Содержание

Введение

В работе преподавателя, инженера и конструктора все большее значение приобретают персональные компьютеры и вычислительные комплексы. В настоящее время компьютерные технологии получили большое распространение во всех областях деятельности человека. Научно-технический прогресс в промышленности и экономике также немыслим без широкого использования ЭВМ.

Компьютер дает возможность быстро и точно проводить сложнейшие математические расчеты, заниматься моделированием, конструировать, избавляет от рутины математических расчетов. ЭВМ является мощным средством для реализации различных проектов.

Квалифицированный пользователь, владеющий в достаточной степени одним из языков программирования (С++, Pascal, Fortran, Delphi и др.), может самостоятельно разработать и отладить отдельную программу, позволяющую реализовать на ПК алгоритм его задачи. Однако такой подход требует больших затрат времени и сил на программирование, на отладку и тестирование каждой программы, значительно сокращая долю творческого труда по решению конкретной технической задачи.

Для сокращения времени программирования создано множество прикладных пакетов. Наиболее известные программы, используемые в настоящее время в инженерных расчетах такие, как Matlab, Maple или Mathematica.

В данной работе используется пакет MathCAD, который обладает многими достоинствами и наиболее прост в использовании: привычный способ записи математических формул, широкие возможности для анализа результатов расчетов, множество встроенных математических функций, удобная справочная система, возможность построения графиков.

Текст документа MathCAD почти ничем не отличается от текста научных статей. С появлением MathCAD студенты, аспиранты, преподаватели и ученые получили в свои руки превосходный инструмент для повседневной работы. Велика роль математического пакета MathCAD и в системе образования. Грамотное применение систем в учебном процессе обеспечивает повышение фундаментальности математического и технического образования, содействует подлинной интеграции процесса образования в нашей стране.

В данной курсовой работе при помощи системы MathCAD рассмотрены различные задачи векторной алгебры и математического анализа такие, как поиск экстремума функции, вычисление частных производных функции, решение дифференциальных уравнений, применение интегралов для решения физических.

1. Работа с пакетом MATHCAD

1.1. Возможности системы

Система MathCAD – одна из самых мощных и эффективных систем математического направления, которая ориентирована на широкий круг пользователей и позволяет выполнять математические расчеты, как в численном, так и в символьном виде. Причем, описание решения задач задается с помощью привычных математических формул и знаков.

Функциональный набор системы включает в себя:

- ✓ вычислительные функции (вычисление арифметических выражений, производных, интегралов, вычисление суммы и произведения, решение уравнений, неравенств и их систем, решение дифференциальных уравнений, обработка матриц, использование символьных преобразований и др.);
- ✓ графические функции (построение двухмерных графиков в различных системах координат, построение графиков поверхностей, векторных полей, трехмерных гистограмм, применение элементов анимации);
- ✓ функции программирования (создание программных модулей, состоящих из программных элементов, подобных конструкциям языков программирования);
- ✓ сервисные функции (ведение диалога с пользователем посредством меню, пиктограмм или команд, размещение на экране и редактирование математических, графических и текстовых конструкций, форматирование документа, печать документа и др.).

1.2. Окно редактирования

После запуска системы на экране компьютера появляется заставка MathCAD, а затем окно системы, показанное на рисунке 1.1.

Основное окно системы содержит следующие функциональные области:

- ✓ строка заголовка (первая строка, содержащая имя рабочего документа и стандартные кнопки управления окном);
- ✓ главное меню системы (вторая строка, включающая пункты иерархического меню, которое содержит полный набор команд работы с системой);
- ✓ панель инструментов «***Стандартная***» (третья строка, содержащая кнопки или пиктограммы, дублирующие наиболее важные пункты главного меню);
- ✓ панель инструментов «***Форматирование***» (четвертая строка, содержащая кнопки переключения вида, размера и стиля шрифтов, выравнивания текста и др.);
- ✓ наборная панель (пятая строка, содержащая набор кнопок для вывода на экран дополнительных окон с палитрами математических символов и операторов);

✓ окно набора и редактирования документа (основная часть окна системы).

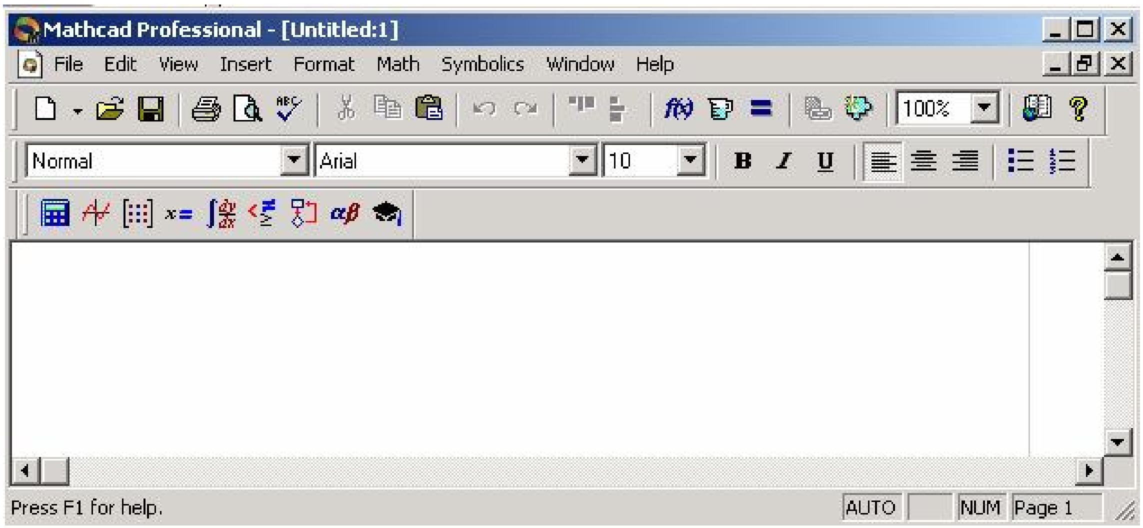


Рисунок 1.1 – Рабочее окно MathCAD

MathCAD-документ формируется из формульных, графических и текстовых блоков – логически завершенных фрагментов рабочего листа. Блоки вводятся с помощью курсора ввода, который может принимать три формы:

✓ красный крестик предназначен для указания на рабочем листе места ввода формул, текстов или графиков;

✓ синий уголок (клюшка) – для указания места ввода очередного символа или алгебраической операции в формульной области;

✓ красная вертикальная черточка – для указания ввода очередного символа в текстовой области.

Красный курсор ввода устанавливается мышью. Для этого надо подвести ее указатель в нужное место рабочего листа и щелкнуть левой кнопкой мыши.

Под блоком понимается та часть MathCAD-документа – формула, график или текст, которая образовалась на рабочем листе с момента превращения визира в синий или красный курсор ввода (т.е. с момента начала ввода или редактирования формулы, графика или текста) до момента обратного превращения курсора ввода в визир (т.е. к моменту завершения ввода или редактирования формулы, графика или текста).

В окне редактирования при использовании полос прокрутки обнаруживаются тусклые горизонтальные и одна вертикальная линии. Горизонтальные линии делят рабочий лист на экранные страницы, которые нумеруются сверху вниз.

Можно изменить заданное разбиение на экранные страницы, вводя новые горизонтальные линии с помощью команды ***Разрыв страницы (Page Break)*** выпадающего меню ***Вставка (Insert)***; при этом место их ввода указывается визиром. Этой командой можно добиться того, чтобы блоки не разрывались на части разными страницами. Добавленную горизонтальную линию можно удалить командой ***Стереть (Delete)*** выпадающего меню ***Правка (Edit)***, предварительно выделив ее.

Логический порядок блоков подчинен привычному принципу чтения русскоязычной (и не только) литературы – слева направо, сверху вниз. Указанный порядок, в частности, означает, что содержание некоторого формульного блока влияет только на те формульные и графические блоки, которые расположены правее и ниже его.

Вертикальная линия учитывается только при распечатке MathCAD-документа на принтере: в этом случае между двумя последовательными горизонтальными линиями помещаются две страницы, разделенные вертикальной линией, а сами страницы нумеруются слева направо.

Отдельный блок или группу блоков можно перемещать вдоль рабочего листа. Для этого их предварительно следует выделить. Существуют два способа выделения блоков. Первый способ: удерживая клавишу ***<Ctrl>***, щелкают последовательно на блоках, которые предназначены для выделения. Выделенные блоки окажутся внутри прямоугольников с пунктирными сторонами.

Этот способ выделения удобен в тех случаях, когда предназначенные для выделения блоки хаотично разбросаны на рабочем листе.

Если же требуется выделить группу блоков, попадающих в некоторый воображаемый прямоугольник на рабочем листе, то удобно воспользоваться вторым способом: визир устанавливается в левой верхней вершине этого воображаемого прямоугольника и, не отпуская левую кнопку мыши, перемещается ее указатель по диагонали до противоположной вершины. Отпуская кнопку мыши, получаем выделенную группу блоков, окруженных пунктирными прямоугольниками. Выделенная группа блоков ведет себя как единый блок, который можно перемещать вдоль рабочего листа при нажатой левой кнопке мыши, предварительно добившись, чтобы указатель на краю одного из блоков принял форму ладошки.

Выделенную группу блоков с помощью команд ***Копировать (Copy)*** или ***Вырезать (Cut)*** меню ***Правка (Edit)*** можно скопировать или удалить в буфер обмена данными. С помощью команды ***Вставить (Paste)*** меню ***Правка (Edit)*** можно затем вставить эту группу в нужное место рабочего листа.

Команда ***Регионы (Regions)*** меню ***Просмотр (View)*** позволяет «обнаруживать» (но не выделять) все блоки MathCAD-документа: при этом сами блоки будут отмечены белым цветом, а промежутки между ними – серым.

Команда ***Обновить (Refresh)*** меню ***Просмотр (View)*** позволяет устранить нежелательные следы, которые могут оставаться на экране при манипуляциях с блоками. При этом сами блоки остаются нетронутыми.

Если на рабочем листе выделены блоки, то можно воспользоваться командами ***Разделить Регионы (Separate Regions)*** и ***Привязать регионы (Align Regions)*** меню ***Форматирование (Format)***. Первая из них разделяет перекрывающиеся блоки; вторая – вызывает падающее меню для выравнивания областей по вертикали и горизонтали соответственно.

1.3. Панели инструментов

Панели инструментов позволяют выполнять наиболее часто используемые команды щелчком по кнопке-пиктограмме. Благодаря этому становится ненужным поиск в меню наиболее часто используемых команд. MathCAD имеет три панели инструментов – ***Стандартная (Standard)***, ***Форматирование (Formatting)*** и ***Математика (Math)***, изображенные на рис. 1.2.

Панели также можно расположить друг под другом сразу под строкой меню, как это показано на рис. 1.1. Чтобы установить панель в нужном месте экрана, достаточно щелкнуть на ее названии и, удерживая левую кнопку мыши, переместить панель в это место.

1.3.1. Панель инструментов Стандартная

Панель инструментов ***Стандартная (Standard)***, содержит 21 кнопку и один раскрывающийся список 

для выбора масштаба изображения MathCAD-документа на экране.

Перечислим соответствие кнопок панели командам меню.

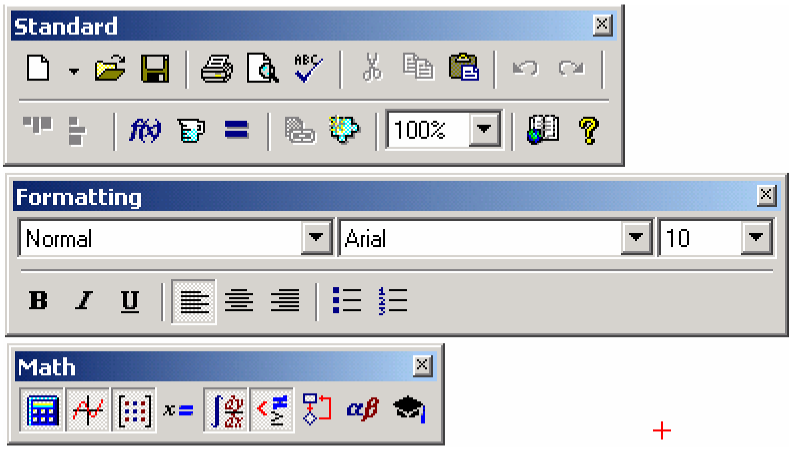
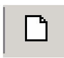


Рисунок 1.2 – Панели инструментов

 – создание нового документа. Соответствует команде ***Новый (New)*** меню ***File (Файл)*** без вызова одноименного диалогового окна.

 – загрузка ранее созданного документа в виде файла. Соответствует команде ***Открыть (Open)*** меню ***Файл (File)***.

 – запись текущего документа в файл под текущим именем. Соответствует команде ***Сохранить (Save)*** меню ***Файл (File)***.

 – распечатка документа на принтере. Соответствует команде ***Печать (Print)*** меню ***Файл (File)***.

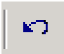
 – предварительный просмотр документа перед печатью в том виде, в котором он будет распечатан. Соответствует команде ***Просмотр печати (Print Preview)*** меню ***Файл (File)***.

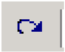
 – проверка орфографии (действует только для англоязычных документов). Соответствует команде ***Проверка орфографии (Check Spelling)*** меню ***Файл (File)***.

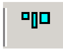
 – перенос выделенных блоков в буфер обмена (с удалением их из документа). Соответствует команде ***Вырезать (Cut)*** меню ***Правка (Edit)***.

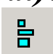
 – копирование выделенных блоков в буфер обмена (с сохранением их в документе). Соответствует команде ***Копировать (Copy)*** меню ***File (Файл)***.

 – перенос содержимого буфера обмена в окно редактирования на место, в котором находится курсор или визир. Соответствует команде ***Вставить (Paste)*** меню ***Правка (Edit)***.

 – отмена предшествующей операции редактирования. Соответствует команде ***Отменить (Undo)*** меню ***Правка (Edit)***.

 – восстановление отмененной операции редактирования. Соответствует команде ***Восстановить (Redo)*** меню ***Правка (Edit)***.

 – выравнивание выделенных блоков по горизонтали. Соответствует команде ***Привязать регионы (Align Regions)*** меню ***Формат (Format)***.

 – выравнивание выделенных блоков по вертикали. Соответствует команде ***Привязать регионы (Align Regions)*** меню ***Формат (Format)***.

 – вставка функции из списка, появляющегося в диалоговом окне. Соответствует команде ***Функция (Function)*** меню ***Вставка (Insert)***.

 – вставка единиц измерения. Соответствует команде ***Юнит (Unit)*** меню ***Вставка (Insert)***.

 – вычисление выделенного блока. Соответствует команде ***Вычислить (Calculate)*** меню ***Математика (Math)***.

 – вставка гиперссылок. Соответствует команде ***Гиперссылка (Hyperlink)*** меню ***Вставка (Insert)***.

 – вставка компонент других систем. Соответствует команде ***Компонент (Component)*** меню ***Вставка (Insert)***.

 – открытие доступа к центру ресурсов. Соответствует команде ***Центр ресурсов (Resource Center)*** меню ***Помощь (Help)***.

 – запуск справочной базы данных. Соответствует команде ***Помощь по MathCAD (MathCAD Help)*** меню ***Помощь (Help)***.

1.3.2. Панель инструментов Форматирование

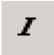
Панель инструментов ***Форматирование (Formatting)*** содержит 8 кнопок и три раскрывающиеся списка.

– раскрывающийся список имен стилей переменных, констант и текстовых блоков.

– раскрывающийся список шрифтов, используемых при отображении констант, переменных или текстовых блоков.

– раскрывающийся список размеров символов.

– полужирное начертание символов.



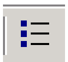
– наклонное начертание символов.

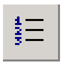
– подчеркнутое начертание символов.

 – выравнивание текста по левой границе текстового блока.

 – выравнивание текста по центру текстового блока.

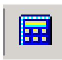
 – выравнивание текста по правой границе текстового блока.

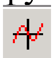
 – создание ненумерованного списка в текстовых блоках.

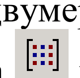
 – создание нумерованного списка в текстовых блоках.

1.3.3. Панель инструментов Математика

Панель инструментов ***Математика (Math)*** содержит 9 кнопок для вызова подпанелей.

Кнопка  вызывает подпанель ***Калькулятор (Calculator)*** (рис. 1.3) для ввода арифметических операций и некоторых наиболее часто используемых функций.

Кнопка  вызывает подпанель ***Графики (Graph)*** (рис. 1.4) для построения двумерных и трехмерных графиков.

Кнопка  вызывает подпанель ***Матрица (Matrix)*** (рис. 1.5) для ввода и обработки векторов и матриц.

Кнопка

вызывает подпанель ***Подсчет (Evaluation)*** (рис. 1.6) для ввода знаков присваивания и равенства, а также для задания собственных операторов различных видов.

Кнопка  вызывает подпанель ***Калькулус (Calculus)*** (рис. 1.7) для вычисления производных, интегралов, сумм, произведений и пределов.

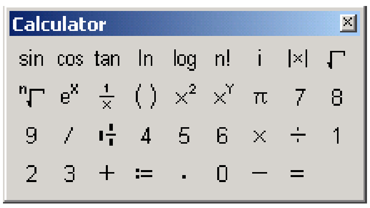


Рисунок 1.3 – Подпанель *Калькулятор*

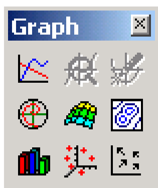


Рисунок 1.4 – Подпанель *Графики*

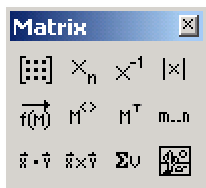


Рисунок 1.5 – Подпанель *Матрицы*

Кнопка вызывает подпанель ***Булевый (Boolean)*** (рис. 1.8) для ввода логических операторов булевой алгебры.

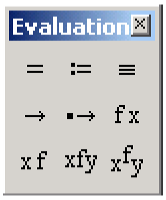


Рисунок 1.6 – Подпанель *Подсчет*

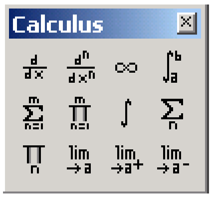


Рисунок 1.7 – Подпанель *Калькулус*

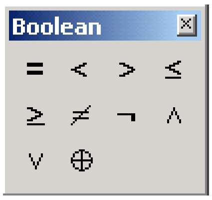


Рисунок 1.8 – Подпанель *Булевый*

Кнопка вызывает подпанель ***Программирование (Programming)*** (рис. 1.9) для ввода операторов программирования.

Кнопка вызывает подпанель ***Греческие (Greek)*** (рис. 1.10) для ввода греческих букв.

Кнопка вызывает подпанель ***Символика (Symbolic)*** (рис. 1.11) для символьных вычислений.

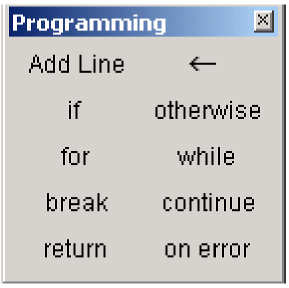


Рисунок 1.9 – Подпанель *Программирование*

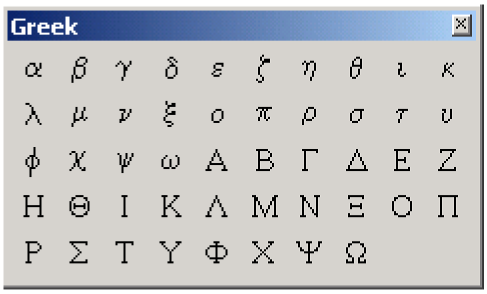


Рисунок 1.10 – Подпанель *Греческие*

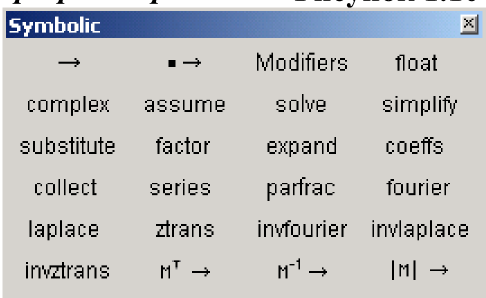


Рисунок 1.11 – Подпанель *Символика*

1.4. Решение математических задач

1.4.1. Массивы, векторы и матрицы

Важным типом данных в системе MathCAD являются *массивы*. Массив – имеющая уникальное имя совокупность конечного числа числовых или символьных элементов, упорядоченных заданным образом и имеющих определенные адреса. В системе MathCAD используются массивы двух наиболее распространенных типов: одномерные (векторы) и двумерные (матрицы).

Имя массива естественно увязать с именами индексированных переменных, значениями которых являются элементы массива. Для этого достаточно в виде подстрочного индекса указать индекс элемента.

Векторы могут быть двух типов: векторы-строки и векторы-столбцы.

Матрица может рассматриваться как совокупность ряда векторов одинаковой длины. Элементы матриц являются индексированными переменными, имена которых совпадают с именами матриц. Но в этом случае для каждой индексированной переменной указываются два индекса: один – для номера строки, другой – для номера столбца.

Для задания векторов и матриц можно воспользоваться операцией ***Матрицы...*** (***Matrix...***) (рис. 1.12) в позиции ***Вставка*** (***Insert***) основного меню, нажав клавиши ***Ctrl+M*** или введя пиктограмму с изображением шаблона матрицы.

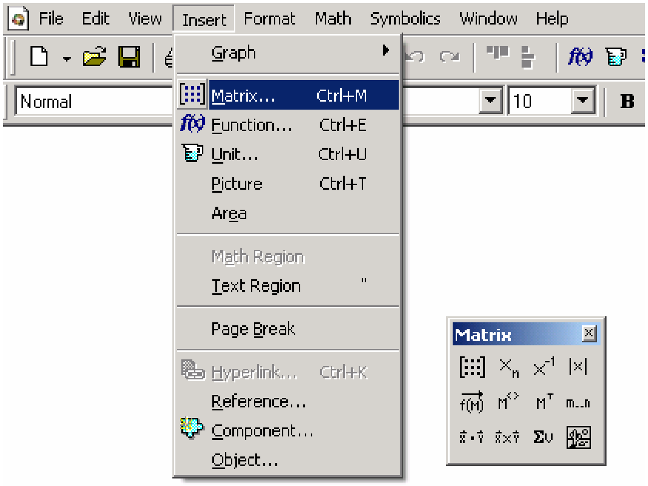


Рисунок 1.12 – Вид меню и панели инструментов для задания матриц

Это вызывает вначале появление диалогового окна, в котором надо указать размерность матрицы, т. е. количество ее строк т и столбцов п. Для векторов один из этих параметров должен быть равен 1. При m=1 получим вектор-столбец, а при n=1 – вектор-строку. Матрица является двумерным массивом с числом элементов $m \times n$. Элементы векторов и матриц помещаются между большими квадратными скобками.

1.4.2. Функции, встроенные и задаваемые пользователем

MathCAD имеет множество встроенных функций, которые обладают особым свойством: в ответ на обращение к ним по имени с указанием аргумента (или списка аргументов) они возвращают некоторое значение – символьное, числовое, вектор или матрицу. В систему встроен ряд функций, например функция вычисления синуса $\sin(x)$ аргумента x, логарифма $\ln(x)$ и т.д. Наряду со встроенными функциями могут задаваться и функции пользователя, отсутствующие в MathCAD. Благодаря встроенным функциям обеспечивается расширение входного языка системы и его адаптация к задачам пользователя.

Имя функции можно вставить из списка: щелкнуть по месту вставки, затем – по строке Function в меню Insert, выбрать в окне списка стрелками прокрутки нужную функцию и подтвердить выбор щелчком по кнопке ***Ok*** в окне диалога (рис. 1.13).

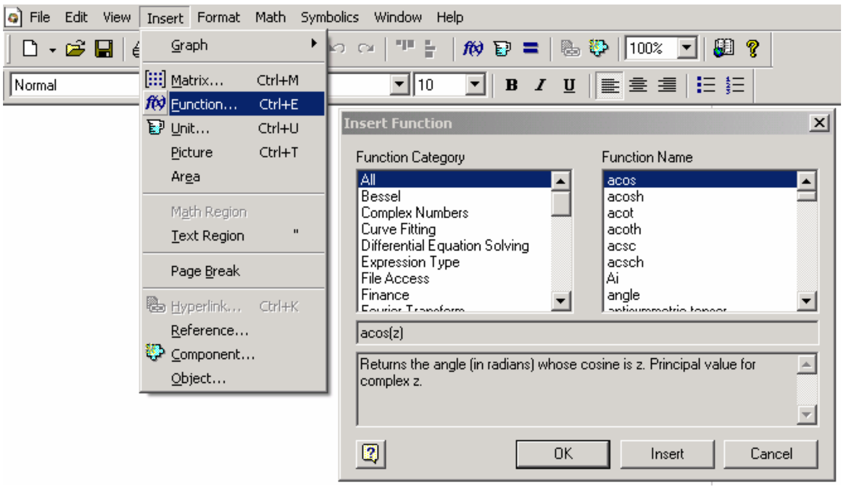


Рисунок 1.13 – Меню и окно диалога выбора функции

1.4.3. Определение функций и построение графиков

Для того, чтобы определить функцию одной переменной, необходимо ввести с клавиатуры имя функции с аргументом в круглых скобках, знак равенства (он будет отображен в рабочем документе как знак присваивания «:=») и справа от него – выражение для вычисления функции.

В записи выражения для функции можно использовать знаки элементарных функций, вводя их с клавиатуры или вставляя в рабочий документ функцию, выбранную из списка ***Function*** в меню ***Insert***.

Выражение можно вводить также с помощью кнопок панели инструментов ***Calculator***.

Чтобы вычислить значение функции в точке, необходимо ввести в рабочий документ с клавиатуры имя функции, указать в скобках значение аргумента, выделить выражение, ввести знак равенства и щелкнуть по свободному месту в рабочем документе.

Инструменты для построения графиков в MathCAD доступны в панели инструментов ***Graph***, через меню ***Graph*** – в меню ***Insert*** (рис. 1.14).

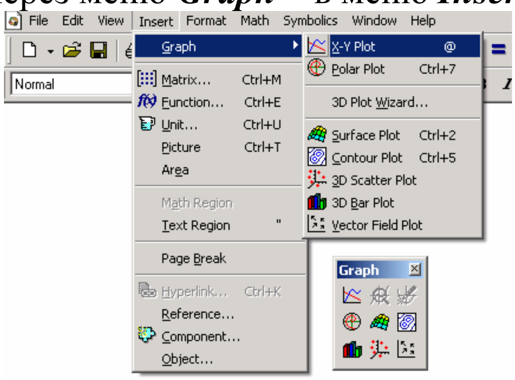


Рисунок 1.14 – Вид меню и панели инструментов построения графиков

Правила работы с меню и кнопочной панелью при построении графиков такие же, как и при определении функции, – необходимо щелкнуть по рабочему документу и по соответствующей строке в меню или по кнопке в панели. Можно построить график функции, заданной в декартовых координатах или в параметрической форме.

1.4.4. Дифференцирование

Выражение для производной функции в MathCAD можно найти двумя способами: с помощью панели инструментов ***Calculus*** и через меню символьных операций ***Symbolics***.

Чтобы найти производную, необходимо щелкнуть по свободному месту в рабочем документе, щелкнуть в панели ***Calculus*** по кнопке, ввести с клавиатуры в помеченных позициях имя или выражение функции и аргумента, заключить все выражение в выделяющую рамку и щелкнуть по строке ***Symbolically*** в пункте ***Evaluate*** в меню ***Symbolics***. Можно поступить иначе: выделить выражение для производной и щелкнуть в панели по кнопке $\rightarrow$. При вычислении производных высших порядков необходимо выбрать кнопку, ввести в помеченных позициях выражение для функции, имя аргумента и порядок производной, а дальше выполнить действия аналогичные действиям при вычислении производной первого порядка.

Для того, чтобы найти производную с помощью меню, в рабочий документ вводиться выражение для функции, выделяется аргумент и выбирается строка ***Differentiate*** в пункте ***Variable*** в меню ***Symbolics*** (рис. 1.15).

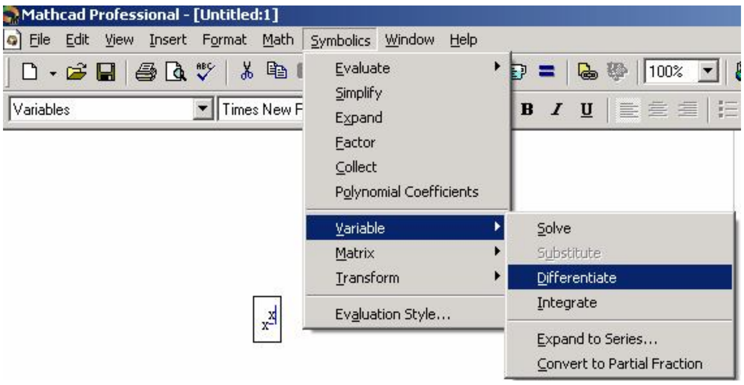
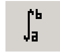


Рисунок 1.15 – Символьное дифференцирование в меню *Symbolics*

1.4.5. Интегрирование

Символьное вычисление неопределенного интеграла в MathCAD можно выполнить двумя способами: с помощью панели инструментов ***Calculus*** и через меню символьных операций ***Symbolics***.

Чтобы найти неопределенный интеграл, необходимо щелкнуть по свободному месту в рабочем документе, щелкнуть в панели ***Calculus*** по кнопке $\int$, ввести с клавиатуры в помеченных позициях выражение для функции и переменной интегрирования, заключить все выражение в выделяющую рамку и щелкнуть по строке ***Symbolically*** в пункте ***Evaluate*** в меню ***Symbolics***. Можно поступить иначе: выделить выражение для производной и щелкнуть в панели  по кнопке . Определенный интеграл вычисляется аналогично: необходимо выбрать кнопку , ввести в помеченных позициях выражение для функции, имя переменной интегрирования, а дальше выполнить действия аналогичные действиям при вычислении неопределенного интеграла.

Для того, чтобы найти неопределенный интеграл с помощью меню, в рабочий документ вводиться выражение для интегрируемой функции, выделяется переменная интегрирования и выбирается строка ***Integrate*** в пункте ***Variable*** в меню ***Symbolics*** (рис. 1.16).

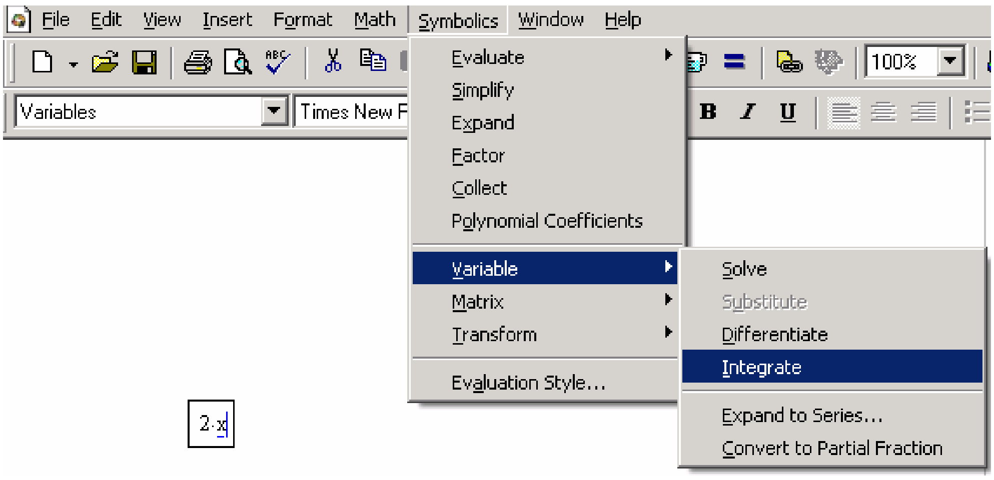


Рисунок 1.16 – Символьное интегрирование в меню *Symbolics*

1.5. Алгебраические уравнения

Задача ставится следующим образом. Пусть имеется одно алгебраическое уравнение с неизвестным x

$$f(x) = 0,$$

где $f(x)$ – некоторая функция. Требуется найти корни уравнения, т.е. все значения x, которые переводят уравнения в верное равенство.

Как правило, отыскание корней численными методами связано с несколькими задачами:

- ✓ исследование существования корней в принципе, определение их количества и примерного расположения;
- ✓ отыскание корней с заданной погрешностью ***TOL***.

Последнее означает, что надо найти значения x_0, при которых $f(x_0)$ отличается от нуля не более чем на ***TOL***. Почти все встроенные функции системы MathCAD, предназначенные для решения нелинейных алгебраических уравнений, нацелены на решение второй задачи, т.е. предполагают, что корни уже приблизительно локализованы. Чтобы решить первую задачу (предварительной локализации корней), можно использовать, например, графическое представление $f(x)$ или последовательный поиск корня, начиная из множества пробных точек, покрывающих расчетную область (сканирование). MathCAD предлагает несколько встроенных функций, которые следует применять в зависимости от специфики уравнения, т.е. свойств $f(x)$.

1.6. Обыкновенные дифференциальные уравнения

Дифференциальные уравнения – это уравнения, в которых неизвестными являются не переменные (т.е. числа), а функции одной или нескольких переменных. Эти уравнения (или системы) включают соотношения между искомыми функциями и их производными. Если в уравнения входят производные только по одной переменной, то они называются *обыкновенными дифференциальными уравнениями* (далее чаше используется сокращение ОДУ). В противном случае говорят об уравнениях в частных производных. Таким образом, решить (иногда говорят проинтегрировать) дифференциальное уравнение – значит определить неизвестную функцию на определенном интервале изменения ее переменных.

Как известно, одно обыкновенное дифференциальное уравнение имеет единственное решение, если помимо уравнения определенным образом заданы начальные или граничные условия.

Имеются два типа задач, которые возможно решать с помощью MathCAD:

✓ задачи Коши – для которых определены начальные условия на искомые функции, т.е. заданы значения этих функций в начальной точке интервала интегрирования уравнения;

✓ краевые задачи – для которых заданы определенные соотношения сразу на обеих границах интервала.

Как правило, решение задач Коши для ОДУ и их систем – задача хорошо разработанная и с вычислительной точки зрения не слишком сложная.

Дифференциальное уравнение первого порядка может по определению содержать, помимо самой искомой функции $y(t)$, только ее первую производную $y'(t)$. В подавляющем большинстве случаев дифференциальное уравнение можно записать в стандартной форме (форме Коши):

$$y'(t) = f(y(t), t)$$

и только с такой формой умеет работать вычислительный процессор MathCAD.

Правильная с математической точки зрения постановка соответствующей задачи Коши для ОДУ первого порядка должна, помимо самого уравнения, содержать одно начальное условие – значение функции

$y(t_0)$ в некоторой точке t_0. Требуется явно определить функцию $y(t)$ на интервале от t_0 до t_1.

По характеру постановки задачи Коши называют еще задачами с начальными условиями, в отличие от краевых задач.

2. Описание индивидуальных заданий с анализом их решения

2.1.Задание 1 (ИДЗ 6.4-2.29)

Провести полное исследование функции $y = \frac{4-2x}{1-x^2}$ и построить ее график.

Решение

1. Функция неопределенна при x=±1. Следовательно, область определения функции – $x \in (-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;+\infty)$.

2. Находим точки пересечения графика с осями:

с осью OY: $y(0) = \frac{4-2\cdot 0}{1-0^2} = 4$ – график функции пересекается с осью OY в точке M(0;4);

с осью OX: $0 = \frac{4-2x}{1-x^2}$, x=2– график функции пересекается с осью OX в точке N(2;0).

3. При стремлении аргумента x к концам промежутка области определения соответственно получаем:

$$\lim_{x\to -1^-} \frac{4-2x}{1-x^2} = -\infty;$$

$$\lim_{x\to -1^+} \frac{4-2x}{1-x^2} = \infty;$$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{4-2x}{1-x^2} = \infty;$$

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{4-2x}{1-x^2} = -\infty.$$

Следовательно, x=-1 и x=1 – вертикальные асимптоты графика функции.

Найдем наклонные асимптоты:

$$k = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{y(x)}{x} = \lim_{x\to\pm\infty} \frac{4-2x}{1-x^2}\cdot\frac{1}{x} = 0;$$

$$b = \lim_{x\to\pm\infty}\left(y(x) - kx\right) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\frac{4-2x}{1-x^2} - 0\cdot x\right) = 0 .$$

Следовательно, график имеет горизонтальную асимптоту y=0 (ось OX).

4. Исследуем функцию на четность.

Функция не является четной, а нечетной, так как $y(-x) = \dfrac{4+2x}{1-x^2}$.

5. Исследуем функцию на монотонность:

$$y'_x = \frac{-2\left(1-x^2\right) - (4-2x)\cdot(-2x)}{\left(1-x^2\right)^2} = \frac{-2\left(x^2-4x+1\right)}{\left(1-x^2\right)^2};$$

$$y'_x = 0 \Rightarrow 0 = \frac{-2\left(x^2-4x+1\right)}{\left(1-x^2\right)^2};$$

$x = -1,\ 1,\ 2+\sqrt{3},\ 2-\sqrt{3}$ – критические точки.

Для нахождения промежутков возрастания и убывания функции составим таблицу.

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;2-\sqrt{3})$	$2-\sqrt{3}$	$(2-\sqrt{3};1)$	1	$(1;2+\sqrt{3})$	$2+\sqrt{3}$	$(2+\sqrt{3};\infty)$
y′	-	-	-	0	+	-	+	0	+
y	↘	-	↘	3,73	↗	-	↗	0,27	↗
				min					

На интервалах $(-\infty;-1)$ $(-1;2-\sqrt{3})$ – функция убывает, т.к. $y(x)' < 0$; на интервале $(2-\sqrt{3};1)$ $(1;2+\sqrt{3})$ $(2+\sqrt{3};\infty)$ – функция возрастает, т.к. $y(x)' > 0$. $x=2-\sqrt{3}$ – точка локального минимума, т.к. знак производной меняется с «–» на «+», $y(2-\sqrt{3})=$ 3,73.

6. Исследуем функцию на выпуклость и вогнутость:

$$y''_x = \frac{-2\left((2x-4)\cdot\left(1-x^2\right)^2 - \left(x^2-4x+1\right)\cdot 2\cdot\left(1-x^2\right)\cdot(-2x)\right)}{\left(1-x^2\right)^4} =$$

$$= \frac{-4\cdot\left(x^3-6x^2+3x-2\right)}{\left(1-x^2\right)^3};$$

$$y''_x = 0 \Rightarrow 0 = \frac{-4\cdot\left(x^3-6x^2+3x-2\right)}{\left(1-x^2\right)^3};$$

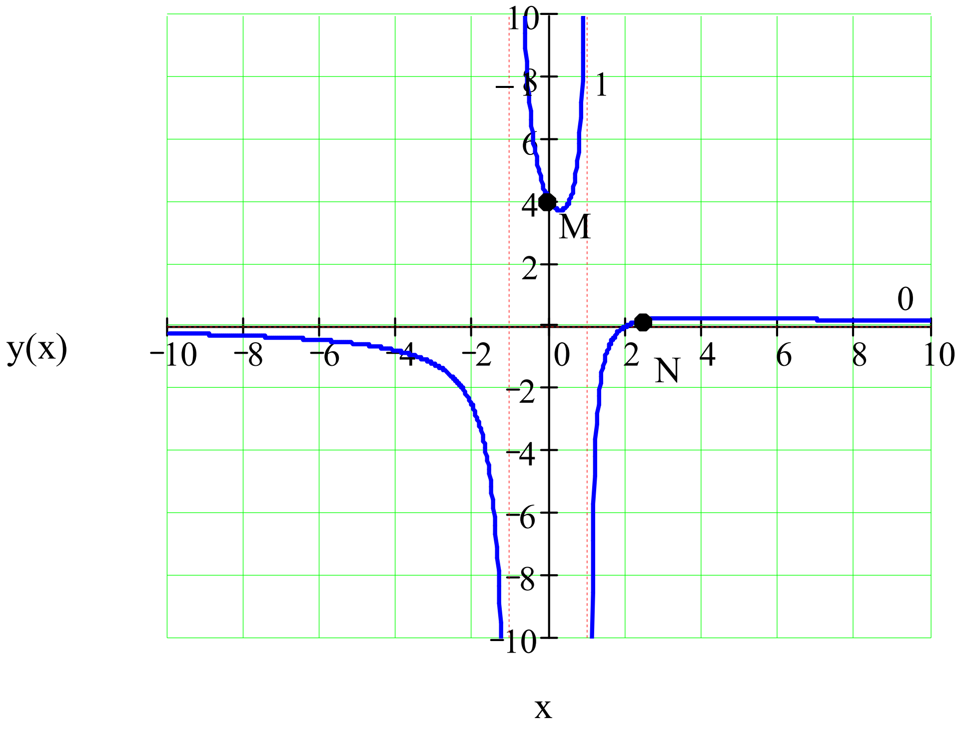
$x = -1,\ 1,\ \sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+2$ – критические точки.

Промежутки выпуклости и вогнутости укажем в таблице:

x	$(-\infty;-1)$	-1	$(-1;1)$	1	$(1;\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+2)$	$\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+2$	$(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+2;\infty)$
y''	-	-	+	-	-	0	+
y	$\cap$	-	$\cup$	-	$\cap$	4	$\cup$
						перегиб	

На интервалах $(-\infty;-1)$ $(1;\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+2)$ функция выпукла, т.к. $y(x)''<0$, на интервале $(-1;1)$ $(\sqrt[3]{9}+\sqrt[3]{3}+2;\infty)$ – функция вогнута, т.к. $y(x)''>0$. x=0 – точка перегиба т.к. знак второй производной меняется с «–» на «+», y(0)=4.

7. График данной функции на отрезке [-10;10].



2.2.Задание 2 (ИДЗ 2.2-3.29)

Даны три силы $\mathbf{P} = (3,-2,4)$, $\mathbf{Q} = (-4,4,-3)$, $\mathbf{R} = (3,4,2)$ приложенные к точке $A = (1,-4,3)$. Вычислить: а) работу, производимую равнодействующей этих сил, когда точка ее приложения, двигаясь прямолинейно, перемещается в точку $B = (4,0,-2)$; б) величину момента равнодействующей этих сил относительно точки $B = (4,0,-2)$.

Решение

а) Найдем равнодействующую силу:

$\mathbf{F} = \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{R}$;

$\mathbf{F} = ((3-4+3),(-2+4+4),(4-3+2)) = (2,6,3)$.

Так как $A = \mathbf{F} \cdot \mathbf{S}$:

$\mathbf{S} = \overrightarrow{AB} = ((4-1),(0-(-4)),(-2-3)) = (3,4,-5)$;

$A = (2,6,3)\cdot(3,4,-5) = (2\cdot 3 + 6\cdot 4 + 3\cdot(-5)) = 6 + 24 - 15 = 15$.

б) Момент силы $\mathbf{M} = \overrightarrow{BA} \times \mathbf{F}$.

$\overrightarrow{BA} = ((1-4),(-4-0),(3-(-2))) = (-3,-4,5)$.

$$\overrightarrow{BA} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -3 & -4 & 5 \\ 2 & 6 & 3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ 6 & 3 \end{vmatrix} - \mathbf{j}\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \mathbf{k}\begin{vmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} =$$

$= (-12-30)\mathbf{i} - (-9-10)\mathbf{j} + (-18+8)\mathbf{k} = -42\mathbf{i} + 19\mathbf{j} - 10\mathbf{k}.$

Следовательно, $|\mathbf{M}| = \sqrt{42^2 + 19^2 + 10^2} = \sqrt{2225} = 5\sqrt{89} = 47{,}17$.

2.3.Задание 3 (ИДЗ 8.1-2.29)

Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt[4]{(3+5x)^3}\,dx$ и результат интегрирования проверить дифференцированием.

Решение

$$\int \sqrt[4]{(3+5x)^3}\,dx = \int (3+5x)^{\frac{3}{4}}\,dx = \frac{4}{7\cdot 5}(3+5x)^{\frac{7}{4}} + C = \frac{4}{35}(3+5x)^{\frac{7}{4}} + C$$

Выполним проверку результата:

$$\left(\frac{4}{35}(3+5x)^{\frac{7}{4}} + C\right)' = \frac{4}{35}\cdot\frac{7}{4}(3+5x)^{\frac{3}{4}}\cdot 5 = \frac{35}{35}(3+5x)^{\frac{3}{4}} = (3+5x)^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{(3+5x)^3}$$

2.4.Задание 4 (ИДЗ 9.3-3.9)

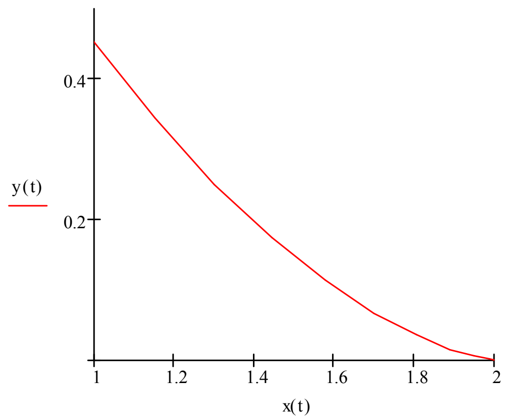
Найти координаты центра масс плоской однородной кривой L: L дуга астроиды $x = 2\cos^3\left(\frac{t}{4}\right)$, $y = 2\sin^3\left(\frac{t}{4}\right)$, расположенная в первом квадрате.

Решение

Координаты центра масс фигуры, заданной параметрическими уравнениями, находим по формулам:

$$x_c = \frac{\int_a^b x(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt}{\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt};$$

$$y_c = \frac{\int_a^b y(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt}{\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt}.$$



Вычисляем интегралы:

$$\int_0^{2\pi} x(t)\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}\,dt = \int_0^{2\pi} 2\cos^3(\frac{t}{4})\sqrt{\left((2(\cos^3(\frac{t}{4}))'\right)^2 + \left((2(\sin^3(\frac{t}{4}))'\right)^2}\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\cos^3(\frac{t}{4})\sqrt{\left((2(\cos^3(\frac{t}{4}))'\right)^2 + \left((2(\sin^3(\frac{t}{4}))'\right)^2}\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\cos^3(\frac{t}{4})\sqrt{\left((-2\cdot\frac{1}{4}\cdot 3\cdot\cos^2(\frac{t}{4})\sin(\frac{t}{4})\right)^2 + \left(2\cdot\frac{1}{4}\cdot 3\cdot\sin^2(\frac{t}{4})\cos(\frac{t}{4})\right)^2}\,dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\cos^3(\frac{t}{4})\sqrt{\frac{9}{4}\cdot\cos^4(\frac{t}{4})\sin^2(\frac{t}{4}) + \frac{9}{4}\cdot\sin^4(\frac{t}{4})\cos^2(\frac{t}{4})}dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} 2\cdot\frac{3}{2}\cos^3(\frac{t}{4})\sin(\frac{t}{4})\cos(\frac{t}{4})\sqrt{\sin^2(\frac{t}{4}) + \cos^2(\frac{t}{4})}dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} -8\cdot\frac{3}{2}\cos^4(\frac{t}{4})d(\cos(\frac{t}{4})) = -12\frac{\cos^5(\frac{t}{4})}{5} = -\frac{12}{5}(\cos^4(\frac{2\pi}{4}) - \cos^4(\frac{0}{4})) =$$

$$= -\frac{12}{5}(0-1) = \frac{12}{5};$$

Подставляя полученные результаты в исходные формулы, получаем:

$x_0 = \frac{12}{5\cdot 3} = \frac{4}{5}$; $y_0 = \frac{12}{5\cdot 3} = \frac{4}{5}$.

Ответ: $x_0 = \frac{4}{5}$, $y_0 = \frac{4}{5}$.

2.5. Задание 5 (ИДЗ 10.1-5.12)

Вычислить значение производной сложной функции $u = \arcsin(x/y)$, где $x = \sin t$, $y = \cos t$, $t_0 = \pi$ с точностью до двух знаков после запятой.

Решение

На основании формулы $\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial u}{\partial y}\frac{dy}{dt}$ находим частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = (\arcsin(x/y))'_x = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}\frac{1}{y}\cos t, \quad \frac{dx}{dt} = \cos t \quad ,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = (\arcsin(x/y))'_y = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}(-\frac{1}{x})(-\sin t), \quad \frac{dy}{dt} = -\sin t .$$

Тогда

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}\frac{1}{y}\cos t + \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{y^2}}}(-\frac{1}{x})(-\sin t)$$

При $t_0 = \pi$ получаем, что x=sinπ=0, y= cosπ=-1

$$\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=\pi} = \frac{1}{\sqrt{1-0}}\frac{1}{-x}(-1) + \frac{1}{\sqrt{1-0}}\frac{0}{-1}0 = 1{,}00$$

.

2.6.Задание 6 (ИДЗ 11.2-3.29)

Решить задачу Коши для дифференциального уравнения, допускающего понижения порядка $y \cdot y'' - 2 \cdot y \cdot y' \cdot \ln y = y'^2$ при y(0)=1, y′(0)=1.

Решение

Введем замену y′=z(y). Тогда $y'' = z'_x = z'_y \cdot y'_x = z\frac{dz}{dy}$.

Подставляем в исходное уравнение и преобразуем:

$y \cdot z \cdot z' - 2 \cdot y \cdot z \cdot \ln y = z^2$; $yz' - 2y \cdot \ln y = z$; $yz' - z - 2y \cdot \ln y = 0$.

Получим линейное дифференциальное уравнение первого порядка. Для его решения введем замену $z = uv$.

Следовательно:

$z' = u'v + uv'$;

$y(u'v + uv') - uv - 2y \cdot \ln y = 0$;

$yu'v + u(yv' - v) - 2y \cdot \ln y = 0$.

Находим v так, чтобы $yv' - v = 0$:

$\frac{dv}{v} = \frac{dy}{y}$; $v = y$.

Находим u:

$y^2 u' - 2y \cdot \ln y = 0$;

$yu' - 2\ln y = 0$;

$du = \frac{2\ln y dy}{y}$;

$u = \ln^2 y + C_1$.

Таким образом, $z = y(\ln^2 y + C_1)$.

Из начального условия $z(0) = y'(0) = 1$, $y(0) = 1$ получаем C_1=1.

Значит, $z = y(\ln^2 y + 1)$.

Возвращаемся к первой замене:

$\frac{dy}{dx} = y(\ln^2 y + 1)$;

$\frac{dy}{y(\ln^2 y + 1)} = dx$;

$x + C_2 = \int \frac{dy}{y(\ln^2 y + 1)} = \mathrm{arctg}(\ln y)$.

Из начальных условий находим параметр C_2:

$0 + C_2 = \mathrm{arctg}(\ln 1) = 0$;

C_2=0.

Проведя преобразования, получаем $y = e^{\mathrm{tg} x}$.

Заключение

В ходе выполнения курсовой работы использовался математический пакет MathCAD и применялся в расчетах для решения индивидуального задания. Это очень удобный инструмент для любых вычислений, которые необходимо знать не только математику или инженеру, но и школьнику. С помощью MathCAD даже самые сложные и громоздкие расчеты доставляют удовольствие. И вместо того, чтобы терять время на огромные выводы формул, поиск верного решения задачи или уравнения, лучше один раз действия реализовать в MathCAD. Осмыслив принцип работы данной системы, можно без труда решать задачи любой сложности.

MathCAD позволяет строить графики функций любой сложности, проводить их полное исследование. Кроме этого есть возможность их анимации.

Математический пакет MathCAD заслуживает особого внимания при экспериментальных, инженерных и многих других расчетах, так как при помощи данного пакета снижается вероятность ошибки ручного просчета

И так, перечислим основные достоинства MathCADa.

Во-первых, это универсальность пакета MathCAD, который может быть использован для решения самых разнообразных инженерных, экономических, статистических и других научных задач.

Во-вторых, программирование на общепринятом математическом языке позволяет преодолеть языковой барьер между машиной и пользователем. Потенциальные пользователи пакета - от студентов до академиков.

И в-третьих, совместное применение текстового редактора, формульного транслятора и графического процессора позволяет пользователю в ходе вычислений получить готовый документ.

Мы ещё не привыкли к тому, что решить систему дифференциальных уравнений из пяти переменных шестого порядка можно не только с помощью карандаша и бумаги, но и с помощью компьютера и MathCADa. Но зачем человеку с высшим образованием, который знает и может решить эту систему, решать её на бумаге, когда можно переложить эту рутинную работу на плечи мощных вычислительных машин. Мы должны уметь понимать задачу и пользоваться готовым продуктом

Использованная литература

1. Бидасюк, Ю. М. Mathsoft MathCAD 11. Самоучитель. – СПб: Диалектика, 2004. – 224 с.

2. Бутенков, С. А. Методические указания к использованию системы MathCAD в практических занятиях по курсу высшей математики. – Таганрог: ТРТУ, 1995. – 450 с.

3. Герасимович, А. И. Математический анализ: Справ. пособие. В 2 ч. Ч. 1. / А. И. Герасимович, Н. А. Рысюк. – Мн.: выш. шк., 1989. – 287 с.: ил.

4. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: учеб. пособие. В 3 ч. Ч. 1 / А.П. Рябушко [и др.]; под ред. А.П. Рябушко. – Мн.: Вышэйшая школа, 1991. – 273 с.: ил.

5. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике: учеб. пособие. В 3 ч. Ч. 2 / А.П. Рябушко [и др.]; под ред. А.П. Рябушко. – Мн.: Вышэйшая школа, 1991. – 352 с.: ил.