

ЧЕРКОВСЬКИЙ Т.М.

## РЕГУЛЯРНІ ЄМНОСТІ НА МЕТРИЗОВНИХ ПРОСТОРАХ

Доведено, що для (не обов'язково компактного) метричного простору: метрики на просторі ємностей у стилі Прохорова та Зарічного є рівними; повнота простору ємностей рівносильна до повноти вихідного простору. Показано, що для ємностей на метризованих просторах властивості  $\omega$ -гладкості і  $\tau$ -гладкості є рівносильними саме на сепарабельних просторах, а властивості  $\omega$ -гладкості та регулярності щодо деякої (а тоді й кожної) сумісної метрики — саме на компактних просторах.

*Ключові слова і фрази:* регулярна ємність,  $\omega$ -гладкість,  $\tau$ -гладкість, метрика Гаусдорфа, повний метричний простір, сепарабельний простір.

Прикарпатський національний університет імені Василя Стефаника, Івано-Франківськ, Україна

E-mail: [tymofiy.cher@gmail.com](mailto:tymofiy.cher@gmail.com)

## ВСТУП

Неадитивні міри (ємності) є природним узагальненням адитивних та зліченно-адитивних мір. Вперше запроваджені Шоке [2], вони знайшли численні застосування у математичній фізиці, теорії оптимізації і особливо у математичній економіці і теорії прийняття рішень. Подібно до неоднозначності перенесення поняття компактності на неметризовані простори, маємо широку гаму означень неадитивної (тобто не обов'язково адитивної) міри [5]. Основні властивості, що утворюють означення “гарної” адитивної міри, зокрема, зовнішня та внутрішня регулярність, можна сформулювати різними способами, які у припущенні (зліченної) адитивності є рівносильними, однак без цього припущення рівносильність втрачається.

Ця стаття присвячена різним варіантам властивості зовнішньої регулярності. Зарічним та Никифорчином [6] було досліджено ємності на компактних гаусдорфових просторах і показано, що зовнішня регулярність рівносильна до відомої для зліченно-адитивних мір властивості  $\tau$ -гладкості [1]. Никифорчином і Реповшем [4] було встановлено, що саме означення ємності з використанням  $\tau$ -гладкості дозволяє максимально поширити отримані для компактів результати на тихоновські простори. Водночас природні неадитивні міри на метричних просторах не завжди мають властивість  $\tau$ -гладкості і навіть слабшу властивість  $\omega$ -гладкості.

Метою цієї праці є порівняння різних властивостей типу зовнішньої регулярності на метричних та метризованих просторах та з'ясування їх (не-)рівносильності залежно від властивостей цих просторів.

УДК 515.12, 517.518.11

2010 *Mathematics Subject Classification*: 25C15, 28E10.

## 1 ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І ПОЗНАЧЕННЯ

Пишемо  $A \subset_{cl} X$  (відповідно  $A \subset_{op} X$ ), якщо  $A$  є замкнутою (відповідно відкритою) підмножиною у просторі  $X$ . Позначаємо  $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ ,  $I = [0, 1]$ ,  $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty)$ . Компактом називаємо компактний гаусдорфовий простір. На дійсній прямій та її підмножинах розглядаємо стандартну топологію.

Для підмножини  $F$  і точки  $x$  метричного простору  $(X, d)$  позначаємо

$$d(x, F) = \inf\{d(x, y) \mid y \in F\}.$$

Якщо  $F$  замкнена у  $(X, d)$  та  $\varepsilon > 0$ , то множини

$$O_\varepsilon(F) = \{x \in X \mid d(x, F) < \varepsilon\} = \{x \in X \mid d(x, y) < \varepsilon \text{ для деякого } y \in F\}$$

та

$$\overline{O}_\varepsilon(F) = \{x \in X \mid d(x, F) \leq \varepsilon\}$$

є відповідно відкритою і замкнутою, і називаються відповідно відкритим та замкненим  $\varepsilon$ -околами  $F$ . Зауважимо, що остання множина для некомпактного  $(X, d)$  необов'язково збігається з множиною

$$\{x \in X \mid d(x, y) \leq \varepsilon \text{ для деякого } y \in F\},$$

хоча містить її, але збігається з перетином  $\bigcap_{\varepsilon' > \varepsilon} O_{\varepsilon'}(F)$ . Зокрема,  $B_\varepsilon(x_0) = O_\varepsilon(\{x_0\})$  і  $\bar{B}_\varepsilon(x_0) = \bar{O}_\varepsilon(\{x_0\})$  — відповідно відкрита та замкнена кулі з центром в точці  $x_0 \in X$  радіуса  $\varepsilon > 0$ .

Через  $\text{Exp } X$  позначаємо множину всіх замкнених підмножин топологічного простору  $X$ ,  $\text{exp } X = \text{Exp } X \setminus \{\emptyset\}$ . Топологія Вієторіса [3] на  $\text{exp } X$  — це найслабша з топологій, щодо яких всі множини

$$\langle U_1, U_2, \dots, U_n \rangle = \{F \in \text{exp } X \mid F \subset U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_n, F \cap U_i \neq \emptyset \text{ для всіх } i = 1, 2, \dots, n\}$$

для  $n \in \mathbb{N}$  і відкритих  $U_1, U_2, \dots, U_n \subset X$  є відкритими.

Якщо  $X$  — простір з обмеженою метрикою  $d$ , то на  $\text{exp } X$  розглядаємо метрику Гаусдорфа  $d_H$ :

$$d_H(F, G) = \inf\{\varepsilon \geq 0 \mid F \subset \overline{O}_\varepsilon(G), G \subset \overline{O}_\varepsilon(F)\}, \quad F, G \in \text{exp } X.$$

Відомо, що для метричного компакта метрика Гаусдорфа породжує топологію Вієторіса, але у некомпактному випадку це не завжди так.

## 2 КЛАСИ НЕАДИТИВНИХ МІР НА ТИХОНОВСЬКИХ І МЕТРИЧНИХ ПРОСТОРАХ

Регулярною неадитивною мірою [6] (регулярною ємністю) на тихоновському просторі  $X$  називаємо функцію  $c : \text{Exp } X \rightarrow \mathbb{R}_+$  з такими трьома властивостями (нижче  $F, G$  — замкнені підмножини в  $X$ ):

- (1)  $c(\emptyset) = 0$ ;
- (2) якщо  $F \subset G$ , то  $c(F) \leq c(G)$  (монотонність);
- (3) якщо  $c(F) \leq a$ , то існує така відкрита множина  $U \supset F$ , що для кожної множини  $G \subset U$  виконується  $c(G) < a$  (напівнеперервність згори чи зовнішня регулярність).

Якщо, крім того, виконано  $c(X) = 1$  ( $c(X) \leq 1$ ), то ємність називається *нормованою* (відповідно *субнормованою*).

Якщо топологія на просторі  $X$  визначена метрикою  $d$ , то розглядаємо сильнішу версію властивості (3), яку називаємо *регулярністю щодо метрики  $d$* :

(3') якщо  $c(F) \leq a$ , то існує таке  $\varepsilon > 0$ , що  $c(\overline{O}_\varepsilon(F)) < a$ .

Сім'ю множин  $(F_\alpha)$ , індексовану елементами  $\alpha$  частково впорядкованої множини  $(\mathcal{A}, \leq)$ , називаємо *монотонно спадною*, якщо з  $\alpha, \beta \in \mathcal{A}$ ,  $\alpha \leq \beta$  випливає  $F_\alpha \supset F_\beta$ .

Ємність  $c(F)$  називається  *$\omega$ -гладкою*, якщо для кожної монотонно спадної послідовності  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , замкнених множин в  $X$  виконується рівність  $\inf_{n \in \mathbb{N}} c(F_n) = c(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n)$ .

Ємність  $c(F)$  називається  *$\tau$ -гладкою* [4], якщо для кожної монотонно спадної спрямованості  $(F_\alpha)$  замкнених множин в  $X$  істинна рівність  $\inf_\alpha c(F_\alpha) = c(\bigcap_\alpha F_\alpha)$ .

Множину всіх ємностей на  $X$  позначаємо  $\bar{M}X$ . Множину всіх регулярних щодо метрики  $d$  (відповідно  $\omega$ -гладких,  $\tau$ -гладких) ємностей на  $X$  позначаємо  $\bar{M}_d X$  (відповідно  $\bar{M}_\omega X$ ,  $\bar{M}_\tau X$ ). Очевидно, що для метричного простору  $X$  виконано  $\bar{M}X \supset \bar{M}_d X \supset \bar{M}_\omega X \supset \bar{M}_\tau X$ . Для метричного компакта  $X$  всі ці множини рівні, тому вживаємо для них спільне позначення  $\bar{M}X$ . Множини всіх субнормованих та нормованих ємностей на  $X$  позначаємо відповідно  $\underline{M}X$  та  $MX$ , додаючи для не обов'язково компактного  $X$  індекси  $d$ ,  $\omega$  і  $\tau$  для підмножин з ємностей з відповідними властивостями.

Надалі всі ємності вважаємо регулярними та субнормованими, звідки  $c(F) \leq 1$  для кожної розглядуваної ємності  $c$  і  $F \subseteq_{cl} X$ . Кожній функції  $c$  на  $\text{Exp } X$  зі значеннями в  $I$  відповідає її *підграфік*

$$\text{sub } c = \{(F, \alpha) \in \text{exp } X \times I \mid \alpha \leq c(F)\}.$$

**Твердження 2.1.** Якщо функція  $c$  на  $\text{Exp } X$  має властивості (1), (2), то для множини  $S = \text{sub } c$ :

1.  $S \supset \text{exp } X \times \{0\}$ ;
2. з  $(F, \alpha) \in S$ ,  $F \subset G \subseteq_{cl} X$ ,  $\alpha \geq \beta \geq 0$  випливає  $(G, \beta) \in S$ .

Підмножина  $S \subset \text{exp } X \times I$  є графіком ємності на тихоновському просторі  $(X, \tau)$  (ємності, регулярної щодо метрики  $d$  на  $X$ ), якщо і тільки якщо вона задовольняє (1), (2) і є замкненою щодо топології добутку, де на  $\text{exp } X$  розглядається топологія Вієторіса (відповідно метрика Гаусдорфа).

### 3 МЕТРИКИ $\hat{d}$ ТА $\hat{\hat{d}}$

Надалі  $X$  — простір, топологія на якому визначена метрикою  $d$ .

Для ємностей  $c_1, c_2 \in \underline{M}_d X$  позначимо

$$\hat{d}(c_1, c_2) = \inf\{\varepsilon \geq 0 \mid \text{для кожної } F \in \text{exp } X : c_1(\overline{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon \geq c_2(F), c_2(\overline{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon \geq c_1(F)\}.$$

Очевидно, що  $0 \leq \hat{d}(c_1, c_2) \leq 1$ .

Нагадаємо, що інтеграли Шоке та Сугено щодо ємності  $c$  на  $X$  від функції  $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$  за означенням рівні

$$\int_X \varphi(x) dc(x) = \int_0^{+\infty} c(\{x \in X \mid \varphi(x) \geq \alpha\}) d\alpha - \int_{-\infty}^0 (1 - c(\{x \in X \mid \varphi(x) \geq \alpha\})) d\alpha$$

та

$$\int_X \varphi(x) \wedge dc(x) = \sup \{c(F) \wedge \inf_{x \in F'} \varphi(x) \mid F \subseteq_{Cl} X\}.$$

Нехай  $\text{Lip}(X, d)$  — множина всіх нерозтягуючих дійснозначних функцій на метричному просторі  $X$ . Якщо  $X$  — компакт, то для довільних  $c_1, c_2 \in MX$  Зарічним [6] запроваджено величину

$$\hat{d}(c_1, c_2) = \sup \{ \left| \int_X \varphi(x) dc_1(x) - \int_X \varphi(x) dc_2(x) \right| \mid \varphi \in \text{Lip}(X, d) \}.$$

Відомо, що для метричного компакта  $(X, d)$  функції  $\hat{d}$  та  $\hat{\hat{d}}$ , перша з яких введена з використанням замкнутих  $\varepsilon$ -околів, а друга — з використанням нерозтягуючих функцій, є метриками на множині нормованих ємностей  $MX$ , які визначають ту саму компактну топологію [6].

Для інтеграла Сугено  $\int_X \varphi(x) \wedge dc(x)$  вживаємо скорочення  $c(\varphi)$  і розглянемо аналог метрики Зарічного  $\hat{\hat{d}}$ , для якого зберігаємо те ж позначення :

$$\hat{\hat{d}}(c_1, c_2) = \sup \{ |c_1(\varphi) - c_2(\varphi)| \mid \varphi \in \text{Lip}(X, d) \},$$

де  $c_1, c_2 \in \underline{M}_d X$ .

Те, що  $\hat{\hat{d}}$  — метрика, випливає з наступної теореми.

**Теорема 1.** Для довільного метричного простору  $(X, d)$  функції  $\hat{d}$  та  $\hat{\hat{d}}$  на  $\underline{M}_d X \times \underline{M}_d X$  є рівними.

*Доведення.* Нехай  $\hat{d}(c_1, c_2) \leq \varepsilon$  для  $c_1, c_2 \in \underline{M}_d X$ , тобто

$$c_1(\overline{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon \geq c_2(F), \quad c_2(\overline{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon \geq c_1(F)$$

для кожної  $F \subseteq_{cl} X$ . Потрібно довести, що  $|c_1(\varphi) - c_2(\varphi)| \leq \varepsilon$  для довільної  $\varphi \in \text{Lip}(X, d)$ .

Нехай  $x \in \overline{O}_\varepsilon(F)$ , тоді для будь-якого  $\varepsilon' > \varepsilon$  існує таке  $x_0 \in F$ , що  $d(x, x_0) < \varepsilon'$ . Тоді для  $\varphi \in \text{Lip}(X, d)$  маємо  $|\varphi(x) - \varphi(x_0)| \leq d(x, x_0) < \varepsilon'$ . Враховуючи, що для кожного  $\varepsilon > 0$  з того, що  $F \subseteq \overline{O}_\varepsilon(F)$ , випливає  $\inf_{x \in F} \varphi(x) \geq \inf_{x \in \overline{O}_\varepsilon(F)} \varphi(x)$ , отримуємо:

$$0 \leq \inf_{x_0 \in F} \varphi(x_0) - \inf_{x \in \overline{O}_\varepsilon(F)} \varphi(x) \leq \varepsilon'.$$

Тому  $\inf_{x \in \overline{O}_\varepsilon(F)} \varphi(x) + \varepsilon' \geq \inf_{x \in F} \varphi(x)$ , а при  $\varepsilon' \rightarrow \varepsilon + 0$  матимемо:

$$\inf_{x \in F} \varphi(x) \leq \inf_{x \in \overline{O}_\varepsilon(F)} \varphi(x) + \varepsilon.$$

З останньої нерівності та формули метрики  $\hat{d}$  отримаємо:

$$c_1(F) \wedge \inf_{x \in F} \varphi(x) \leq (c_2(\overline{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon) \wedge \left( \inf_{x \in \overline{O}_\varepsilon(F)} \varphi(x) + \varepsilon \right) = c_2(\overline{O}_\varepsilon(F)) \wedge \inf_{x \in \overline{O}_\varepsilon(F)} \varphi(x) + \varepsilon.$$

Взявши з обох боків нерівності супремуми, матимемо:

$$\begin{aligned} \sup \{ c_1(F) \wedge \inf_{x \in F} \varphi(x) \mid F \subset_{cl} X \} &\leq \sup \{ c_2(\overline{O}_\varepsilon(F)) \wedge \inf_{x \in \overline{O}_\varepsilon(F)} \varphi(x) \mid F \subset_{cl} X \} + \varepsilon \\ &\leq \sup \{ c_2(F') \wedge \inf_{x \in F'} \varphi(x) \mid F' \subset_{cl} X \} + \varepsilon, \end{aligned}$$

тобто

$$\int_X^\vee \varphi(x) \wedge dc_1(x) \leq \int_X^\vee \varphi(x) \wedge dc_2(x) + \varepsilon.$$

Аналогічно до  $c_1(\varphi) \leq c_2(\varphi) + \varepsilon$  можна отримати нерівність  $c_2(\varphi) \leq c_1(\varphi) + \varepsilon$ . Отже,  $|c_1(\varphi) - c_2(\varphi)| \leq \varepsilon$ , а тому  $\hat{d}(c_1, c_2) \leq \varepsilon$ . Цим доведено, що  $\hat{d}(c_1, c_2) \leq \hat{d}(c_1, c_2)$ .

В інший бік: нехай тепер  $\hat{d}(c_1, c_2) \leq \varepsilon$ . Доведемо, що  $\hat{d}(c_1, c_2) \leq \varepsilon$ . Для кожної функції  $\varphi(x) \in \text{Lip}(X, d)$  маємо:

$$|c_1(\varphi) - c_2(\varphi)| = \left| \int_X^\vee \varphi(x) \wedge dc_1(x) - \int_X^\vee \varphi(x) \wedge dc_2(x) \right| \leq \varepsilon. \quad (*)$$

Нехай для  $F \subset_{cl} X$   $c_1(F) > \varepsilon$ , і нехай  $\varphi(x) = \max\{0, c_1(F) - d(x, F)\}$ . Тоді  $\varphi(x) \leq c_1(F)$ , а із цього та з означення інтеграла Сугено випливає, що  $c_1(\varphi) = \int_X^\vee \varphi(x) \wedge dc_1(x) = c_1(F)$ , а  $c_2(\varphi) = \int_X^\vee \varphi(x) \wedge dc_2(x) \leq c_1(F)$ . Враховуючи це разом із (\*), отримуємо:

$$\int_X^\vee \varphi(x) \wedge dc_2(x) \geq \int_X^\vee \varphi(x) \wedge dc_1(x) - \varepsilon > c_1(F) - \varepsilon - \Delta, \quad \Delta > 0.$$

Існує  $F' \subset_{cl} X$  таке, що  $c_2(F') \geq c_1(F) - \varepsilon - \Delta$  та  $\varphi|_{F'} \geq c_1(F) - \varepsilon - \Delta > 0$  для будь-якого  $\Delta > 0$ .

Оскільки  $F' \subset \overline{O}_{\varepsilon+\Delta}(F)$ , то  $c_2(\overline{O}_{\varepsilon+\Delta}(F)) \geq c_1(F) - \varepsilon - \Delta$ . При  $\Delta \rightarrow 0$  згідно регулярності ємності отримуємо

$$c_2(\overline{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon \geq c_1(F).$$

Таким чином, якщо  $c_1(F) > \varepsilon$ , то  $c_2(\overline{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon \geq c_1(F)$ . Якщо ж  $c_1(F) \leq \varepsilon$ , то  $c_2(\overline{O}_\varepsilon(F)) \geq 0 \geq c_1(F) - \varepsilon$ . Аналогічно на підставі симетричності метрики можна довести, що

$$c_1(\overline{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon \geq c_2(F).$$

Цим доведено, що  $\hat{d}(c_1, c_2) \leq \varepsilon$ , а тому  $\hat{d}(c_1, c_2) \leq \hat{d}(c_1, c_2)$ .

Отже,  $\hat{d}(c_1, c_2) = \hat{d}(c_1, c_2)$ . □

Нагадаємо, що гіперпростором включення на метричному просторі  $X$  називаємо непорожню сім'ю  $\mathcal{F}$  замкнених непорожніх підмножин  $X$ , таку, що:

- 1)  $\mathcal{F} \subset \exp X$  — замкнена щодо метрики Гаусдорфа;
- 2) якщо  $A \subset B \in \exp X$ ,  $A \in \mathcal{F}$ , то  $B \in \mathcal{F}$ .

Сукупність гіперпросторів включення на  $X$  позначаємо  $GX$  і розглядаємо як підпростір метричного простору  $\exp^2 X = \exp(\exp X)$  з метрикою  $d_{HH}$ .

На множині  $\underline{M}_d X$  ємностей, регулярних щодо метрики  $d$  на  $X$ , розглядаємо метрику  $\hat{d}$ , означену вище.

Розглянемо довільний гіперпростір включення  $\mathcal{F} \in GX$ . Він породжує нормовану ємність на  $X$ , регулярну щодо  $d$ , за формулою

$$c_{\mathcal{F}}(F) = \begin{cases} 0, & F \notin \mathcal{F}, \\ 1, & F \in \mathcal{F}. \end{cases}$$

Порівнюємо відстані Гаусдорфа між гіперпросторами включення і відстані між породженими ними ємностями.

**Твердження 3.1.** Для довільних гіперпросторів включення  $\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2 \in GX$  і відповідних ємностей  $c_{\mathcal{F}_1}, c_{\mathcal{F}_2}$  виконано рівність

$$\min\{d_{HH}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2), 1\} = \hat{d}(c_{\mathcal{F}_1}, c_{\mathcal{F}_2}).$$

*Доведення.* Оскільки при заміні метрики  $d$  на метрику  $d'(x, y) = \min\{d(x, y), 1\}$  відстань  $\hat{d}(c_{\mathcal{F}_1}, c_{\mathcal{F}_2})$  не змінюється, а  $d_{HH}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2)$  змінюється на  $\min\{d_{HH}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2), 1\}$ , без обмеження загальності можемо вважати, що метрика обмежена згори одиницею, і доводити, що відстань між сім'ями  $\mathcal{F}_1$  та  $\mathcal{F}_2$  та відстань між мірами  $c_{\mathcal{F}_1}$  і  $c_{\mathcal{F}_2}$ , побудованими на основі цих сімей, є рівними, тобто  $d_{HH}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = \hat{d}(c_{\mathcal{F}_1}, c_{\mathcal{F}_2})$ . Для цього потрібно показати для кожного  $\varepsilon < 1$ , що, якщо  $d_{HH}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \leq \varepsilon$ , то  $\hat{d}(c_{\mathcal{F}_1}, c_{\mathcal{F}_2}) \leq \varepsilon$ , та навпаки, якщо  $\hat{d}(c_{\mathcal{F}_1}, c_{\mathcal{F}_2}) \leq \varepsilon$ , то  $d_{HH}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \leq \varepsilon$ .

Нагадаємо, що метрики задані формулами:

$$d_{HH}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = \inf\{\varepsilon \geq 0 \mid \forall F_1 \in \mathcal{F}_1 \exists F_2 \in \mathcal{F}_2 : d_H(F_1, F_2) \leq \varepsilon, \\ \forall F_2 \in \mathcal{F}_2 \exists F_1 \in \mathcal{F}_1 : d_H(F_1, F_2) \leq \varepsilon\},$$

$$\hat{d}(c_{\mathcal{F}_1}, c_{\mathcal{F}_2}) = \inf\{\varepsilon \geq 0 \mid \forall F \in \exp X : c_{\mathcal{F}_1}(F) \leq c_{\mathcal{F}_2}(\overline{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon, \\ c_{\mathcal{F}_2}(F) \leq c_{\mathcal{F}_1}(\overline{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon\}.$$

Зауважимо, що при  $F_1 \in \mathcal{F}_1$ ,  $F_2 \in \mathcal{F}_2$ ,  $d_H(F_1, F_2) \leq \varepsilon$  маємо, що  $F_2 \subset \overline{O}_\varepsilon(F_1)$ , звідки  $\overline{O}_\varepsilon(F_1) \in \mathcal{F}_2$ .

Нехай  $d_{HH}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \leq \varepsilon$ . Доведемо, що  $\hat{d}(c_{\mathcal{F}_1}, c_{\mathcal{F}_2}) \leq \varepsilon$ . Розглянемо довільну непорожню замкнену множину  $F \subset X$ . Якщо  $c_{\mathcal{F}_1}(F) = 0$ , тобто  $F \notin \mathcal{F}_1$ , то  $c_{\mathcal{F}_1}(F) \leq c_{\mathcal{F}_2}(\overline{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon$ . Інакше  $F \in \mathcal{F}_1$ , тому  $\overline{O}_\varepsilon(F) \in \mathcal{F}_2$ , звідки  $c_{\mathcal{F}_2}(\overline{O}_\varepsilon(F)) = 1$ , і теж  $1 = c_{\mathcal{F}_1}(F) \leq c_{\mathcal{F}_2}(\overline{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon = 1 + \varepsilon$ .

Аналогічно отримуємо  $c_{\mathcal{F}_2}(F) \leq c_{\mathcal{F}_1}(\overline{O}_\varepsilon(F)) + \varepsilon$  для кожної замкненої підмножини  $F \subset X$ , звідки випливає нерівність  $\hat{d}(c_{\mathcal{F}_1}, c_{\mathcal{F}_2}) \leq \varepsilon$ .

Тепер залишилося показати, що при  $\hat{d}(c_{\mathcal{F}_1}, c_{\mathcal{F}_2}) \leq \varepsilon$  виконується  $d_{HH}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \leq \varepsilon$ . Для будь-якої  $F_1 \in \mathcal{F}_1$  маємо:

$$c_{\mathcal{F}_1}(F_1) \leq c_{\mathcal{F}_2}(\overline{O}_\varepsilon(F_1)) + \varepsilon.$$

Оскільки  $c_{\mathcal{F}_1}(F_1) = 1$ , то, враховуючи  $\varepsilon < 1$ , маємо  $c_{\mathcal{F}_2}(\overline{O}_\varepsilon(F_1)) > 0$ , тобто  $\overline{O}_\varepsilon(F_1) \in \mathcal{F}_2$ . Отже, існує множина  $F_2 = \overline{O}_\varepsilon(F_1) \in \mathcal{F}_2$ ,  $d_H(F_1, F_2) \leq \varepsilon$ . Аналогічно для  $F_2 \in \mathcal{F}_2$  маємо  $F_1 = \overline{O}_\varepsilon(F_2) \in \mathcal{F}_1$ , і теж  $d_H(F_1, F_2) \leq \varepsilon$ . Отже,  $d_{HH}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) \leq \varepsilon$ , а тому  $d_{HH}(\mathcal{F}_1, \mathcal{F}_2) = \hat{d}(c_{\mathcal{F}_1}, c_{\mathcal{F}_2})$ .  $\square$

Отже, простір гіперпросторів включення можна вважати топологічним, а за умови  $d \leq 1$  — і метричним підпростором простору ємностей.

Відомо, що, якщо  $(X, d)$  — повний метричний простір з обмеженою метрикою, то простір  $\exp X$ , наділений метрикою Гаусдорфа, є повним. Крім того, підпростір  $GX$  замкнений у повному просторі  $\exp^2 X = \exp(\exp X)$ , тому теж є повним.

Аналогічно можемо довести повноту простору субнормованих неадитивних мір, регулярних щодо повної метрики  $d$  на  $X$ . З допомогою Твердження 2.1 неважко перевірити, що сукупність підграфіків таких мір є замкненою у  $\exp(\exp X \times I)$ . Оскільки для довільних ємностей  $c_1, c_2 \in \underline{M}_d X$  відстань  $\hat{d}(c_1, c_2)$  дорівнює відстані Гаусдорфа між  $\text{sub } c_1$  і  $\text{sub } c_2$ , то :

**Теорема 2.** Якщо простір  $X$  є повним, то  $(\underline{M}_d X, \hat{d})$  повний.

Надамо також пряме доведення.

*Доведення.* Нехай  $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots \in \underline{M}_d X$  — фундаментальна послідовність ємностей. При потребі перейшовши до підпослідовності, можемо вважати, що

$$\hat{d}(c_1, c_2) \leq \frac{1}{2}, \quad \hat{d}(c_2, c_3) \leq \frac{1}{4}, \dots \quad \hat{d}(c_n, c_{n+1}) \leq \frac{1}{2^n}, \dots$$

Тоді для довільної замкненої множини  $F \subset X$  виконано  $c_i(\overline{O}_{\frac{1}{2^i}}(F)) + \frac{1}{2^i} \geq c_{i+1}(F)$ , звідки

$$c_i(\overline{O}_{\frac{1}{2^i}}(\overline{O}_{\frac{1}{2^i}}(F))) + \frac{1}{2^i} + \frac{1}{2^i} \geq c_{i+1}(\overline{O}_{\frac{1}{2^i}}(F)) + \frac{1}{2^i}.$$

Враховуючи, що  $\overline{O}_{\frac{1}{2^i}}(\overline{O}_{\frac{1}{2^i}}(F)) \subset \overline{O}_{\frac{1}{2^{i-1}}}(F)$ , маємо:

$$c_i(\overline{O}_{\frac{1}{2^{i-1}}}(F)) + \frac{1}{2^{i-1}} \geq c_{i+1}(\overline{O}_{\frac{1}{2^i}}(F)) + \frac{1}{2^i},$$

тому числова послідовність  $(c_i(\overline{O}_{\frac{1}{2^{i-1}}}(F)) + \frac{1}{2^{i-1}})_{i \in \mathbb{N}}$  є незростаючою і обмеженою знизу нулем. Позначимо її границю  $c_0(\overline{F})$ . Неважко перевірити, що функція  $c_0$  є регулярною щодо  $d$  ємністю і границею послідовності ємностей  $c_1, c_2, \dots, c_n, \dots$ .  $\square$

#### 4 ПОРІВНЯННЯ КЛАСІВ $\omega$ - Й $\tau$ -ГЛАДКИХ ЄМНОСТЕЙ НА СЕПАРАБЕЛЬНИХ ТА НЕСЕПАРАБЕЛЬНИХ ПРОСТОРАХ

**Теорема 3.** Для ємностей на метричному просторі  $X$  властивості  $\omega$ -гладкості й  $\tau$ -гладкості є еквівалентними, якщо і тільки якщо  $X$  є сепарабельним.

*Доведення.* Нехай  $X$  — сепарабельний простір, тобто в ньому міститься не більш ніж зліченна всюди щільна множина  $A$ ,  $c$  —  $\omega$ -гладка ємність на  $X$ ,  $\mathcal{F} = (F_\alpha)$  — спадна спрямованість замкнених множин в  $X$ , де  $\alpha$  належить деякій множині індексів з відношенням часткового порядку  $(\mathcal{I}, \leq)$ ,  $F_0 = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{I}} F_\alpha$ .

Позначимо  $\mathbb{Q}_+ = (0; +\infty) \cap \mathbb{Q}$  і покладемо

$$A_{\mathcal{F}} = \{(a, r) \mid a \in A, r \in \mathbb{Q}_+, B_r(a) \cap F_\alpha = \emptyset \text{ для деякого } \alpha \in \mathcal{I}\} \subset A \times \mathbb{Q}_+.$$

Для кожної скінченної підмножини  $\mathcal{H} \subset A_{\mathcal{F}}$  покладемо  $F_{\mathcal{H}} = X \setminus \bigcup_{(a,r) \in \mathcal{H}} B_r(a)$ . Ця множина є замкнутою, і для будь-яких скінчених  $\mathcal{H} \subset A_{\mathcal{F}}$  та  $\mathcal{H}' \subset A_{\mathcal{F}}$  виконано рівність  $F_{\mathcal{H} \cup \mathcal{H}'} = F_{\mathcal{H}} \cap F_{\mathcal{H}'}$ . Крім того, для кожного  $(a, r) \in A_{\mathcal{F}}$  за побудовою існує  $F_\alpha \subset F_{\{(a,r)\}}$ , тому за спрямованістю  $\mathcal{I}$  вгору для кожної скінченної  $\mathcal{H} \subset A_{\mathcal{F}}$  теж існує  $F_\alpha \subset F_{\mathcal{H}}$ . З іншого боку,  $F_\alpha = \bigcap_{F_{\mathcal{H}} \supset F_\alpha} F_{\mathcal{H}}$ , тому перетин усіх  $F_{\mathcal{H}}$  дорівнює перетину всіх  $F_\alpha$ , тобто  $F_0$ .

Оскільки множина  $A_{\mathcal{F}}$  зліченна, її можна зобразити як об'єднання послідовності скінченних підмножин  $\mathcal{H}_1 \subset \mathcal{H}_2 \subset \mathcal{H}_3 \subset \dots$ , звідки

$$c(F_0) = c(F_{\mathcal{H}_1} \cap F_{\mathcal{H}_2} \cap F_{\mathcal{H}_3} \cap \dots) = \inf\{c(F_{\mathcal{H}_1}), c(F_{\mathcal{H}_2}), c(F_{\mathcal{H}_3}), \dots\} \geq \inf_{\alpha} c(F_\alpha),$$

що й означає  $\tau$ -гладкість ємності  $c$ .

Нехай тепер  $X$  несепарабельний, тоді існує множина  $X_0 \subset X$  така, що  $|X_0| = \omega_1$ , та існує число  $\varepsilon > 0$ , що для будь-яких  $x_1, x_2 \in X_0$  виконується  $d(x_1, x_2) \geq \varepsilon$ . Розглянемо ємність, задану формулою:

$$c(F) = \begin{cases} 1, & |X_0 \setminus F| \leq \omega, \\ 0, & |X_0 \setminus F| > \omega. \end{cases}$$

Доведемо, що  $c(F)$  є  $\omega$ -гладкою ємністю, але не є  $\tau$ -гладкою. Нехай  $(F_n)$  — деяка спадна спрямованість замкнених множин в  $X$ , збіжна до  $F_0$ . Тоді  $F_0 = \bigcap_n F_n$ . Оскільки  $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots \supset F_0$ , то з властивості монотонності ємності отримуємо нерівність  $c(F_1) \geq c(F_2) \geq c(F_3) \geq \dots \geq c(F_0)$ . Потрібно довести, що  $\lim_{n \rightarrow \infty} c(F_n) = c(F_0)$ . Якщо  $F_1$  така, що  $|X_0 \setminus F_1| > \omega$ , то і  $|X_0 \setminus F_0| > \omega$ , а тому  $\lim_{n \rightarrow \infty} c(F_n) = c(F_0) = 0$ .

Нехай  $|X_0 \setminus F_1| \leq \omega$ ,  $|X_0 \setminus F_2| \leq \omega$ ,  $|X_0 \setminus F_3| \leq \omega, \dots$ . Тоді для будь-якого натурального числа  $n$  маємо  $c(F_n) = 1$ . Оскільки

$$(X_0 \setminus F_1) \cup (X_0 \setminus F_2) \cup (X_0 \setminus F_3) \cup \dots = \bigcup_n (X_0 \setminus F_n) = X_0 \setminus F_0,$$

то  $X_0 \setminus F_0$  — зліченне об'єднання злічених чи скінченних множин, яке також є не більш ніж зліченною множиною. Тому  $c(F_0) = 1$ . Отже  $c(F)$  є  $\omega$ -гладкою ємністю.

Тепер покажемо, що для ємності  $c$  властивість  $\tau$ -гладкості не виконується. Нехай  $2_f^{X_0} = \{B \subset X_0 \mid |B| \leq \omega\}$  — сім'я всіх не більш ніж злічених підмножин множини  $X_0$ . Впорядкуємо цю множину за зростанням. Замкнені множини  $F_B = X_0 \setminus B$  утворюють спадну спрямованість, і для кожної  $F_B$  ємність  $c(F_B)$  рівна 1, але  $\bigcap_{B \in 2_f^{X_0}} F_B = \emptyset$ , а тому  $c(\bigcap_{B \in 2_f^{X_0}} F_B) = 0$ . Отже,  $c(F)$  не є  $\tau$ -гладкою ємністю.  $\square$

## 5 ПОРІВНЯННЯ КЛАСІВ РЕГУЛЯРНИХ, РЕГУЛЯРНИХ ЩОДО МЕТРИКИ ТА $\omega$ -ГЛАДКИХ ЄМНОСТЕЙ НА МЕТРИЗОВНИХ ПРОСТОРАХ

Для простору  $\tau$ -гладких ємностей  $M_\tau X$  відомо, що якщо  $X$  — компакт, то класи  $\tau$ -гладких та регулярних ємностей на ньому співпадають, але у випадку некомпактних просторів це не так. Кожна  $\tau$ -гладка ємність є регулярною, проте зворотне є хибним [4]. З'ясуємо, чи збігається простір  $\omega$ -гладких ємностей  $\underline{M}_\omega X$  з простором регулярних ємностей  $\underline{M}X$ .



**Теорема 4.** Для метризовного простору  $X$  наступні твердження рівносильні:

- (1)  $X$  компактний;
- (2)  $\underline{M}_\omega X = \underline{M}X$ ;
- (3)  $\underline{M}_d X = \underline{M}_\omega X$  для деякої метрики  $d$ , сумісної з топологією на  $X$ ;
- (4)  $\underline{M}_d X = \underline{M}_\omega X$  для кожної метрики  $d$ , сумісної з топологією на  $X$ .

*Доведення.* Якщо  $X$  — компакт, то класи  $\underline{M}X$ ,  $\underline{M}_\omega X$  та  $\underline{M}_\tau X$  збігаються, тому з першого твердження випливають три інші. Очевидно, що з четвертого твердження випливає третє.

Якщо ж метризовний простір  $X$  некомпактний, то топологію на ньому можна визначити необмеженою метрикою  $d$ . Відповідно простір  $(X, d)$  не є цілком обмеженим, і існують  $\varepsilon > 0$  і підмножина  $A = (x_n \in X, n \in \mathbb{N})$  така, що  $d(x_i, x_j) \geq \varepsilon$  для кожних  $x_i, x_j \in A$ . Розглянемо функцію, задану формулою  $c(F) = \max(1 - \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{d(x_n, F)}{\varepsilon}, 0)$ . Зрозуміло, що  $0 \leq c(F) \leq 1$  для будь-якої замкненої  $F \subset X$ . Також, якщо  $F, G \in \exp X$ ,  $F \subset G$ , то  $c(F) \leq c(G)$ . Доведемо напівнеперервність згори. Якщо  $c(F) < a$ , то  $1 - \inf_{n \in \mathbb{N}} \frac{d(x_n, F)}{\varepsilon} < a$ , а тому

$\inf_{n \in \mathbb{N}} d(x_n, F) > (1 - a) \cdot \varepsilon$ . Позначивши  $\delta = \frac{\inf_{n \in \mathbb{N}} d(x_n, F) - (1 - a) \cdot \varepsilon}{2}$ , отримуємо  $\inf_{n \in \mathbb{N}} d(x_n, \overline{O}_\delta(F)) > (1 - a) \cdot \varepsilon$ , а тому  $c(\overline{O}_\delta(F)) < a$ . Отже, дана функція є регулярною ємністю.

Розглянемо спадну послідовність множин  $F_n = \{x_i \in A \mid i \geq n\}$ . Очевидно, що для будь-якого  $n \in \mathbb{N}$  маємо  $c(F_n) = 1$ , але  $c(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n) = c(\emptyset) = 0$ , тобто властивість  $\omega$ -гладкості не виконано, і  $\underline{M}_\omega X \neq \underline{M}X$ .

Крім того, у некомпактному метризовному просторі  $X$  існує спадна послідовність замкнених множин  $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \dots$  з порожнім перетином. Нехай метрика  $d$  сумісна з топологією на  $X$ . Не обмежуючи загальності, можна вважати, що точка  $x_0$  не належить до  $F_1$ . Покладемо для кожної замкненої  $F \subset X$ :

$$c(F) = \begin{cases} 0, & F = \emptyset, \\ \min\{1, \sup\{d(x_0, x) \mid x \in F\}\}, & F \neq \emptyset. \end{cases}$$

Тоді  $c$  субнормована і регулярна щодо метрики  $d$ , однак виконано  $c(\bigcap_{n \in \mathbb{N}} F_n) = c(\emptyset) = 0$ ,  $\inf_{n \in \mathbb{N}} c(F_n) \geq d(x_0, F_1) > 0$ , тому  $c$  не є  $\omega$ -гладкою, і  $\underline{M}_\omega X \neq \underline{M}_d X$ .

Цим від супротивного показано, що з другого або третього тверджень випливає перше твердження, тобто маємо потрібну рівносильність.  $\square$

Зрозуміло, що рівність  $\underline{M}X = \underline{M}_d X$  залежить від вибору конкретної сумісної з топологією на  $X$  метрики  $d$ , однак:

**Теорема 5.** Якщо множина граничних точок метричного простору  $X$  не компактна, то на  $X$  існує регулярна ємність, яка не є регулярною щодо жодної метрики, сумісної з топологією на  $X$ . Якщо ж множина граничних точок метричного простору  $X$  є компактною, то існує сумісна з топологією на  $X$  метрика, щодо якої є регулярною кожна регулярна (у топологічному сенсі) ємність на  $X$ .

Доведення наступного допоміжного твердження є очевидним.

**Лема 5.1.** Нехай  $(a_i^n)_{i \in \mathbb{N}}$ ,  $n \in \mathbb{N}$  — нескінченно малі послідовності додатніх чисел. Тоді існує така бієкція  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , що послідовність  $a_n^{\varphi(n)}$  містить як завгодно малі елементи.

Для довільної замкненої множини  $A \subset X$  задамо функцію  $c_A : \text{Exp } X \rightarrow I$  формулою:

$$c_A(F) = \begin{cases} 1, & F \supset A \\ 0, & F \not\supset A, \end{cases}$$

для кожної замкненої  $F \subset X$ . Очевидно, що ця функція є регулярною ємністю. Вживаємо позначення  $\bigwedge_{i \in I} f_i$  для поаргументного інфімуму сім'ї функцій  $(f_i)_{i \in I}$  зі спільною областю визначення. Зауважимо, що поаргументний інфімум регулярних ємностей є регулярною ємністю.

*Доведення теореми.* Нехай множина граничних точок простору  $X$  некомпактна. Тоді для довільної метрики  $d$ , сумісної з топологією на  $X$ , можна знайти послідовність граничних точок  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  простору  $X$  без збіжних підпослідовностей і попарно диз'юнктні замкнені кулі  $B_0^n$  щодо  $d$  з центрами у цих точках  $x_n$ . Для кожного  $n \in \mathbb{N}$  побудуємо послідовність  $(B_i^n)_{i \in \{0,1,2,\dots\}}$  куль з центром  $x_n$  і спадними до нуля радіусами так, щоб  $B_{i-1}^n \setminus B_i^n \neq \emptyset$  для всіх  $i \in \mathbb{N}$ .

Позначимо  $\Phi$  множину всіх бієкцій  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ . Для кожного  $\varphi \in \Phi$  покладемо  $A_\varphi = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} B_i^{\varphi(i)}$ , тоді зі сказаного вище зрозуміло, що множина  $A_\varphi$  замкнена і функція  $c = \bigwedge_{\varphi \in \Phi} c_{A_\varphi}$  є регулярною ємністю. Зауважимо, що значення  $c$  від довільної замкненої множини  $F \subset X$  рівне нулю, якщо існує така перестановка  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , що  $F$  не перетинає жодну з куль  $B_1^{\varphi(1)}, B_2^{\varphi(2)}, B_3^{\varphi(3)}, \dots$ , інакше  $c(F) = 1$ . Зокрема,  $c(F) = 1$ , якщо  $F$  містить одну з точок  $x_n$ .

Припустимо, що  $c$  регулярна щодо деякої сумісної з топологією на  $X$  метрики  $d'$ . Для кожного натурального  $n$  послідовність додатніх чисел  $a_i^n = \sup\{d'(x, x_n) \mid x \in B_{i-1}^n \setminus B_i^n\}$ ,  $i \in \mathbb{N}$ , прямує до нуля. За останньою лемою знайдемо таку перестановку  $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ , що для відповідно переставлених послідовностей  $(a_i^{\varphi(n)})_{i \in \mathbb{N}}$  діагональна послідовність  $(a_n^{\varphi(n)})_{n \in \mathbb{N}}$  містить як завгодно малі елементи. Оберемо по одній точці  $y_n$  з кожної різниці  $B_{n-1}^{\varphi(n)} \setminus B_n^{\varphi(n)}$  і позначимо  $Y = \text{Cl}(\{y_n \mid n \in \mathbb{N}\})$ . За побудовою  $c(Y) = 0 < 1$ , і повинно існувати таке  $\varepsilon > 0$ , що для кожної непорожньої замкненої множини  $F \subset X$  з  $d'_H(F, Y) \leq \varepsilon$  випливає  $c(F) < 1$ , тобто  $c(F) = 0$ . Але існує  $n \in \mathbb{N}$ , для якого  $d'(x_{\varphi(n)}, y_{\varphi(n)}) \leq a_n^{\varphi(n)} < \varepsilon$ , звідки для множини  $F = Y \cup \{x_{\varphi(n)}\}$  водночас  $d'_H(F, Y) \leq \varepsilon$  і  $c(F) = 1$  — суперечність.

Отже, побудована регулярна ємність  $c$  не є регулярною щодо жодної метрики  $d'$ , сумісної з топологією на  $X$ .

Нехай тепер множина  $X_0$  граничних точок простору  $X$  є компактною,  $d$  — довільна метрика, сумісна з топологією на  $X$ . Формула

$$d'(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ d(x, y) + d(x, X_0) + d(y, X_0), & x \neq y, \end{cases} \quad x, y \in X,$$

визначає метрику на  $X$ , топологічно еквівалентну до  $d$ , але з властивістю: якщо  $U$  — відкритий окіл замкненої множини  $F$  в  $X$ , то для деякого  $\varepsilon > 0$  виконано  $\overline{O}_\varepsilon(F) \subset U$ . Звідси негайно випливає, що кожна ємність  $c \in \underline{M}X$  є регулярною щодо  $d'$ .  $\square$

## ПРИКІНЦЕВІ ЗАУВАЖЕННЯ

У цій роботі з'ясовано тільки умови збігу різних класів регулярних мір на метричних і метризованих просторах. Топологічні властивості просторів таких мір з розглянутою метрикою (за винятком вже доведеної повноти простору регулярних щодо повної метрики ємностей) стануть предметом наступних публікацій. Зокрема, ці простори буде вивчено засобами нескінченновимірної топології.

## REFERENCES

- [1] Banach T.O. *Topology of spaces of probability measures, I: The functors  $P_\tau$  and  $\hat{P}$* . Mat. Stud. 1995, **5**, 65–87. (in Russian)
- [2] Choquet G. *Theory of Capacity*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 1953–1954, **5**, 131–295.
- [3] Fedorchuk V.V., Filippov V.V. *General topology: fundamental constructions*. MGU Publ., Moscow, 1988. (in Russian)
- [4] Nykyforchyn O.R., Repovš D. *Inclusion hyperspaces and capacities on Tychonoff spaces: functors and monads*. Topology Appl. 2010, **157** (15), 2421–2434. doi:10.1016/j.topol.2010.07.032
- [5] O'Brien G.L., W. Verwaat. *How subsadditive are subadditive capacities?* Comment. Math. Univ. Carolinae 1994, **35** (2), 311–324.
- [6] Zarichnyi M.M., Nykyforchyn O.R. *Capacity functor in the category of compacta*. Sbornik: Mathematics 2008, **199** (2), 159–184. doi:10.4213/sm1504

Надійшло 04.02.2014

Cherkovskyi T.M. *Regular capacities on metrizable spaces*. Carpathian Math. Publ. 2014, **6** (1), 166–176.

It is proved that for a (not necessarily compact) metric space: the metrics on the space of capacities in the sense of Zarichnyi and Prokhorov are equal; completeness of the space of capacities is equivalent to completeness of the original space. It is shown that for the capacities on metrizable spaces the properties of  $\omega$ -smoothness and of  $\tau$ -smoothness are equivalent precisely on the separable spaces, and the properties of  $\omega$ -smoothness and of regularity w.r.t. some (then w.r.t. any) admissible metric are equivalent precisely on the compact spaces.

*Key words and phrases:* regular capacity,  $\omega$ -smoothness,  $\tau$ -smoothness, Hausdorff metric, complete metric space, separable space.

Черковский Т.М. *Регулярные емкости на метризуемых пространствах* // Карпатские матем. публ. — 2014. — Т. 6, № 1. — С. 166–176.

Доказано, что для (не обязательно компактного) метрического пространства: метрики на пространстве емкостей в стиле Прохорова и Заричного равны; полнота пространства емкостей равносильна полноте исходного пространства. Показано, что для емкостей на метризуемых пространствах свойства  $\omega$ -гладкости и  $\tau$ -гладкости равносильны в точности на сепарабельных пространствах, а свойства  $\omega$ -гладкости и регулярности относительно некоторой (а тогда и любой) совместимой метрики — в точности на компактных пространствах.

*Ключевые слова и фразы:* регулярная емкость,  $\omega$ -гладкость,  $\tau$ -гладкость, метрика Хаусдорфа, полное метрическое пространство, сепарабельное пространство.