтез, оптимизация, идентификация. – Л.: Военная Академия связи им. С. М. Буденного, 1985.
33. Моругин С. Л. Адаптивные спектральные методы анализа радиоэлектронных устройств при воздействии сложных сигналов. – Киев: Общество «Знание», 1990.
34. Болквадзе Г.Р. Модели Гаммерштейна-Винера в задачах идентификации стохастических систем //АиТ № 9, 2003, с. 60-76
35. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. - М.: Наука, 1966.
36. Hemmi P., Profos P. Arch. techn. Messen. Lfg. 427, V 1346-1, 157-162, 1971.
37. Кузнецов Б.Ф., Латышенко Д.Ю., Пинхусович Р.Л. Метод расчета динамической погрешности нелинейных измерительных преобразователей // Измерительная техника № 2, 2006 г. (стр.15 - 20).
38. Кузнецов Б.Ф., Пинхусович Р.Л., Пудалов А.Д. Расчет дополнительных погрешностей каналов ИИС АСУТП // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика, Москва, 2006 г. №6 (стр. 51-54)
39. Кузнецов Б.Ф., Пинхусович Р.Л. Метод расчета дополнительной погрешности измерительных преобразователей стохастических сигналов // Измерительная техника. Москва 2002, № 4.

40. Кузнецов Б.Ф., Пинхусович Р.Л., Пудалов А.Д. Метод расчета дополнительной погрешности измерительных преобразователей при коррелированных воздействиях // Измерительная техника № 9, 2002 г. (стр. 12 - 14)
41. Таточенко Л.К. Радиоактивные изотопы в приборостроении. М.: Атомиздат, 1960.
42. Онищенко А.М. Оптимизация приборов для контроля состава веществ. – М.: Машиностроение, 1990. – 304 с.
43. Бабенко А.К., Пилипенко А. Т. Фотометрический анализ. М.: Химия, 1960.
44. Грибов Л.К., Савченко Л.Е. Кварцевые датчики влажности с полимерным покрытием. - В кн. Применение кварцевых резонаторов для измерения неэлектрических величин. - М.: ВНИИСПВ, 1976.
45. Альтшуллер Г.Б., Елфимов Н.Н., Шакулин В.Г. Кварцевые генераторы: Справочное пособие. М.: Радио и связь, 1984
46. Иващенко В.Е. Сорбционно-частотные датчики приборов контроля микро- и макроконцентраций влаги в газах. - Диссертация. АОКБА, 1984.
47. Смирнов В.Н., Малов В.В., Якунин Ю.П. Вопросы оптимизации рабочих характеристик кварцевых микровесов. // Электронная техника. Сер. Радиодетали и радиокомпоненты. 1976. Вып. 1.
48. Орлов Ю.Г. Эквивалентные параметры пьезорезонатора, нагруженного пленкой. // Автоматизация управления технологическими процессами. М.: Атомиздат, 1978. Вып. 7.
49. Кузнецов Б.Ф., Пинхусович Р.Л., Ильина И.Л. Циклический кулонометрический метод измерения микроконцентраций влажности в газах // Приборы. Москва, 2001 г. № 5.
50. Кузнецов Б.Ф., Пинхусович Р.Л., Параметрическая оптимизация сорбционного датчика влажности // Приборы и системы. Управление, контроль, диагностика, Москва, 2000 г. №7
51. Новицкий П.В., Зограф И.А. Оценка погрешности результатов измерений. – 2-е изд., перераб. И доп. – Л.: Энергоатомиздат. Ленингр. отд-ние, 1991.
52. Лебедев А.Н., Недосекин Д.Д., Стеклова Г.А., Чернявский А.Н. Методы цифрового моделирования и идентификации стационарных случайных

- процессов в информационно-измерительных системах. – Л: Энергоатомиздат. Ленингр. Отд-ние, 1988. – 64с.: ил.
53. Бакалов В.П. Цифровое моделирование случайных процессов. – М.: САЙНС-ПРЕСС, 2002. – 88с.: ил.
  54. Губарев В.В. Вероятностные модели: Справочник. В 2-х ч. / Новосиб. электротехн. ин-т. – Новосибирск, 1992. Ч. II. – С. 225.
  55. Вероятность и математическая статистика: Энциклопедия / Гл. ред. Ю.В. Прохоров. – М.: Большая Российская энциклопедия, 1999. – 910 с.
  56. Кнут Д. Искусство программирования для ЭВМ: Пер с англ. Н.И. Вьюковой, В.А. Галатенко, А.Б. Ходулева, Под ред. Ю.М. Баяковского, В.С. Штаркмана. В 3 т.- М.: Мир, 1977. -Т.2: Получисленные алгоритмы.- 728 с. с ил.
  57. D.H. Lehmer. Mathematical methods in large-scale computing units. In Proc. 2nd Sympos. on Large-Scale Digital Calculating Machinery, Cambridge, MA, 1949, pages 141-146, Cambridge, MA, 1951. Harvard University Press.
  58. J. Eichenauer and J. Lehn. A non - linear congruential pseudo random number generator. Statist. Papers, 27:315-326, 1986.
  59. Хамитов Г.П., Имитация случайных процессов. – Иркутск: Изд-во Иркут. Ун-та, 1983. – 184 с.
  60. Кузнецов Б.Ф., Пинхусович Р.Л., Латышенко Д.Ю. Метод индуцированного упорядочивания для формирования случайного процесса с заданной динамической характеристикой., Измерение, контроль, информатизация. Материалы второй международной научно-технической конференции. – Барнаул. 2001. – 304с.

## Приложение 1

Таблица П. 1 Типовые функции АКФ и соответствующие им функции СПМ

№	Нормированная автокорреляционная функция	Функция спектральной плотности мощности
1	$\rho(\tau) = \delta(\tau)$ - дельта функция	$S(\omega) = 1/(2\pi)$
2	$\rho(\tau) = 1$	$S(\omega) = \delta(\omega)$
3	$\rho(\tau) = \cos(\beta\tau)$	$S(\omega) = \frac{\delta(\omega + \beta) + \delta(\omega - \beta)}{2}$
4	$\rho(\tau) = \sum_{i=1}^n \cos(\beta_i \tau)$	$S(\omega) = \sum_{i=1}^n \frac{\delta(\omega + \beta_i) + \delta(\omega - \beta_i)}{2}$
5	$\rho(\tau) = e^{-\alpha \tau }, \alpha > 0$	$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{2\alpha}{\omega^2 + \alpha^2}$
6	$\rho(\tau) = \sum_i C_i e^{-\alpha_i \tau }, \left(\sum_i C_i = 1\right)$	$S(\omega) = \sum_i \frac{C_i 2\alpha_i}{\alpha_i^2 + \omega^2}$
7	$\rho(\tau) = e^{-\alpha \tau } \cos(\beta\tau)$	$S(\omega) = \frac{2\alpha(\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2)}{\left[\omega^2 - (\alpha^2 + \beta^2)\right]^2 + 4\alpha^2\omega^2}$
8	$\rho(\tau) = \sum_{i=1}^n C_i e^{-\alpha_i \tau } \cos(\beta_i \tau)$	$S(\omega) = \sum_{i=1}^n C_i \frac{2\alpha_i(\omega^2 + \alpha_i^2 + \beta_i^2)}{\left[\omega^2 - (\alpha_i^2 + \beta_i^2)\right]^2 + 4\alpha_i^2\omega^2}$
9	$\rho(\tau) = e^{-\alpha \tau } \left[ \cos(\beta\tau) + \frac{\alpha}{\beta} \sin(\beta \tau ) \right]$	$S(\omega) = \frac{4\alpha(\alpha^2 + \beta^2)}{(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}$
10	$\rho(\tau) = e^{-\alpha \tau } \left[ \cos(\beta\tau) - \frac{\alpha}{\beta} \sin(\beta \tau ) \right]$	$S(\omega) = \frac{2\alpha\omega^2}{(\alpha^2 + (\omega - \beta)^2)(\alpha^2 + (\omega + \beta)^2)}$
11	$\rho(\tau) = e^{-\alpha \tau } \left( ch(\beta\tau) + \frac{\alpha}{\beta} sh(\beta \tau ) \right),$ $\alpha \geq \beta$	$S(\omega) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{2(\alpha^2 - \beta^2)}{(\omega^2 + (\alpha - \beta)^2)(\omega^2 + (\alpha + \beta)^2)}$

Продолжение таблицы П. 1

12	$\rho(\tau) = (1 -  \tau )1(1 -  \tau ),$ $1(x)$ - единичная функция	$\frac{1}{2\pi} \left( \frac{\sin(\omega/2)}{\omega/2} \right)^2$
13	$\rho(\tau) = e^{-\alpha\tau} (1 + \alpha \tau )$	$S(\omega) = \frac{1}{\pi} \frac{2\alpha^2}{(\omega^2 + \alpha^2)^2}$
14	$\rho(\tau) = e^{-\alpha\tau} (1 + \alpha \tau  + \alpha^2\tau^2/3)$	$S(\omega) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{2\alpha^4}{3(\omega^2 + \alpha^2)^3}$
15	$\rho(\tau) = e^{-\alpha\tau} (1 + \alpha \tau  + 2\alpha^2\tau^2 + \alpha^3 \tau ^3/3)$	$S(\omega) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{16\alpha^3\omega^4}{(\omega^2 + \alpha^2)^4}$
16	$\rho(\tau) = 2\alpha \frac{\sin(\beta\tau)}{\tau}$	$S(\omega) = \alpha 1(1 -  \omega /\beta)$
17	$\rho(\tau) = 2\alpha^2 (2\cos(\beta\tau) - 1) \frac{\sin(\beta\tau)}{\tau}$	$S(\omega) = \begin{cases} 0 & \text{npu } 0 \leq  \omega  \leq \beta \\ \alpha^2 & \text{npu } \beta <  \omega  \leq 2\beta \\ 0 & \text{npu } 2\beta <  \omega  \end{cases}$
18	$\rho(\tau) = \frac{\beta^2 e^{-\alpha \tau } - \alpha^2 e^{-\alpha \tau }}{\beta^2 - \alpha^2}$	$S(\omega) = \frac{\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\omega^2 + \beta\alpha\omega^2 + \omega^2\beta^2}{(\alpha^2 + \omega^2)(\beta^2 + \omega^2)(\beta + \alpha)}$
19	$\rho(\tau) = e^{-\alpha\tau^2} \cos(\beta\tau)$	$S(\omega) = \frac{1}{2\alpha} e^{-\left(\frac{\omega}{2\alpha}\right)^2}$
20	$\rho(\tau) = e^{-\alpha\tau^2} (1 + \alpha \tau ) \cos(\beta\tau)$	$S(\omega) = \frac{2\alpha^3}{(\alpha^2 + (\omega - \beta)^2)^2} + \frac{2\alpha^3}{(\alpha^2 + (\omega + \beta)^2)^2}$
21	$\rho(\tau) = e^{-(\alpha\tau)^2}$	$S(\omega) = \frac{1}{2\alpha\sqrt{\pi}} \exp \left\{ -\left( \frac{\omega}{2\alpha} \right)^2 \right\}$
22	$\rho(\tau) = e^{-\alpha\tau^2}$	$S(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} e^{-\frac{\omega^2}{4\alpha}}$
23	$\rho(\tau) = e^{-\alpha \tau } [2\delta(\tau) - \alpha(\operatorname{sgn} \tau)^2]$	$S(\omega) = \frac{\alpha}{\pi} \frac{\omega^2}{\alpha^2 + \omega^2}$

## Приложение 2

Таблица П2.1 Динамическая погрешность для измерительного преобразователя с передаточной функцией вида  $W(j\omega) = 1/(1 + j\omega\tau)$ 

Функция спектральной плотности $S(\omega)$	Функция динамической погрешности $\delta_{дин}^2([B])$
$\frac{2}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$	$\frac{B}{1+B}$
$\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n C_k \frac{\alpha_k}{\alpha_k^2 + \omega^2}$	$\sum_{k=1}^n C_k \frac{B_k}{1+B_k}$
$\frac{1}{\pi} \left[ \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\beta - \omega)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\beta + \omega)^2} \right]$	$\frac{(B1^2 + B2^2 - 1)(B1^2 + B2^2 - B1^2) + 2B2^2}{(B1^2 + B2^2 - 1)^2 + 4B2^2}$
$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n C_k \left[ \frac{\alpha_k}{\alpha_k^2 + (\beta_k - \omega)^2} + \frac{\alpha_k}{\alpha_k^2 + (\beta_k + \omega)^2} \right]$	$\sum_{k=1}^n C_k \frac{(B1_k^2 + B2_k^2 - 1)(B1_k^2 + B2_k^2 - B1_k^2) + 2B2_k^2}{(B1_k^2 + B2_k^2 - 1)^2 + 4B2_k^2}$
$\frac{4\alpha^3}{(\alpha^2 + \omega^2)^2}$	$\frac{B^2}{(1+B)^2}$
$\frac{16\alpha^5}{3(\alpha^2 + \omega^2)^3}$	$\frac{(3B+1)B^2}{3(1+B)^3}$
$\frac{32\alpha^3\omega^4}{(\alpha^2 + \omega^2)^4}$	$\frac{B^2(B^2 + 4B + 5)}{3(B+1)(B^3 + 3B^2 + 3B + 1)}$
$\frac{2\alpha(\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2)}{[\omega^2 - (\alpha^2 + \beta^2)]^2 + 4\alpha^2\omega^2}$	$\frac{B_2^2 + B_1^2 + B_1}{B_2^2 + B_1^2 + 2B_1B_2 + 1}$
$\frac{2\alpha\beta(\beta + \alpha)}{(\alpha^2 + \omega^2)(\beta^2 + \omega^2)}$	$\frac{B_1B_2}{B_1B_2 + B_1 + B_2 + 1}$
$\frac{4\alpha(\alpha^2 + \beta^2)}{(\omega^2 + \alpha^2 - \beta^2)^2 + 4\alpha^2\beta^2}$	$\frac{B_2^2 + B_1^2}{B_2^2 + B_1^2 + 2B_1B_2 + 1}$
$\frac{2\alpha\omega^2}{(\alpha^2 + (\omega - \beta)^2)(\alpha^2 + (\omega + \beta)^2)}$	$\frac{1}{2} \frac{B_2^2 + B_1^2 + 2B_1}{B_2^2 + 2B_1^2 + 2B_1 + 1}$
$\frac{\alpha^2\beta^2 + \alpha^2\omega^2 + \beta\alpha\omega^2 + \omega^2\beta^2}{(\alpha^2 + \omega^2)(\beta^2 + \omega^2)(\beta + \alpha)}$	$\frac{1}{2} \frac{B_1^2B_2 + B_2^2 + B_1^2 + B_1B_2 + B_1B_2^2}{(B_1B_2 + B_1 + B_2 + 1)(B_1 + B)}$
$\frac{1}{2\alpha} e^{-\left(\frac{\omega}{2\alpha}\right)^2}$	$= \frac{1}{4B} \left[ e^{\frac{1}{4B^2}} \operatorname{erf}\left(\frac{1}{2B}\right) - e^{\frac{1}{4B^2}} + \frac{2B}{\sqrt{\pi}} \right]$
$S(\omega) = \frac{2\alpha^3}{(\alpha^2 + (\omega - \beta)^2)^2} + \frac{2\alpha^3}{(\alpha^2 + (\omega + \beta)^2)^2}$	$\delta_{дин}^2 = \frac{B_1^4 + 2B_1^3 + B_1^2 + B_2^4 + 2B_2^2B_1^2 + 4B_2^2B_1 + B_2^2}{1 + B_1^4 + 4B_1^3 + 6B_1^2 + 4B_1 + B_2^4 + 2B_1^2B_2^2 + 4B_2^2B_1 + 2B_2^2}$



## Приложение 3

Таблица ПЗ.2 Динамическая погрешность для измерительного преобразователя с передаточной функцией вида  $W(j\omega) = e^{j\omega\tau}$

Функция спектральной плотности $S(\omega)$	Функция динамической погрешности $\delta_{дин}^2([\mathbf{B}])$
$\frac{2}{\pi} \frac{\alpha}{\alpha^2 + \omega^2}$	$2[1 - e^{-B_k}]$
$\frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^n C_k \frac{\alpha_k}{\alpha_k^2 + \omega^2}$	$\sum_{k=1}^n C_k [1 - e^{-B_k}]$
$\frac{1}{\pi} \left[ \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\beta - \omega)^2} + \frac{\alpha}{\alpha^2 + (\beta + \omega)^2} \right]$	$2[1 - e^{-B_1} \cos(B_2)]$
$\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n C_k \left[ \frac{\alpha_k}{\alpha_k^2 + (\beta_k - \omega)^2} + \frac{\alpha_k}{\alpha_k^2 + (\beta_k + \omega)^2} \right]$	$\sum_{k=1}^n C_k [1 - e^{-B_{1k}} \cos(B_{2k})]$
$\frac{4\alpha^3}{(\alpha^2 + \omega^2)^2}$	$2[1 - e^{-B} - Be^{-B}]$
$\frac{16\alpha^5}{3(\alpha^2 + \omega^2)^3}$	$2\left[1 - e^{-B} - Be^{-B} - \frac{1}{3}B^2e^{-B}\right]$
$\frac{32\alpha^4\omega^4}{3(\alpha^2 + \omega^2)^4}$	$\frac{2}{3}[1 - e^{-B} - Be^{-B} + 2B^2e^{-B} - B^3e^{-B}]$
$\frac{2\alpha(\omega^2 + \alpha^2 + \beta^2)}{[\omega^2 - (\alpha^2 + \beta^2)]^2 + 4\alpha^2\omega^2}$	$2(1 + \cos(B_2)sh(B_1) - \cos(B_2)ch(B_1))$

## Приложение 4

### Динамическая погрешность сложных измерительных преобразователей

Во всех приведенных ниже примерах спектральная плотность мощности входного случайного процесса определяется выражением (2.10).

#### 1. Последовательный двухзвенный преобразователь

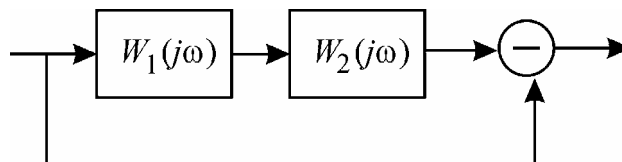


Рис П.4.1 Структурная схема последовательного двухзвенного измерительного преобразователя

Передаточные функции:  $W_1(j\omega) = \frac{1}{1 + T_1 j\omega}$ ,  $W_2(j\omega) = \frac{1}{1 + T_2 j\omega}$ .

Квадрат динамической погрешности:

$$\delta_{дин}^2 = 1 - \frac{1}{B_1 B_2 + B_1 + B_2 + 1} + \frac{B_1 B_2}{(B_1 + B_2)(B_1 B_2 + B_1 + B_2 + 1)},$$

где:  $B_1 = T_1 \alpha$ ,  $B_2 = T_2 \alpha$ .

#### 2. Последовательный двухзвенный преобразователь

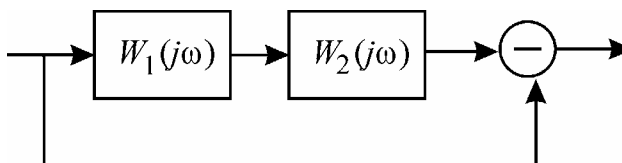


Рис П.4.2 Структурная схема последовательного двухзвенного измерительного преобразователя

Передаточные функции:  $W_1(j\omega) = \exp(-j\omega T_1)$ ,  $W_2(j\omega) = \frac{1}{1 + T_2 j\omega}$ .

Квадрат динамической погрешности:

$$\delta_{дин}^2 = \frac{2(1 - e^{-B_1})B_2}{1 + B_2},$$

где:  $B_1 = T_1 \alpha$ ,  $B_2 = T_2 \alpha$ .

### 3. Последовательный трехзвенный измерительный преобразователь

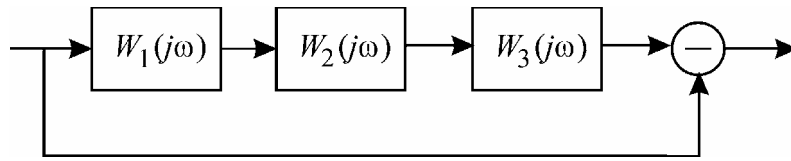


Рис П.4.3 Структурная схема последовательного трехзвенного измерительного преобразователя

Передаточные функции:

$$W_1(j\omega) = \frac{1}{1 + T_1 j\omega}, \quad W_2(j\omega) = \frac{1}{1 + T_2 j\omega}, \quad W_3(j\omega) = \frac{1}{1 + T_3 j\omega}.$$

Квадрат динамической погрешности:

$$\delta_{дин}^2 = 1 - \frac{1}{B_1 + B_2 + 2B_1B_2 + B_2B_3 + B_1B_3 + 1} + \frac{(B_1B_2 + B_2B_3 + B_1B_3)(2B_1B_2 + B_2B_3 + B_1B_3)}{((B_1 + B_2) - (B_1 + B_2)(B_1B_2 + B_2B_3 + B_1B_3))(B_1 + B_2 + 2B_1B_2 + B_2B_3 + B_1B_3 + 1)},$$

где:  $B_1 = T_1\alpha$ ,  $B_2 = T_2\alpha$ ,  $B_3 = T_3\alpha$ .

### 4. Параллельный двухзвенный измерительный преобразователь

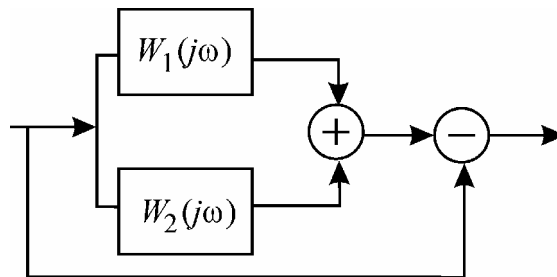


Рис П.4.4 Структурная схема параллельного двухзвенного измерительного преобразователя

Передаточные функции:

$$W_1(j\omega) = \frac{1}{1 + T_1 j\omega}, \quad W_2(j\omega) = \frac{1}{1 + T_2 j\omega}.$$

Квадрат динамической погрешности:

$$\delta_{дин}^2 = 1 - \frac{B_1 + B_2}{B_1B_2 + B_1 + B_2 + 1} + \frac{4B_1B_2}{(B_1 + B_2)(B_1B_2 + B_1 + B_2 + 1)},$$

где:  $B_1 = T_1\alpha$ ,  $B_2 = T_2\alpha$ .

## Приложение 5

Таблица П.5 Примеры элементарных функциональных преобразований базовых случайных величин.

Распределение базовых независимых величин: $x_1, x_2, \dots, x_n$	№	Функциональное преобразование	Распределение получаемых величин $Y$
Стандартное (заданное на интервале $(0, 1)$ ) равномерное $R(0, 1)$	1	$Y = a + \lambda x$	Равномерное $R(a, \lambda)$
	2.1	$Y = a + \lambda \ln(x)$	Экспоненциальное $\mathcal{E}(a, \lambda)$
	2.2	$\begin{cases} Y_1 = a - \lambda x_3 \ln(x_1 x_2), \\ Y_2 = a + \lambda (x_3 - 1) \ln(x_1 x_2) \end{cases}$	
	3	$Y = a - \lambda \ln(x_1 x_2 \dots x_n)$	Гамма (Эрланга) $G(a, \lambda, n)$
	4	$Y = a - \lambda \sqrt{-\ln(x)}$	Релея $Re(a, \lambda)$
	5	$Y = a - \lambda \sqrt[n]{-\ln(x)}$	Вейбулла $ВГ(a, \lambda, \alpha)$
	6	$Y = a + \lambda \operatorname{ctg}(\pi x)$	Коши $K(a, \lambda)$
	7.1	$Y = a + \lambda \begin{cases} \ln(2x) \text{ если } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ -\ln[2(1-x)] \text{ если } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$	Лапласа $L(a, \lambda)$
	7.2	$Y = a + \lambda \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)$	
	7.3	$Y = a + \lambda \operatorname{sign}\left(x_1 - \frac{1}{2}\right) \ln(x_2)$	
	8.1	$Y = a + \frac{1}{2} \lambda \begin{cases} \sqrt{2x} \text{ если } 0 \leq x < \frac{1}{2} \\ 2 - \sqrt{2(1-x)} \text{ если } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$	Симпсона $C(a, \lambda)$
	8.2	$Y = a + \frac{\lambda}{2}(x_1 + x_2)$	
	9.1	$Y = a + \lambda \cos(\pi x)$	Арксинус $A(a, \lambda)$
	9.2	$Y = a + \lambda \sin(\pi x)$	
	10	$Y = a + \lambda \ln[(1-x)/x]$	Логистическое $\Lambda(a, \lambda)$

Продолжение таблицы П.5

	11	$Y = a + \lambda \left[ \sqrt[1-\alpha]{1-x} - 1 \right]$	Пирсона IX $\Pi_{IX}(a, \lambda, \alpha)$
	12	$Y = a + \lambda \left[ \sqrt[1-\alpha]{x} - 1 \right]$	Пирсона VIII $\Pi_{VIII}(a, \lambda, \alpha)$
	13.1	$Y = a + \lambda \sqrt{-2 \ln(x_1)} \cos(2\pi x_2)$	Нормальное $N(a, \lambda)$ $Y_1, Y_2$ - независи- мые
	13.2	$Y = a + \lambda \sqrt{-2 \ln(x_1)} \sin(2\pi x_2)$	
	14	$Y = a + \lambda \left[ \sqrt[\beta]{1-x} - 1 \right]^{\frac{1}{\alpha}}$	Бера – II $B_{II}(a, \lambda, \alpha, \beta)$

## Приложение 6

Таблица П6.1 Передаточные функции формирующих фильтров

№	Функция автокорреляции	Передаточная функция формирующего фильтра, $\alpha$ , $\beta$ - параметры АКФ, $k$ - нормирующий сомножитель
1	$R(\tau) = e^{-\alpha \tau }$	$F(j\omega) = \frac{T}{j\omega T + 1}, \alpha = \frac{1}{T}, k = \sqrt{2T}$
2	$R(\tau) = (1 + \alpha \tau )e^{-\alpha \tau }$	$F(j\omega) = \frac{1}{(j\omega T + 1)^2}, \alpha = \frac{1}{T},$ $k = 2\sqrt{T}$
3	$R(\tau) = \left(1 + \alpha \tau  + \frac{\alpha^2 \tau^2}{3}\right)e^{-\alpha \tau }$	$F(j\omega) = \frac{1}{(j\omega T + 1)^3}, \alpha = \frac{1}{T},$ $k = 4\sqrt{\frac{1}{3}T}$
4	$R(\tau) = \left(1 + \alpha \tau  - 2\alpha^2 \tau^2 + \frac{\alpha^3 \tau^3}{3}\right)e^{-\alpha \tau }$	$F(j\omega) = \frac{1}{(j\omega T + 1)^4}, \alpha = \frac{1}{T},$ $k = \sqrt{\frac{32}{5}T}$
5	$\rho(\tau) = \frac{\beta e^{-\alpha \tau } - \alpha e^{-\beta \tau }}{\beta - \alpha}$	$F(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega T_1} \frac{1}{1 + j\omega T_2}$ $\alpha = \frac{1}{T_1}, \beta = \frac{1}{T_2}, k = \sqrt{2 \frac{T_1^2 - T_2^2}{T_1 - T_2}}$
6	$\rho(\tau) = e^{-\alpha \tau } \left[ \cos(\beta\tau) + \frac{\alpha}{\beta} \sin(\beta \tau ) \right]$	$F(j\omega) = \frac{\Omega_0^2}{(j\omega)^2 + 2d\Omega_0 j\omega + \Omega_0^2}$ $F(j\omega) = \frac{1}{1 + 2Tb\omega - T^2\omega^2}$
7	$\rho(\tau) = e^{-\alpha \tau } \left[ \cos(\beta\tau) - \frac{\alpha}{\beta} \sin(\beta \tau ) \right]$	$F(j\omega) = \frac{j\omega \Omega_0^2}{(j\omega)^2 + 2d\Omega_0 j\omega + \Omega_0^2}$ $F(j\omega) = \frac{j\omega}{1 + 2bTj\omega - T^2\omega^2}$
8	$\rho(\tau) = \frac{\beta^2 e^{-\alpha \tau } - \alpha^2 e^{-\beta \tau }}{\beta^2 - \alpha^2}$	$F(j\omega) = \frac{j\omega}{(j\omega T_1 + 1)(j\omega T_2 + 1)}$ $k = \sqrt{\frac{(T_1 - T_2)}{2T_1 T_2 (T_1^2 - T_2^2)}}$

Научное издание

Кузнецов Борис Федорович

Стохастические модели  
и методы анализа  
информационно-измерительных  
систем АСУ ТП

Книга издана в авторской редакции. Оформление автора.

Оригинал макет подготовлен автором в программе Microsoft ® Office Word 2003.