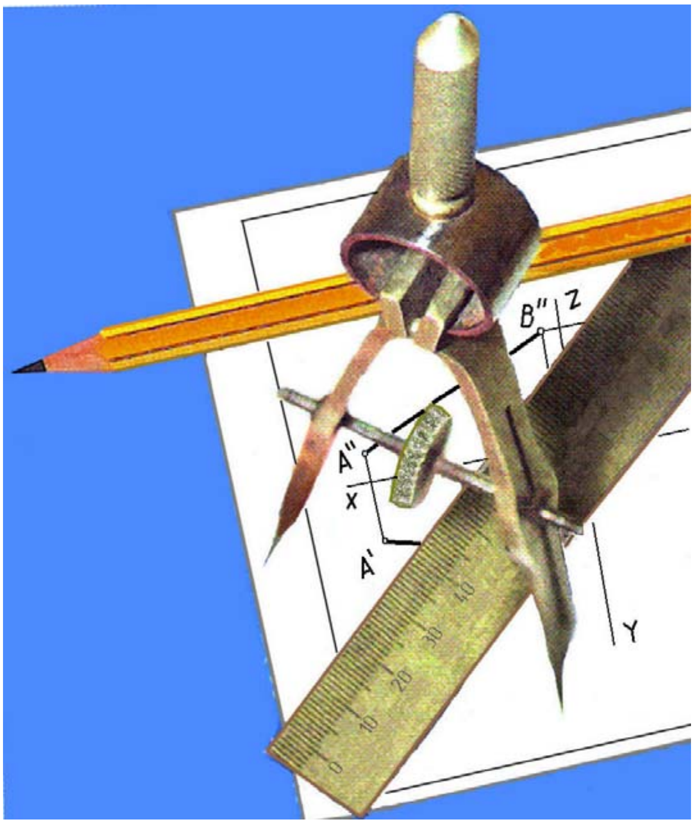
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
ПЕНЗЕНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Е.М. КИРИН, М.Н. КРАСНОВ

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПО НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Учебное пособие



ПЕНЗА 2007

ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ
Государственное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Пензенский государственный университет»

Е. М. Кирин, М. Н. Краснов

Теоретические основы решения задач по начертательной геометрии

Учебное пособие

Пенза
Издательство
Пензенского государственного
университета
2007

УДК 514
К43

Рецензенты:
Кафедра "Начертательная геометрия и графика"
Пензенского государственного университета архитектуры и строительства
Доктор технических наук, профессор кафедры "Детали машин"
Пензенской государственной сельскохозяйственной академии
П. А. Емельянов

Кирин Е. М,
К43

Теоретические основы решения задач по начертательной геометрии: учеб. пособие / Е. М. Кирин, М. Н. Краснов. - Пенза: Изд-во Пенз. гос. ун-та, 2007.-148 с. : ил.

Представлен краткий курс начертательной геометрии, обычно читаемой на кафедре "Начертательная геометрия и графика" ПГУ для студентов различных специальностей.

Учебное пособие соответствует образовательным стандартам и рабочим программам практически всех специальностей университета.

В основу учебного пособия положены принцип четкого и краткого изложения учебного материала, иллюстрации излагаемого материала пространственными и наглядными чертежами и примерами использования начертательной геометрии в пространстве, а также подкрепления материала многочисленными задачами различной сложности.

Учебное пособие подготовлено на кафедре "Начертательная геометрия и графика" и предназначено для студентов дневной, вечерней и заочной форм обучения.

УДК .514

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Начертательная геометрия по праву считается одной из основных общепрофессиональных дисциплин, изучаемых в высшей школе по многим инженерным специальностям.

Предметом начертательной геометрии является теоретическое обоснование и изложение методов построения пространственных форм на плоскости и способов решения задач геометрического характера по заданным изображениям этих форм.

Правила построения изображений основаны на методе проекций. Поэтому проекционный метод построения изображений является основным методом начертательной геометрии.

Изучение курса начертательной геометрии всегда связано с определенными трудностями, обусловленными своеобразием предмета, сложностью геометрических преобразований, а также отсутствием у многих учащихся опыта пространственного представления и воображения. Последнее обстоятельство предопределяет оторванность проекционного чертежа от реального пространства и геометрического объекта в этом пространстве, что затрудняет восприятие предмета. Поэтому изучение начертательной геометрии ставит целью:

- знать методы изображения пространственных форм на плоскости, т.е. научить составлять технический чертёж;
- развить способность по представленным проекциям мысленного воспроизведения объекта в пространстве, т.е. научить читать чертёж;
- освоить методы графического решения задач, связанных с пространственными формами.

В настоящем учебном пособии в упрощенной форме представлен курс начертательной геометрии для самостоятельного изучения на основе использования большого количества пространственных чертежей, исключения из курса малоприменяемых в производстве тем и подкрепления теоретического материала различными примерами и задачами.

Настоящее учебное пособие предназначено для студентов дневной, вечерней и заочной формы обучения. Оно может быть также полезно для аспирантов и преподавателей графических дисциплин.

1 МЕТОДЫ ПРОЕЦИРОВАНИЯ. ОРТОГОНАЛЬНОЕ ПРОЕЦИРОВАНИЕ ТОЧКИ

Для отображения геометрической фигуры на чертеже применяют операцию проецирования. Она заключается в том, что через точку пространства проводят проецирующую прямую до пересечения с плоскостью проекций. Точку пересечения проецирующей прямой с плоскостью проекций называют проекцией данной точки на данную плоскость проекций.

Различают следующие методы проецирования: центральное, параллельное (косоугольное и ортогональное), перспективное, аксонометрическое и др.

Центральное и перспективное проецирование нашло широкое применение в архитектуре и строительстве, ортогональное (прямоугольное) и аксонометрическое – в машино- и приборостроении.

Чертежи, построенные по методу проецирования, называются проекционными.

1.1 Центральное проецирование

Механизм отображения объектов на плоскости по методу центрального проецирования показан на рисунке 1.1а. В качестве аппарата центрального проецирования используются: **H** – плоскость проекций; **A,B,C** – геометрические объекты; **SA, SB, SC** – проецирующие прямые; **S** – центр проекций; $\mathbf{A'}$, $\mathbf{B'}$, $\mathbf{C'}$ - центральные проекции точек **A, B, C** на плоскость проекций **H**. Центральное проецирование заключается в проведении через объекты проецирующих прямых, исходящих из одного центра проекций **S**, до пересечения с плоскостью проекций. Основными свойствами центрального проецирования являются:

1. Каждой точке пространства соответствует одна единственная проекция;
2. Каждой проекции соответствует множество точек пространства, располагаемых на проецирующей прямой;
3. Проекцией прямой, совпадающей с проецирующей прямой, является точка.

Следствием второго свойства является то, что по одной проекции точки невозможно однозначно указать положение точки в пространстве. Для этого требуется иметь две проекции точки, полученные двумя проецирующими прямыми, проведенными из разных центров проекций (рисунок 1.1б).

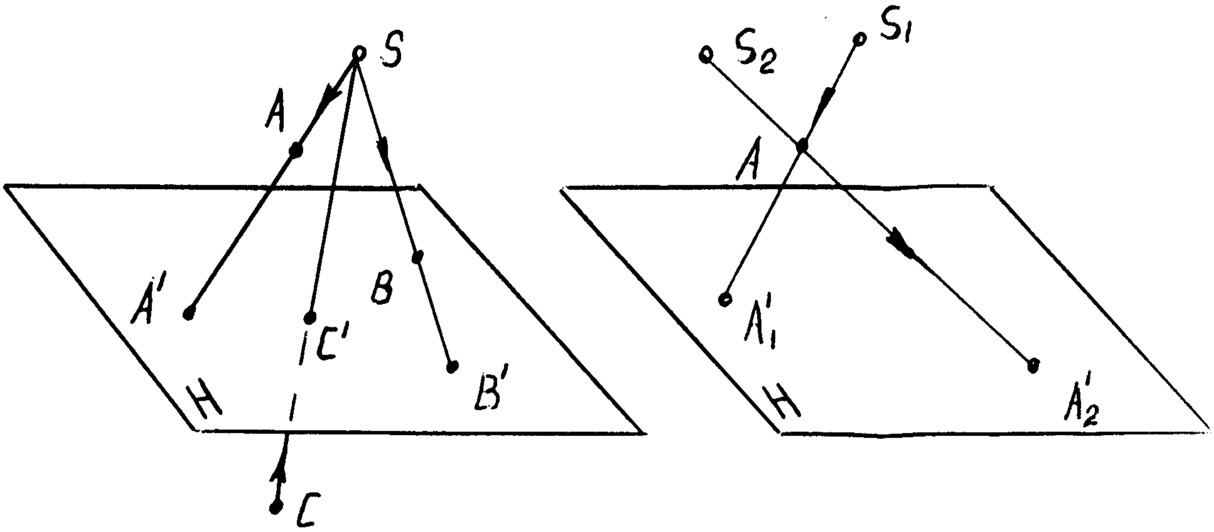
1.2 Параллельное проецирование

Параллельное проецирование осуществляется не из центра проекций, а параллельно направлению проецирования **S** (рисунок 1.2). В этом случае проекции точек называют параллельными проекциями.

Параллельное проецирование подразделяется на косоугольное (угол между проецирующей прямой и плоскостью проекций не равен 90 градусов) и прямоугольное или ортогональное (угол равен 90 градусов). Свойства параллельного проецирования аналогичны свойствам центрального проецирования.

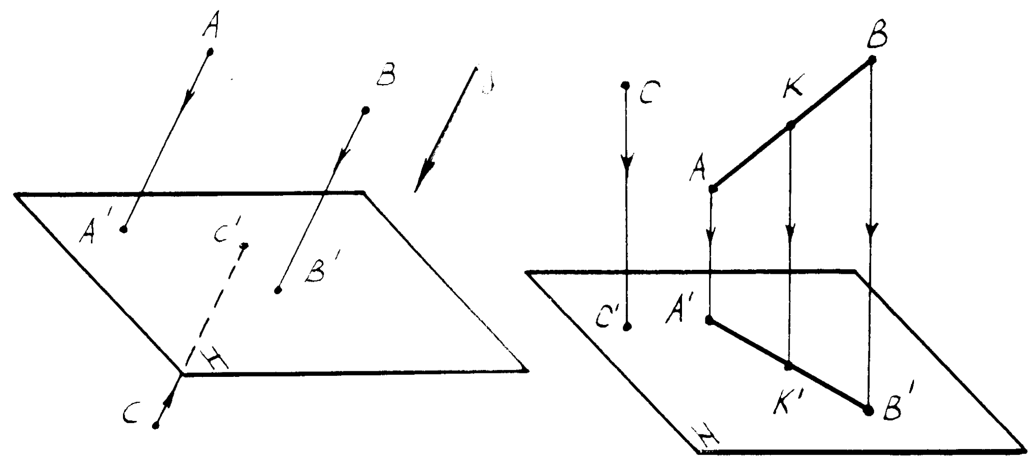
1.3 Ортогональное проецирование на одну плоскость проекций

Ортогональное проецирование является частным случаем параллельного проецирования. Оно заключается в проведении проецирующей прямой через объект перпендикулярно плоскости проекций



а) б)

Рисунок 1.1 – Центральное проецирование



а) б)

Рисунок 1.2 – Параллельное проецирование

Н (рисунок 1.2б). Кроме вышеуказанных свойств центрального проецирования можно привести дополнительно следующие свойства ортогонального проецирования:

1. Прямая и плоскость, параллельные плоскости проекций, проецируются на неё в натуральную величину (НВ);
2. Проекции прямой и плоскости, не параллельных плоскости проекций, всегда меньше самих прямой и плоскости;
3. Проекции прямой и плоскости, перпендикулярных плоскости проекций, отображаются соответственно в точку и прямую.

1.4 Ортогональное проецирование на две плоскости проекций

В связи с тем, что одна проекция точки однозначно не определяет положение точки в пространстве, применяется проецирование на две плоскости проекций (рисунок 1.3). При проецировании на две плоскости проекций в аппарат проецирования вводятся дополнительно линии связи $A^{/}A_x$ и $A_xA^{//}$. Плоскости проекций располагаются под углом 90 градусов друг к другу. Плоскость проекций **Н** назовем горизонтальной плоскостью проекций, а плоскость **V** – фронтальной плоскостью проекций.

В системе двух плоскостей проекций **Н** и **V** выделяют оси проекций: 0X – ось абсцисс, 0Y – ось ординат, 0Z – ось аппликат. Направление оси

0X влево, оси 0Y к наблюдателю, оси 0Z вверх приняты за положительные. Обратные направления приняты за отрицательные.

Проекция точки на горизонтальную плоскость проекций называется горизонтальной проекцией, а проекция на фронтальную плоскость –

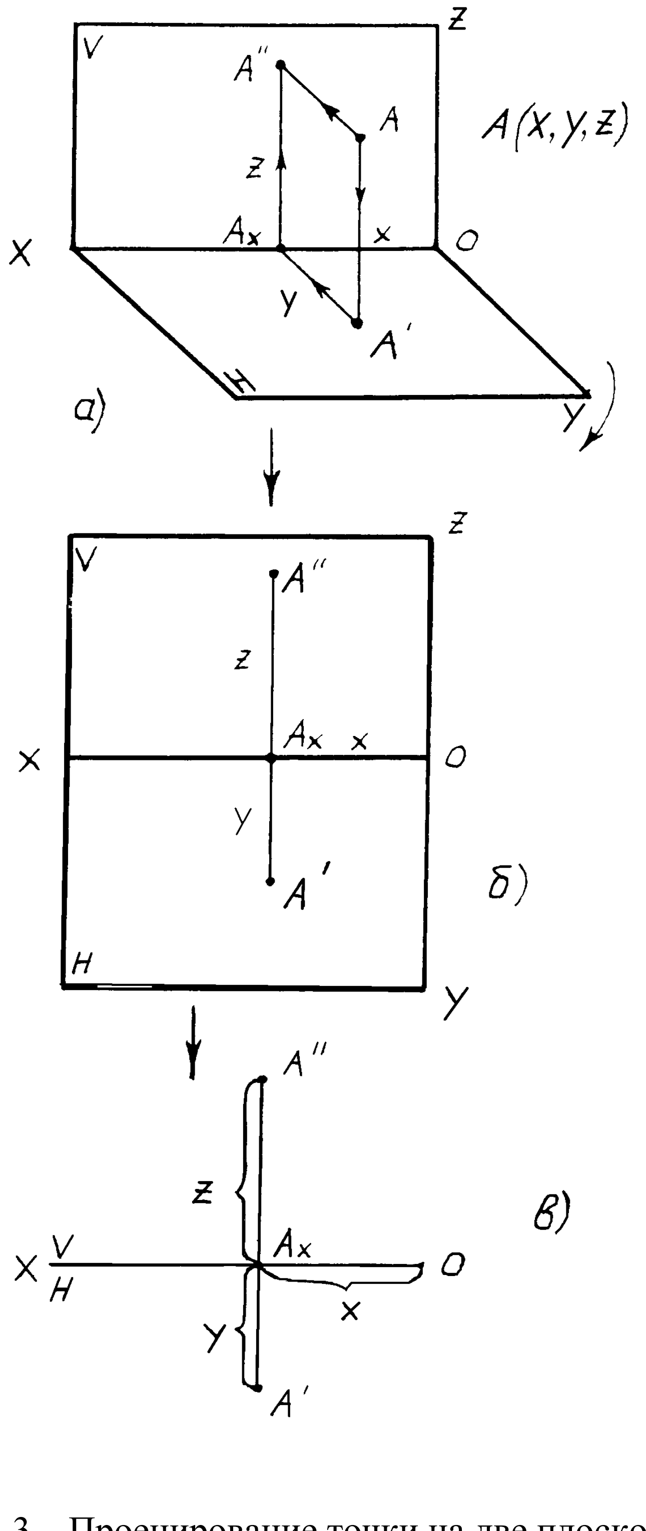


Рисунок 1.3 – Проецирование точки на две плоскости

фронтальной проекцией. Две проекции точки однозначно определяют положение точки в пространстве.

Преобразуем пространственный макет, представленный на рисунке 1.3а) в плоскостной. Для этого удалим саму точку, оставим лишь её проекции и линии связи. Плоскость проекций **H** повернем вокруг оси 0X так, как показано на рисунке 1.3а), до совмещения с плоскостью **V** (рисунок 1.3б). Далее удалим плоскости проекций и будем их только подразумевать. В результате преобразований получится плоскостной чертеж (рисунок 1.3в), который называют комплексным чертежом точки или эпюром Монжа. На эпюре указаны координаты точки, по которым можно определить положение точки в пространстве.

1.5 Ортогональное проецирование на три плоскости проекций

В некоторых случаях требуется проецирование на три плоскости проекций, если, например, геометрический объект имеет сложную конструкцию.

Введем в систему двух плоскостей проекций третью плоскость проекций – профильную плоскость **W** (рисунок 1.4). Геометрический объект в системе трех плоскостей проекций проецируют на плоскости **H, V** и **W** и получают три проекции одной точки – горизонтальную, фронтальную и профильную.

Если все три плоскости проекций продолжить в геометрическом пространстве во все стороны, то оно разделится тремя плоскостями на восемь частей, называемых октантами (рисунок 1.5). Октанты характеризуются различными знаками координат по осям 0X, 0Y и 0Z. Знаки координат точки в различных октантах представлены в таблице.

Знаки координат в октантах

Знаки по осям координат	Номер октанта							
	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII
0X	+	+	+	+	-	-	-	-
0Y	+	-	-	+	+	-	-	+
0Z	+	+	-	-	+	+	-	-

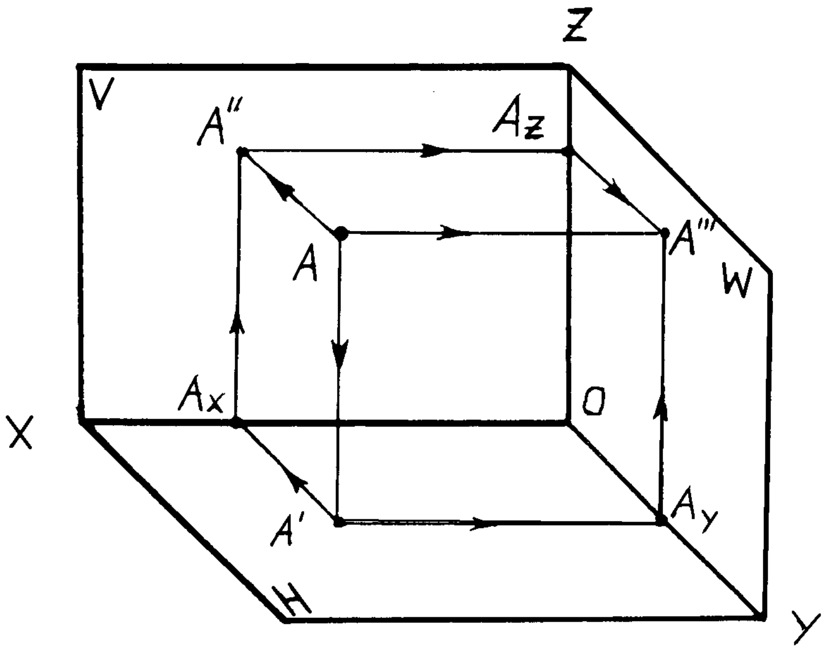


Рисунок 1.4 – Проецирование на три плоскости

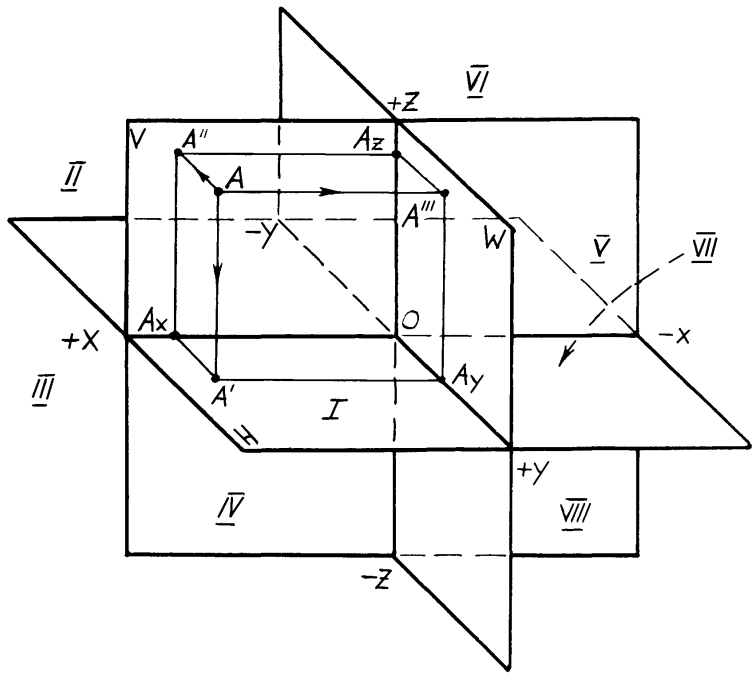


Рисунок 1.5 – Образование октантов

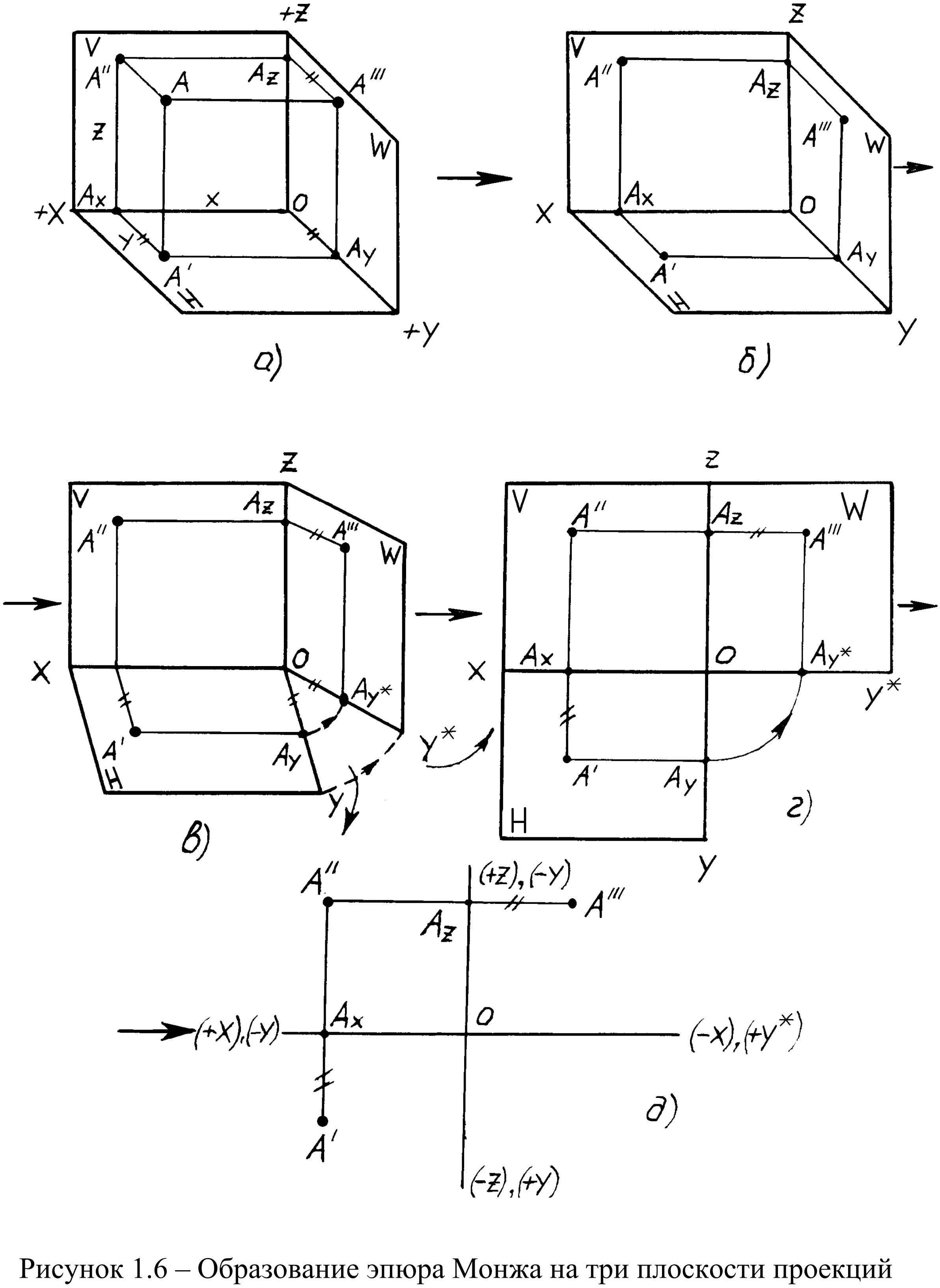


Рисунок 1.6 – Образование эпюра Монжа на три плоскости проекций

На рисунке 1.6 представлена трансформация пространственной модели первого октанта вместе с проекциями точки в эпюр:

а) Убирают геометрический объект, но сохраняют его проекции вместе с линиями связи (см. рисунок 1.6б);

б) Мысленно "разрезают" октант вдоль оси 0Y и разворачивают плоскости **H** и **W** так, как показано на рисунке 1.6в;

в) Получают плоскостную систему трех плоскостей проекций с осями, линиями связи и проекциями точки (см. рисунок 1.6г);

г) Удаляют плоскости проекций и сохраняют лишь оси. В результате преобразований получают комплексный чертеж точки или эпюр Монжа на три плоскости проекций (рисунок 1.6д). Следует заметить, что на эпюре образовалось две оси 0Y: одна ось относится к плоскости **H**, другая, помеченная звездочкой *, относится к плоскости **W**.

Эпюр точки в трех проекциях положен в основу начертательной геометрии и технического черчения.

Рассмотрим свойства эпюра Монжа, которые вытекают из пространственного чертежа ортогонального проецирования на три плоскости проекций и эпюра:

1) Горизонтальная проекция точки **А** определяется координатами X и Y, причем для её построения координата Y откладывается вдоль вертикальной оси 0Y;

2) Фронтальная проекция точки **А** определяется координатами X и Z;

3) Профильная проекция точки **А** определяется координатами Z и Y, причем координата Y откладывается вдоль горизонтальной оси 0Y*;

4) Горизонтальная и фронтальная проекции точки находятся на одной линии связи, перпендикулярной оси 0X;

5) Фронтальная и профильная проекции точки находятся на одной линии связи, перпендикулярной оси 0Z;

6) Отрезки на линиях связи $A_x A^{/} = A_z A^{///}$ равны как одна и та же координата Y. Такой же вывод следует из рассмотрения пространственного макета;

7) Из предыдущего свойства следует фундаментальное свойство эпюра Монжа – по двум проекциям точки можно построить третью.

Вышерассмотренное относилось к точке, расположенной в октанте в общем положении. Однако точка может принадлежать плоскостям проекций или осям. Такое положение точки называется частным положением.

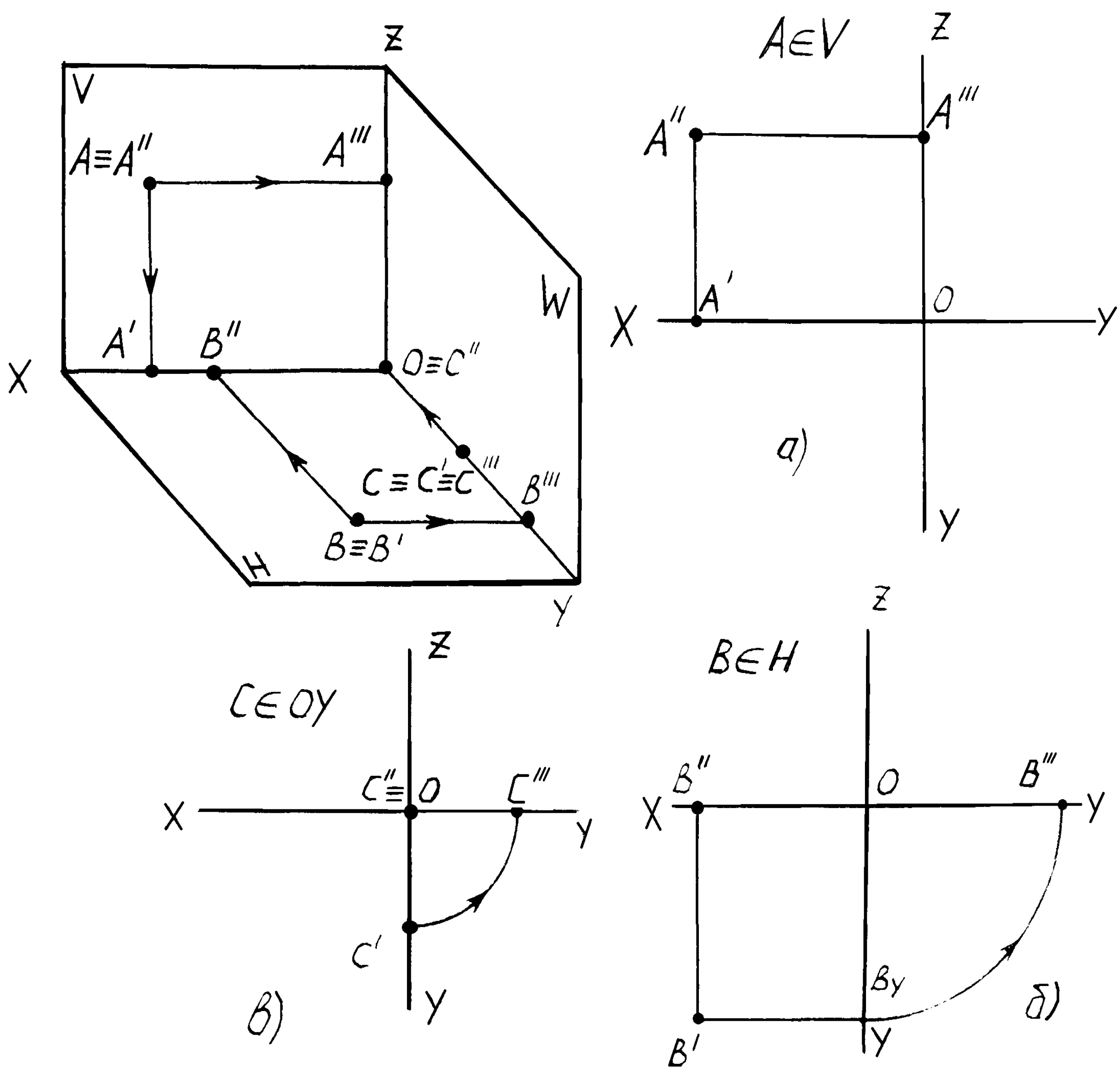


Рисунок 1.7 – Проекции точек частного положения

Из рисунка 1.7 видно, что если точка принадлежит какой-либо плоскости проекций, то две её проекции будут находиться на осях (рисунок 1.7а,б). Если точка принадлежит какой-либо оси проекций, то две её проекции будут находиться на осях, а третья проекция – в точке 0 (рисунок 1.7в).

На рисунке 1.8 представлена связь эпюра Монжа с проекционным черчением и методом проецирования, принятым в курсе технического черчения в соответствие с Единой системой конструкторской документации (ЕСКД).

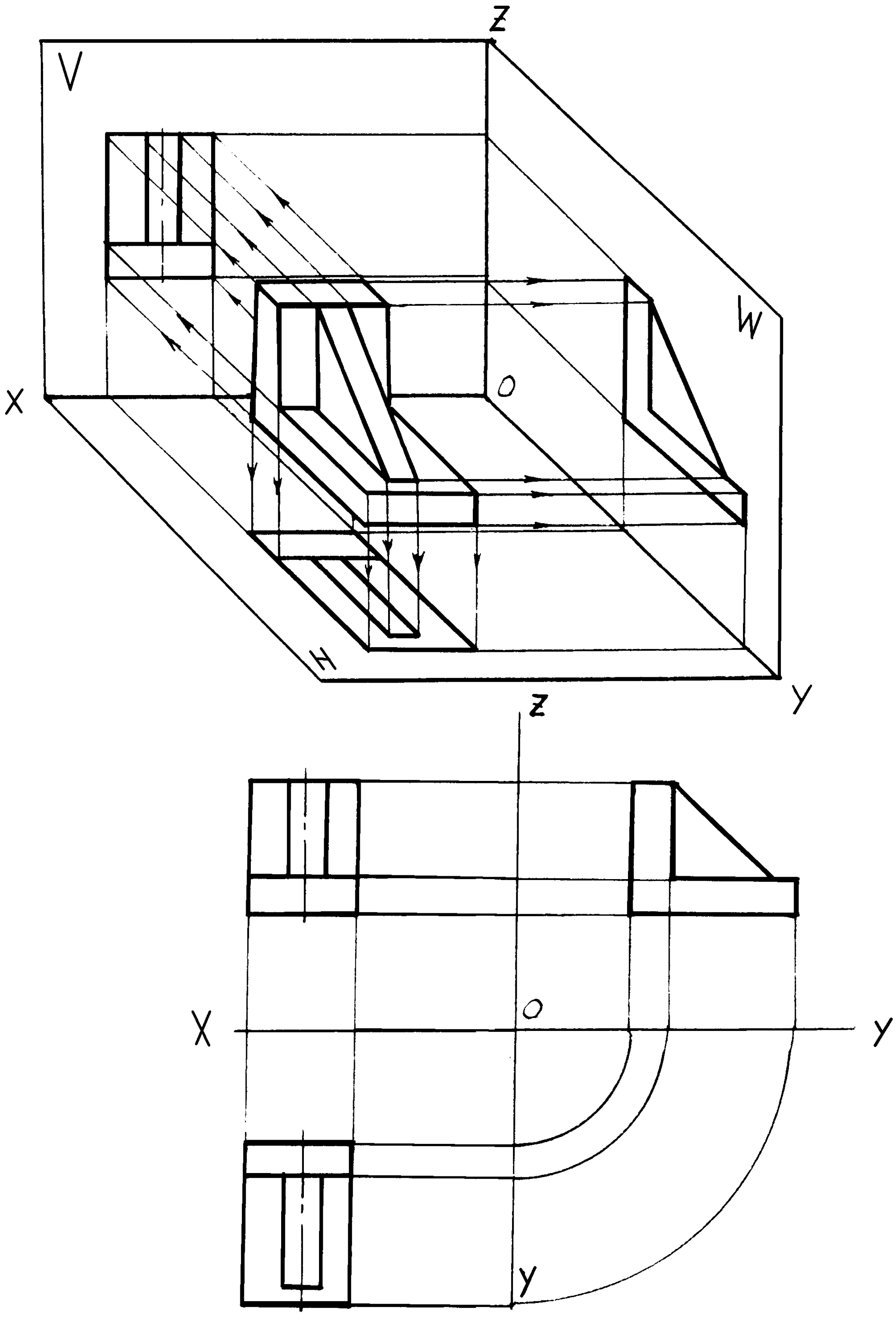


Рисунок 1.8 – Проекционный чертёж детали

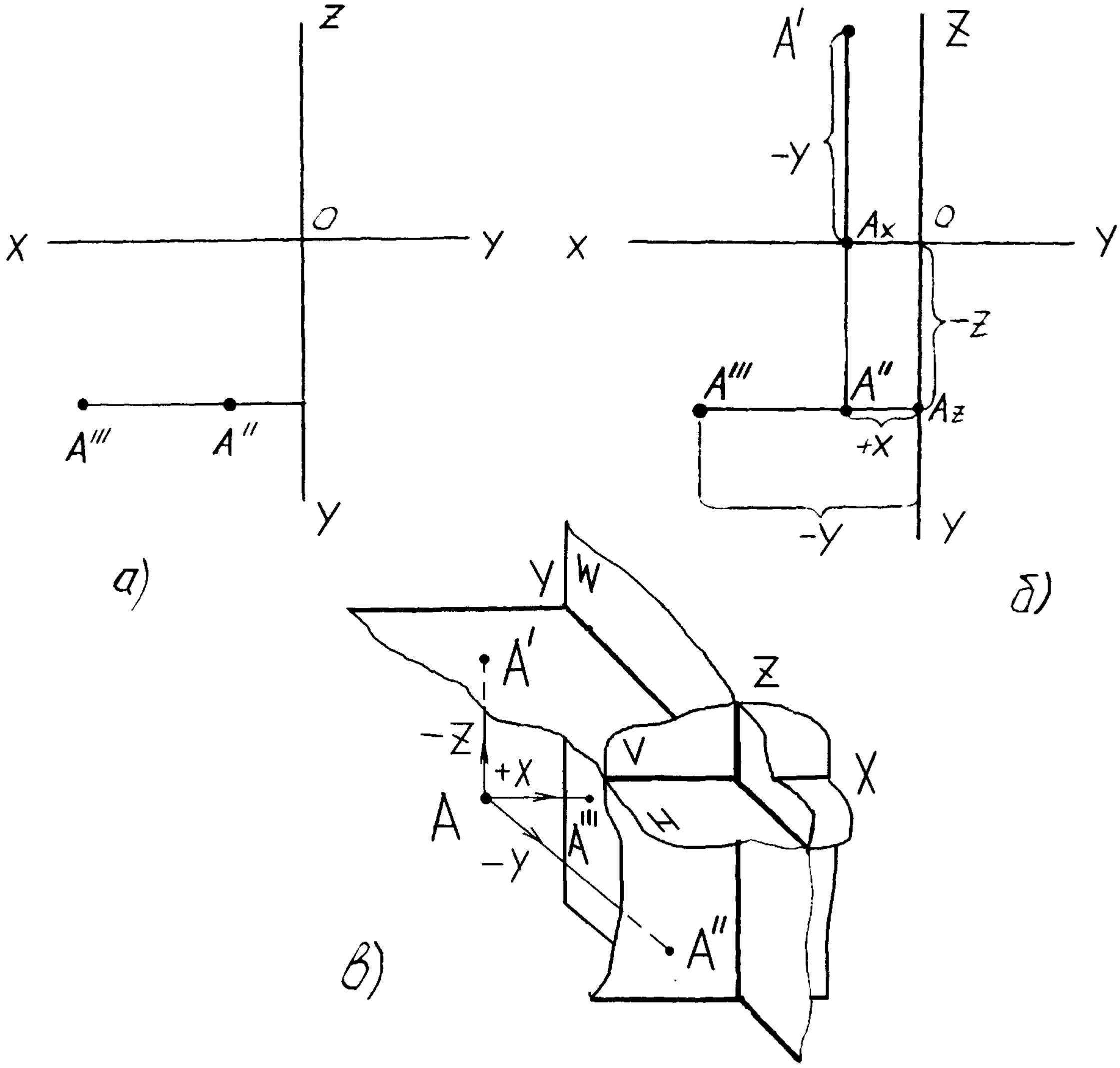


Рисунок 1.9

ПРИМЕР 1.1. Построить горизонтальную проекцию точки **А**. Определить № октанта, в котором расположена точка (рисунок 1.9а).

РЕШЕНИЕ. На рисунке 1.9в представлен пространственный макет задачи (его полезно делать при решении любой задачи). Решение задачи на эпюре показано на рисунке 1.9б.

1) Так как проекции $\mathbf{A}^{/}$ и $\mathbf{A}^{//}$ находятся на одной линии связи, перпендикулярной оси 0X, то через точку $\mathbf{A}^{//}$ проводим линию связи и получаем точку $\mathbf{A}_{\mathbf{x}}$.

2) Так как точка $\mathbf{A}^{/}$ строится по координатам X, Y, то от точки $\mathbf{A}_{\mathbf{x}}$ откладываем координату Y, которую берем с профильной проекции точки

(отрезок $\mathbf{A_z}$ $\mathbf{A}^{///}$ - это координата Y со знаком " – "). Координату Y откладываем вверх в сторону отрицательных значений оси Y. Получаем точку $\mathbf{A}^{/}$.

3) Определяем знаки координат точки: **A**(+, - , -). В соответствие с таблицей знаков точка находится в третьем октанте. Номер октанта можно определить еще методом исключений, анализируя знаки координат: если координата X имеет положительное значение, то это могут быть только I, II, III или IV октанты. Координата Y с минусом может быть только в октантах II или III. Координата Z с минусом может быть в третьем октанте.

2 ПРОЕЦИРОВАНИЕ ПРЯМОЙ ЛИНИИ

Отрезок прямой линии определяется двумя точками. Следовательно, проекции двух точек определяют проекции отрезка прямой (рисунок 2.1). Проекции отрезка прямой в общем случае всегда будут меньше самого отрезка прямой. В общем случае по проекциям отрезка прямой нельзя определить углы наклона отрезка прямой к плоскостям проекций.

2.1 Прямые общего и частного положения

Прямые подразделяются на прямые общего и частного положения. Прямая, не параллельная и не перпендикулярная ни одной из плоскостей проекций, называется прямой общего положения (рисунок 2.1а).

Прямые, параллельные или перпендикулярные плоскостям проекций, называются прямыми частного положения (рисунок 2.1б, в). Прямые, параллельные плоскостям проекций, называются по имени плоскости, которой они параллельны: горизонталь **h**, фронталь **f** и профильная прямая **w**.

Прямые, перпендикулярные плоскостям проекций, называются проецирующими: горизонтально-проецирующая, фронтально-проецирующая и профильно-проецирующая, в зависимости от плоскости, к которой они перпендикулярны.

2.2 Прямые, параллельные плоскостям проекций

Особенностью эпюра прямых, параллельных плоскостям проекций, является то, что две проекции прямой параллельны осям, а третья

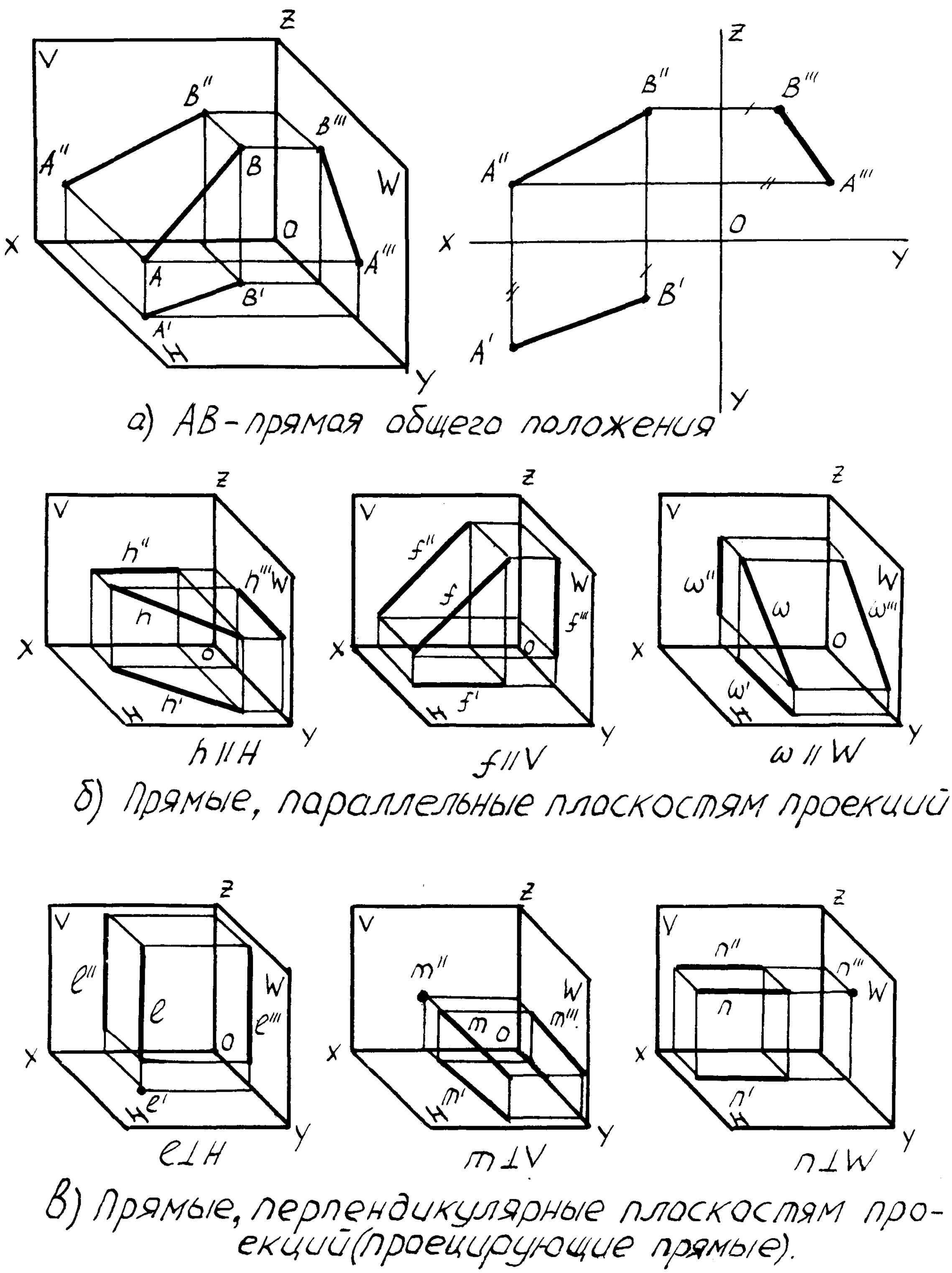


Рисунок 2.1 – Прямые общего и частного положения

проекция наклонена к осям и является натуральной величиной прямой. Кроме того, по этой проекции прямой можно определить угол наклона прямой к той или иной плоскости проекций.

Среди упомянутых прямых особое место занимают горизонталь **h** и фронталь **f** (рисунок 2.2), которые обладают замечательными свойствами и поэтому часто применяются при решении различных задач.

Важнейшими свойствами горизонтали являются: фронтальная проекция горизонтали $\mathbf{h}''$ всегда параллельна оси 0X; горизонтальная проекция горизонтали $\mathbf{h}'$ является натуральной величиной горизонтали; угол между $\mathbf{h}'$ и осью 0X является углом между горизонталью **h** и плоскостью проекций **V** (угол β^{o}). Важнейшие свойства фронтали: горизонтальная проекция фронтали $\mathbf{f}'$ всегда параллельна оси 0X; фронтальная проекция фронтали $\mathbf{f}''$ является НВ фронтали; угол между фронтальной проекцией фронтали и осью 0X является углом между фронталью и плоскостью проекций H (угол α^{o}).

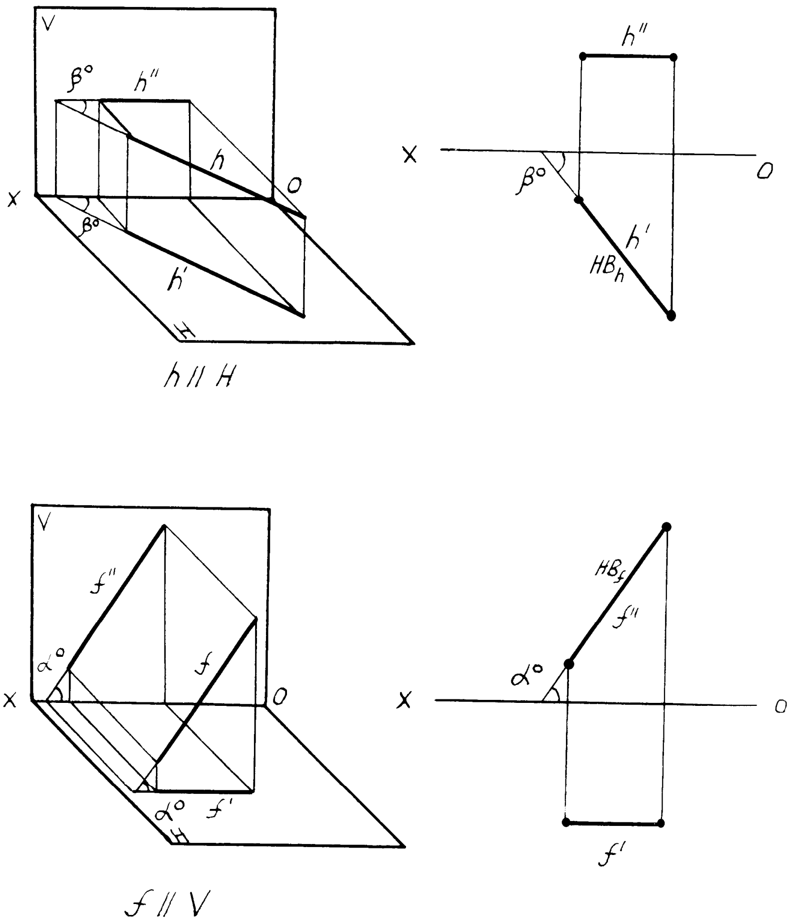


Рисунок 2.2 – Эпюры горизонтали и фронтали

2.3 Прямые, перпендикулярные плоскостям проекций

Особенностью эпюра прямых, перпендикулярных плоскостям проекций, является то, что две проекции этих прямых параллельны осям, а третья проекция "вырождается" в точку на той плоскости проекций, которой эта прямая перпендикулярна. Первые две проекции проецирующих прямых являются их натуральной величиной. На рисунке 2.3 представлены эпюры горизонтально- (а), фронтально- (б) и профильно-проецирующих прямых (в).

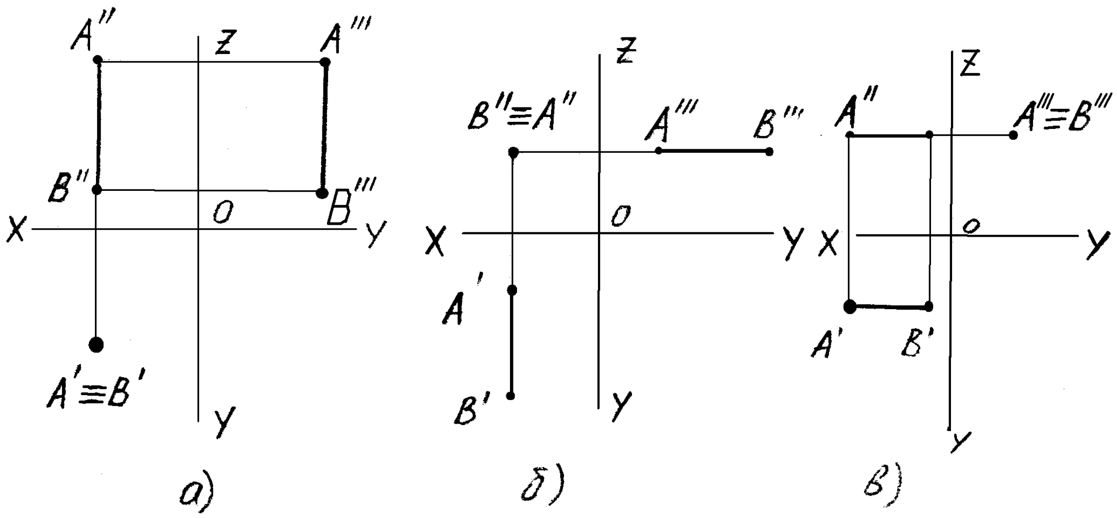


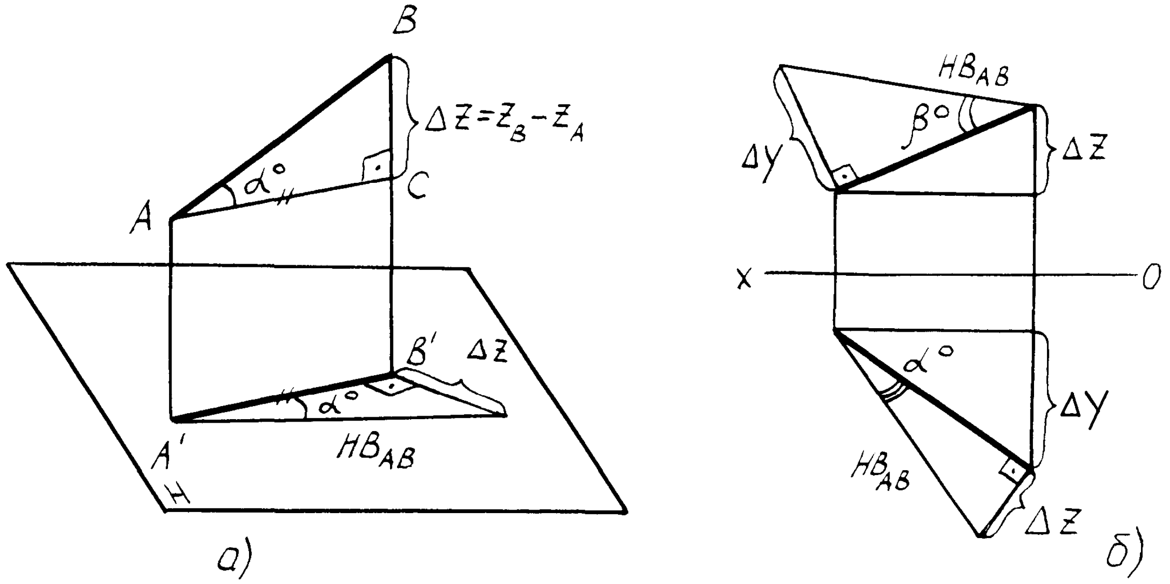
Рисунок 2.3 – Эпюры проецирующих прямых

2.4 Определение натуральной величины прямой

Так как прямая общего положения проецируется на плоскости проекций с искажением, то задача определения натуральной величины (НВ) прямой по её проекциям является важной. С целью определения НВ прямой разработан метод прямоугольного треугольника, сущность которого понятна из пространственного чертежа (рисунок 2.4а).

Для того, чтобы определить натуральную величину прямой по её проекциям, необходимо на одной из её проекций (на любой) построить прямоугольный треугольник, одним катетом которого является сама проекция, а другим катетом – разность недостающих координат концов отрезка прямой. Тогда гипотенуза треугольника будет являться НВ прямой (рисунок 2.4б).

Недостающей координатой здесь названа та координата, которая не участвует в построении той или иной проекции прямой. Так, например,



Рисунки 2.4 – Метод прямоугольного треугольника

горизонтальная проекция прямой строится по координатам X и Y её концов. Координата Z в построениях не участвует и называется недостающей координатой. Таким образом, при построении прямоугольного треугольника на горизонтальной проекции прямой на катете откладывают разность аппликат, а при построении на фронтальной проекции – разность ординат.

При определении НВ прямой методом прямоугольного треугольника одновременно можно определить углы наклона прямой к плоскостям проекций (углы α^o и β^o). Они определятся как углы между гипотенузой и соответствующей проекцией прямой.

2.5 Следы прямой

Точки пересечения прямой с плоскостями проекций называются следами прямой. В точках следов прямая переходит из одного октанта в другой. Различают горизонтальный, фронтальный и профильный следы прямой и их соответствующие проекции. На рисунке 2.5 показаны пространственные чертежи прямых общего и частного положения и образование их следов. Прямые, параллельные плоскостям проекций, имеют только два следа, а прямые, перпендикулярные плоскостям проекций, - один след, совпадающий с той проекцией прямой, на которой она проецируется в точку.

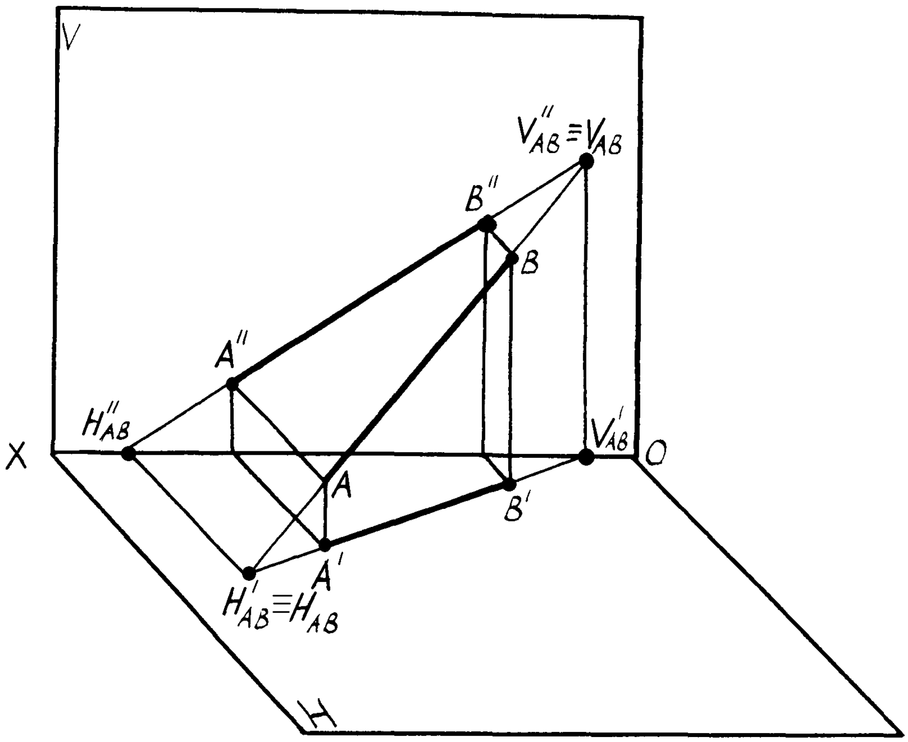


Рисунок 2.5 – Следы прямой

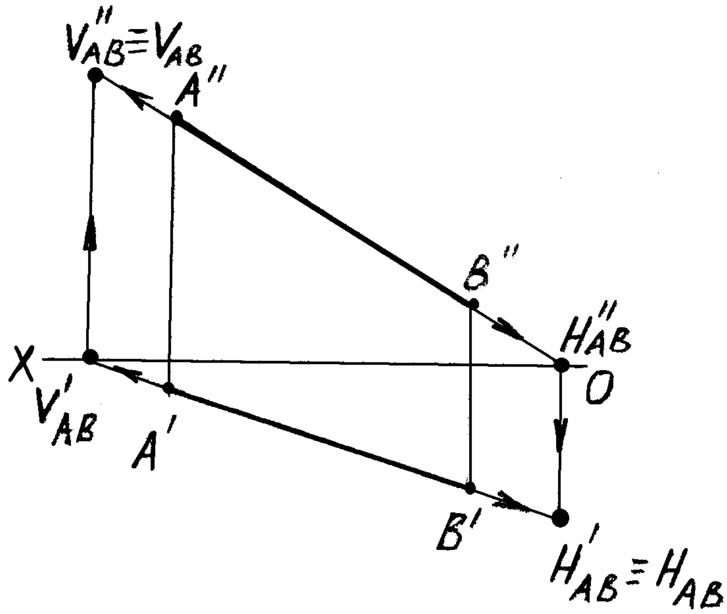


Рисунок 2.6 – Построение следов прямой

Из пространственных чертежей следует методика построения проекций следов прямой на эпюре (рисунок 2.6).

2.6 Взаимное положение прямых

Прямые в пространстве могут быть параллельными, пересекающимися, скрещивающимися и перпендикулярными.

Пространственные чертежи и эпюры параллельных и пересекающихся прямых представлены на рисунке 2.7а, б.

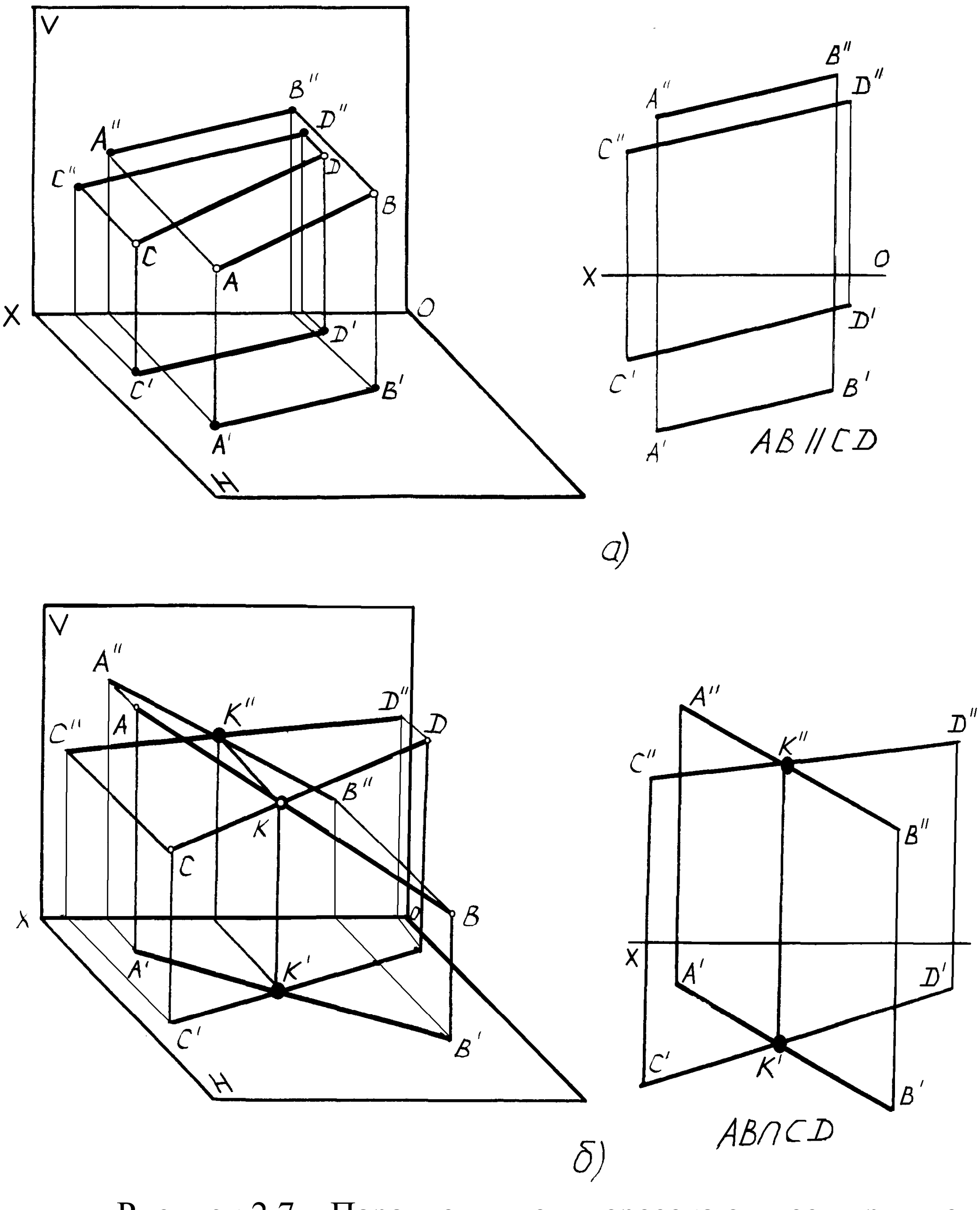


Рисунок 2.7 – Параллельные и пересекающиеся прямые

Признаком параллельных прямых на эпюре является параллельность их одноименных проекций.

Пересекающимися прямыми называются прямые, которые имеют общую точку – точку пересечения. Признаком пересекающихся прямых на эпюре является то, что проекции точки пересечения находятся на одной линии связи.

Частным случаем пересекающихся прямых являются перпендикулярные прямые. В соответствии с теоремой о проецировании прямого угла, прямой угол будет проецироваться на плоскость проекций в натуральную величину в том случае, когда одна из его сторон будет параллельна этой плоскости проекций (Рисунок 2.8).

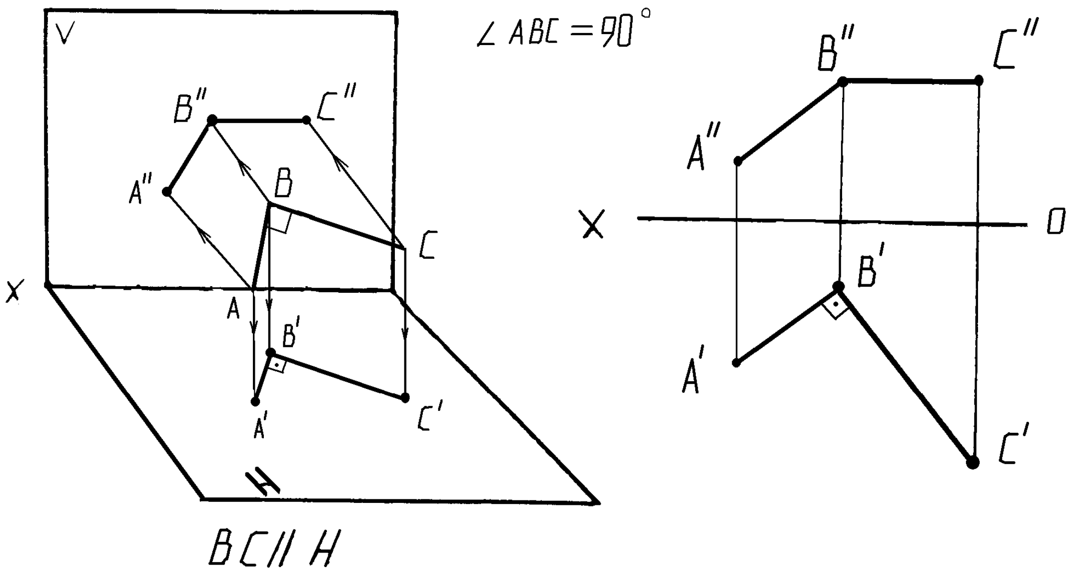


Рисунок 2.8 – Перпендикулярные прямые

Скрещивающимися прямыми называются непараллельные прямые, не имеющие общей точки. Скрещивающиеся прямые в пространстве не пересекаются, но на эпюре их одноименные проекции накладываются друг на друга, что создает впечатление пересечения. Признаком скрещивающихся прямых на проекциях является то, что проекции их мнимых точек пересечения не находятся на одной линии связи (рисунок 2.9а). В мнимых точках пересечения конкурируют две точки, принадлежащие разным прямым, или, другими словами, в мнимых точках конкурируют две прямые. Назовем эту область конкурирующим местом.

При рассмотрении скрещивающихся прямых возникает вопрос о видимости проекций прямых в конкурирующих местах. Этот вопрос может быть решен методом конкурирующих точек (конкурирующих прямых).

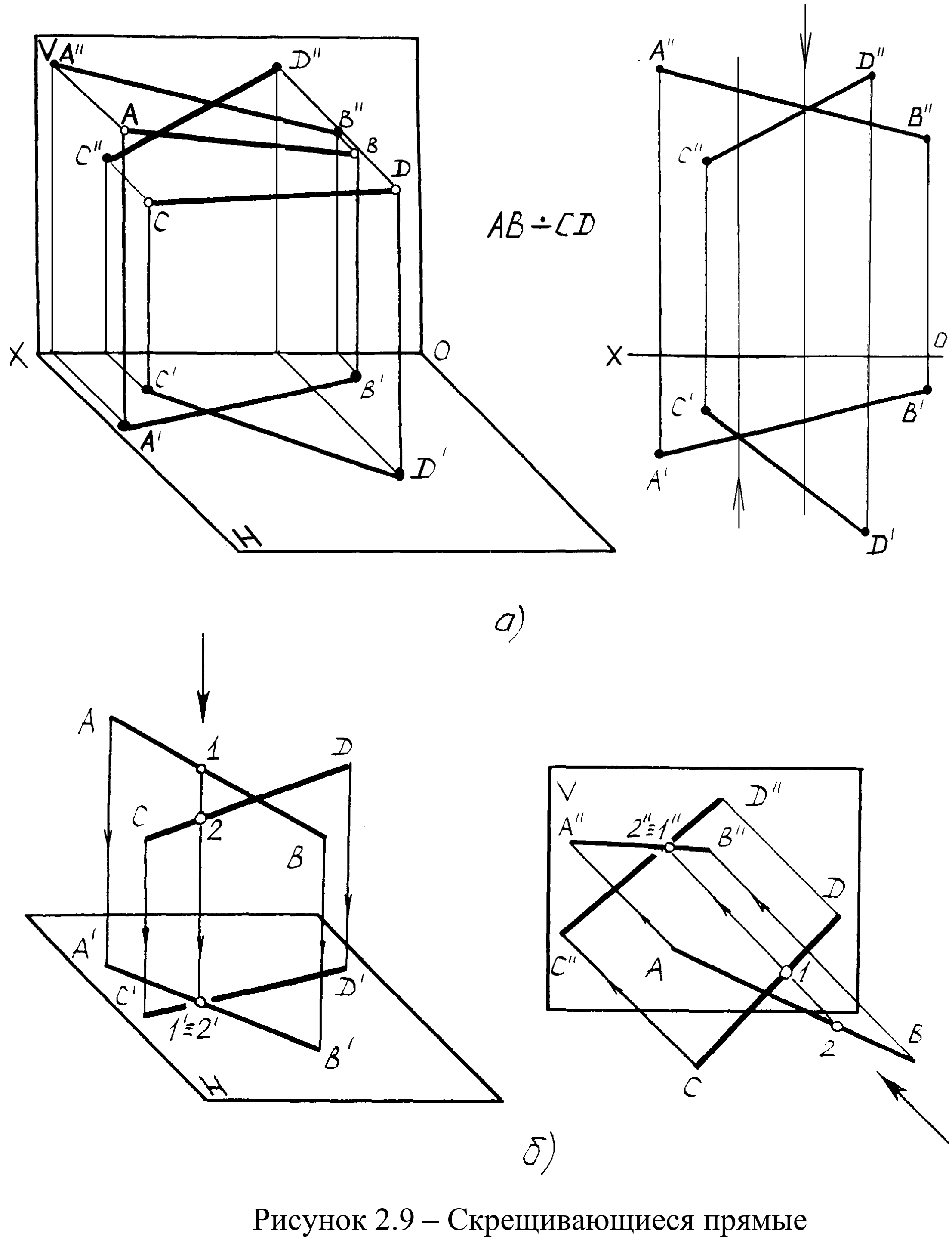


Рисунок 2.9 – Скрещивающиеся прямые

Сущность метода заключается в следующем:

1) Отметить конкурирующее место на рассматриваемой проекции;

2) Обозначить конкурирующие точки или записать, какие прямые конкурируют;

3) Провести через конкурирующее место линию связи;

4) Вдоль линии связи сравнить недостающие координаты конкурирующих точек или конкурирующих прямых;

5) На рассматриваемой проекции будет видна та точка или прямая, которая имеет наибольшую недостающую координату.

Так на рисунке 2.9б на горизонтальной проекции будет видна точка 1, принадлежащая прямой **AB**, или, проще говоря, прямая **AB**, так как аппликата прямой **AB** вдоль линии связи наибольшая. На фронтальной проекции также будет видна прямая **AB**, так как у неё в конкурирующем месте наибольшая ордината.

Метод конкурирующих точек (прямых) используется и при определении видимости проекций прямой и плоскости, двух плоскостей, прямой и поверхности, ребер многогранников и т.д. При этом считается, что плоскости и поверхности геометрически непрозрачны, а видимость прямой в точке встречи с плоскостью или в точках встречи с поверхностью меняется.

На рисунке 2.10 представлена пространственная схема определения видимости проекций прямой **MN** и плоскости **ABCD**, пересекающихся друг с другом в точке **K**. На горизонтальной проекции в конкурирующем месте будет видна прямая **BC**, так как её аппликата больше, чем у прямой **MN**. На фронтальной проекции в конкурирующем месте будет видна прямая **MN**, так как ордината у неё больше, чем у прямой **AB**.

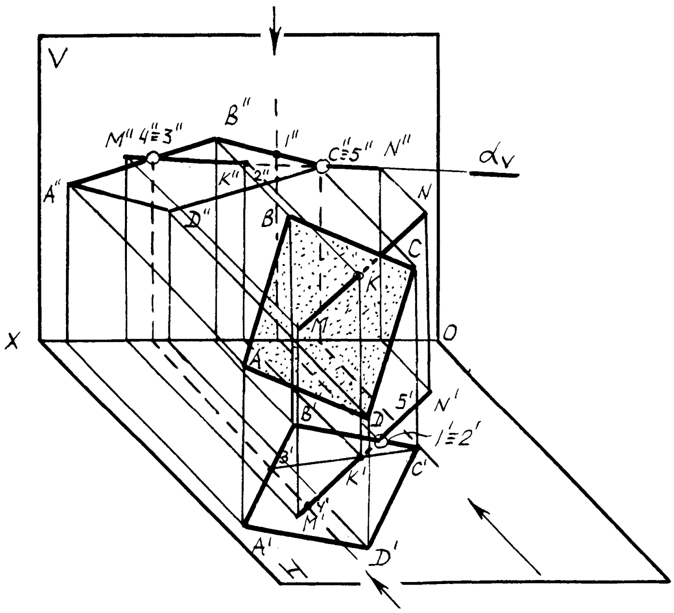


Рисунок 2.10 – Определение видимости прямой и плоскости

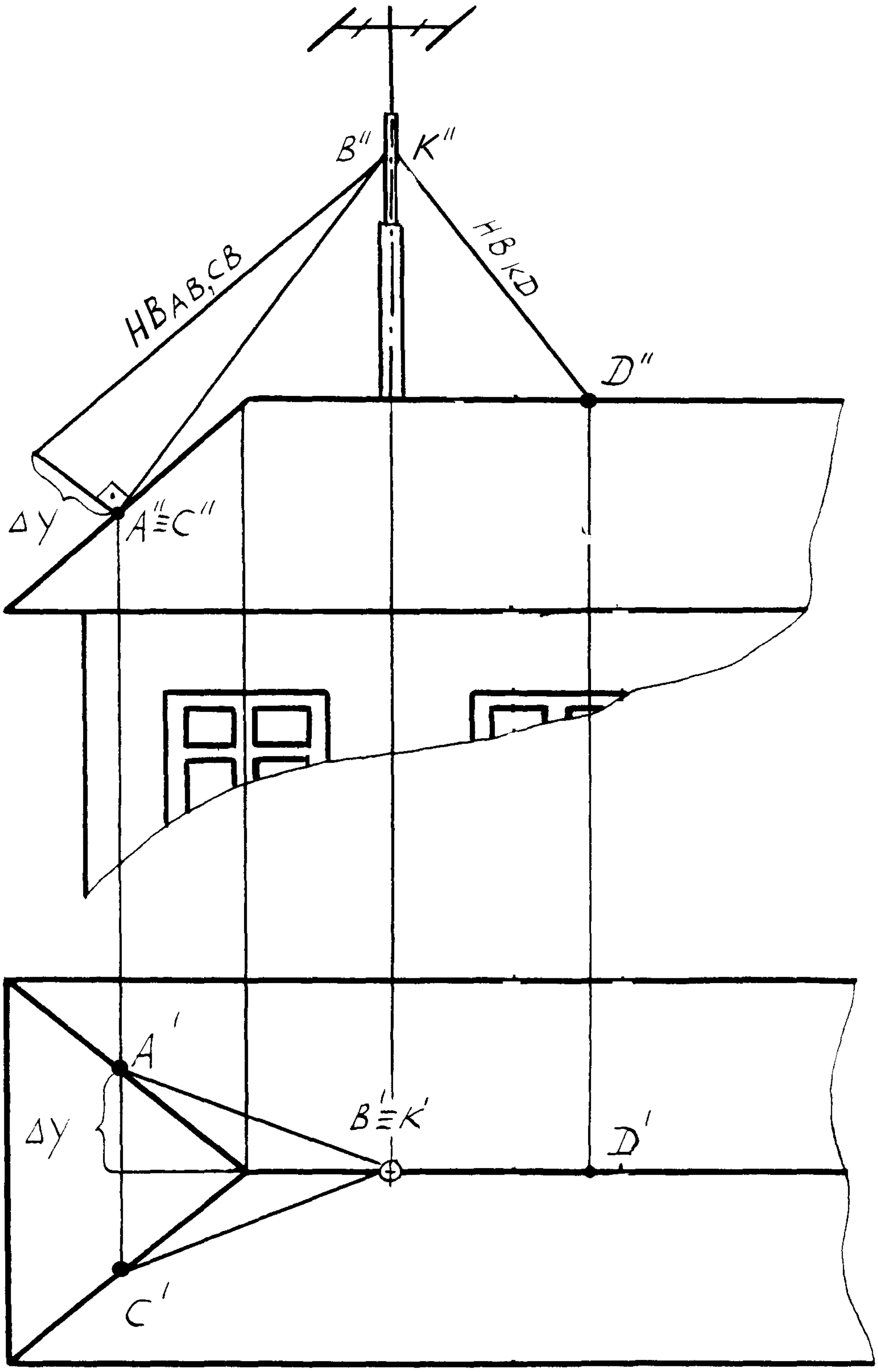


Рисунок 2.11

ПРИМЕР 2.1. Определить длину растяжек для крепления антенны к крыше здания (рисунок 2.11).

РЕШЕНИЕ. Длина растяжек **AB** и **BC** определена методом прямоугольного треугольника на фронтальной проекции. Длину растяжки **KD** определять не следует, так как прямая **KD** является фронталью и её фронтальная проекция **K**$^{//}$**D**$^{//}$ представляет НВ.

ПРИМЕР 2.2. Построить следы прямой **AB** и определить октанты, через которые проходит прямая (рисунок 2.12).

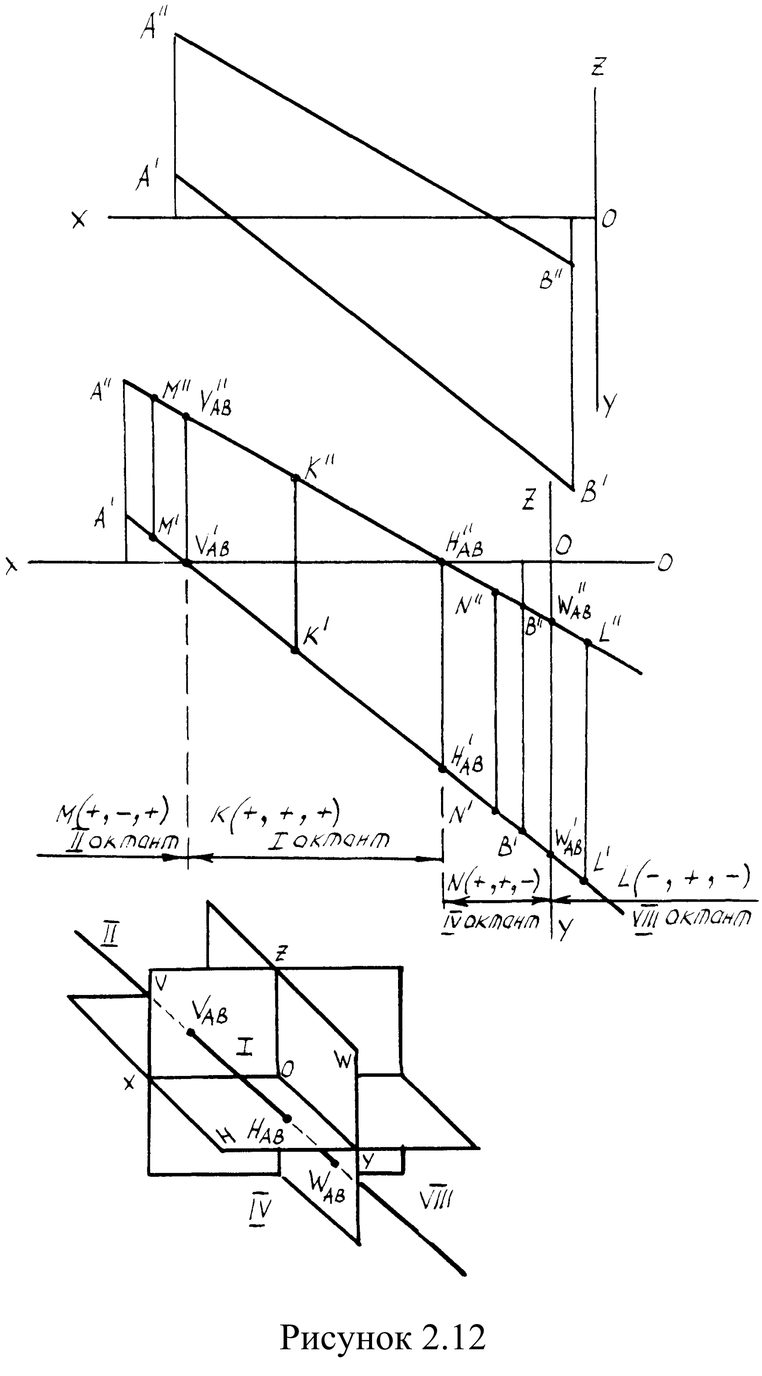
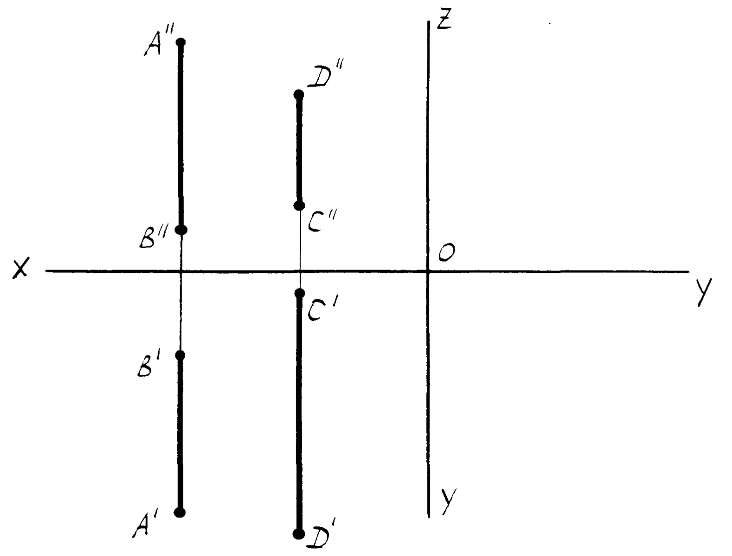


Рисунок 2.12

РЕШЕНИЕ. Задача решена в пространстве и на эпюре. Так как проекции прямой пересекают оси 0X и 0Y, то в точках пересечения и будут находится проекции горизонтального, фронтального и профильного следов прямой. Далее по знакам координат точек **M, K, N, L** определяем, что прямая проходит через октанты II, I, IV и VIII.

ПРИМЕР 2.3. Определить взаимное положение прямых **AB** и **CD** (рисунок 2.13).



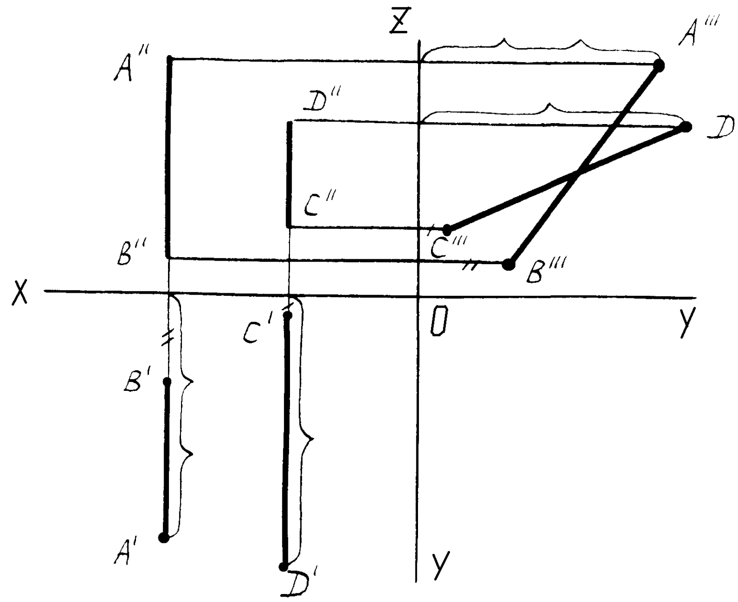


Рисунок 2.13

РЕШЕНИЕ. Анализ проекций двух заданных прямых приводит к выводу, что они являются профильными прямыми, так как обе их проекции параллельны осям 0Y и 0Z. Анализ взаимной параллельности одноименных проекций позволяет сделать предварительный вывод о том, что прямые **AB** и **CD** параллельны друг другу. Однако такой вывод неправомерен, так как для профильных прямых следует проверить параллельность на профильной проекции. Построив профильные проекции $\mathbf{A}^{///}$ $\mathbf{B}^{///}$ **и** $\mathbf{C}^{///}\mathbf{D}^{///}$, видно, что прямые скрещиваются.

ПРИМЕР 2.4. Разделить отрезок прямой **AB** в отношении 2:3 (рисунок 2.14а).

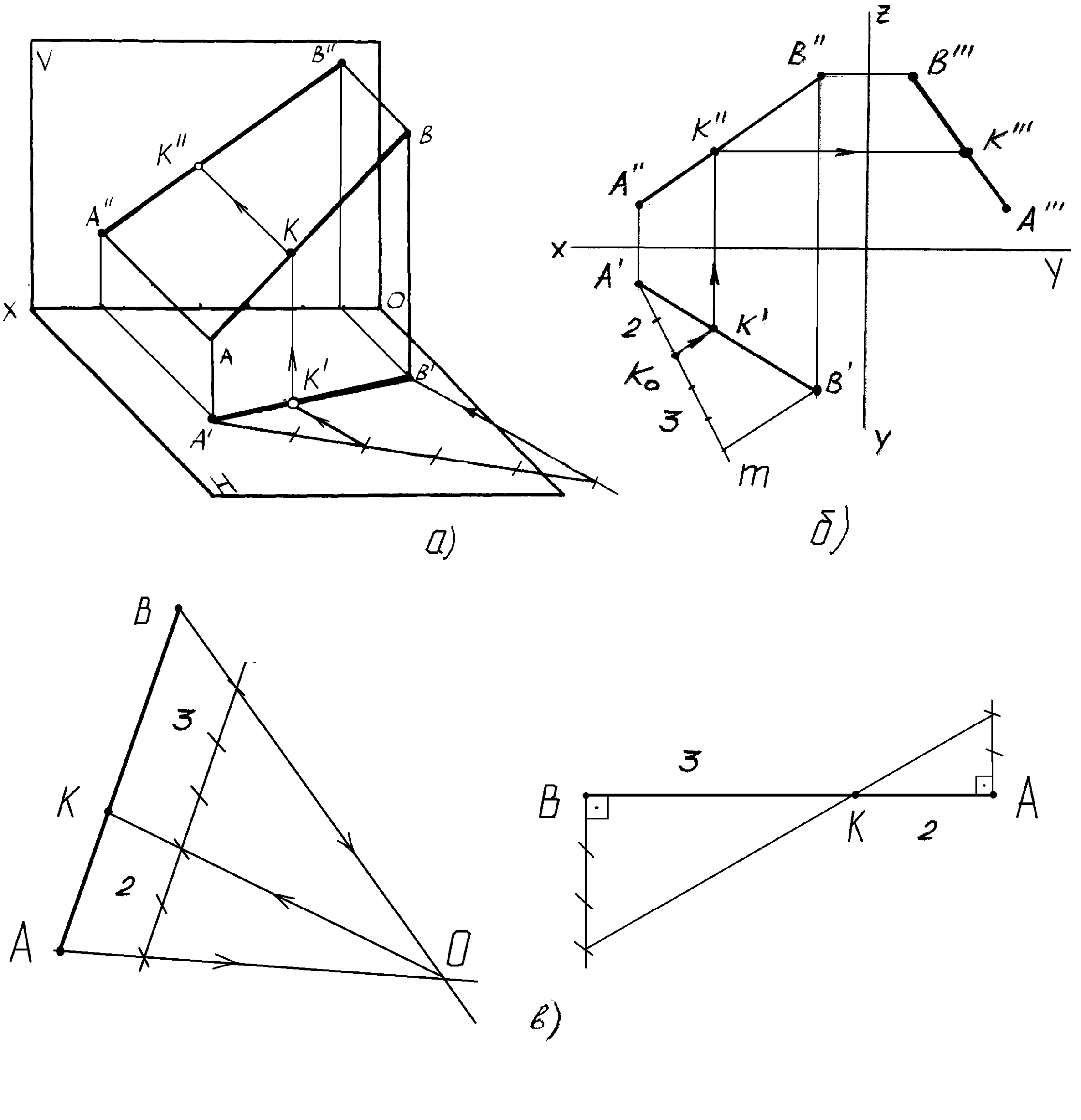


Рисунок 2.14

РЕШЕНИЕ. Так как отношение отрезков прямой линии равно отношению их проекций, то разделить в данном отношении отрезок прямой на эпюре – значит разделить в том же отношении любую его проекцию.

Задача решается исключительно графическим методом. Представленное решение задачи основано на теореме Фалеса: если на одной стороне угла отложить равные или пропорциональные отрезки и провести через засечки любые параллельные прямые, то другая сторона разделится на равные или пропорциональные отрезки. На рисунке 2.14а дано решение задачи в пространственной форме, а на рисунке 2.14б представлен эпюр решения задачи. На горизонтальной проекции вспомогательная прямая **m** проводится под произвольно углом, и на ней откладывается пять произвольных отрезков равной длины.

На рисунке 2.14в представлены ещё два способа деления отрезка прямой в заданном отношении.

3 ПЛОСКОСТЬ НА ЭПЮРЕ МОНЖА

Плоскость на эпюре может быть задана шестью способами: тремя точками, не лежащих на одной прямой; прямой и точкой, не лежащей на прямой; двумя параллельными прямыми; двумя пересекающимися прямыми; любой плоской фигурой и следами (рисунок 3.1).

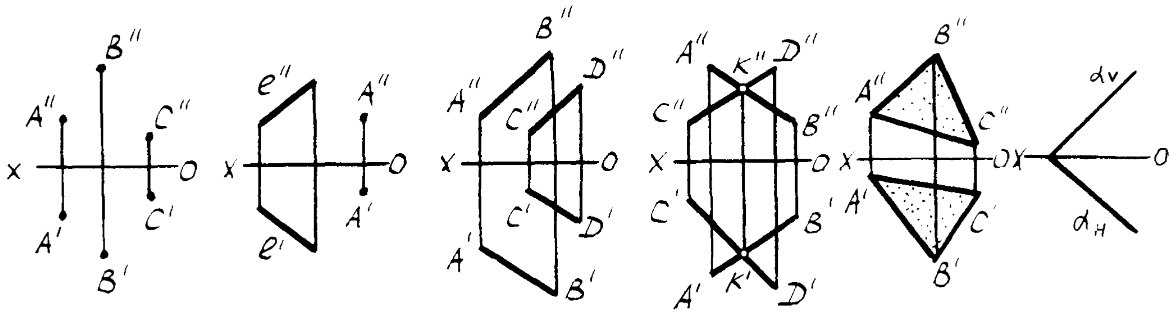


Рисунок 3.1 – Способы задания плоскости

Плоскости аналогично прямым делятся на плоскости общего и частного положения. На рисунке 3.2 представлены пространственные чертежи плоскостей.

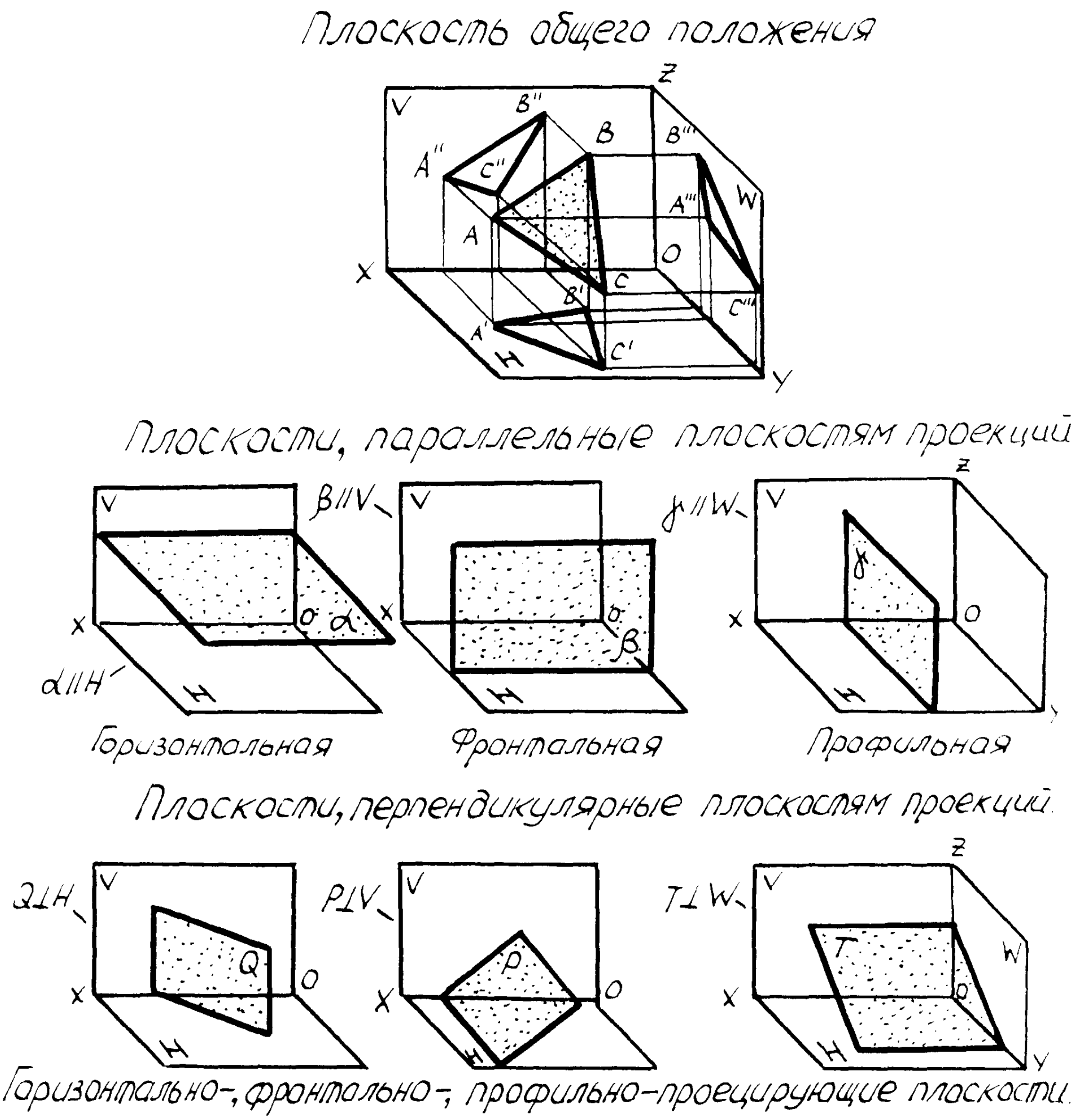


Рисунок 3.2 – Пространственные чертежи плоскостей

3.1 Следы плоскости

Линии пересечения плоскости с плоскостями проекций называются следами плоскости (горизонтальный, фронтальный и профильный следы плоскости). Следы различных плоскостей в пространственной и эпюрной форме представлены на рисунке 3.3. Точки пересечения следов плоскости, лежащие на соответствующих осях (см.рисунок 3.3а), называются точками схода следов (α_x, α_y, α_z).

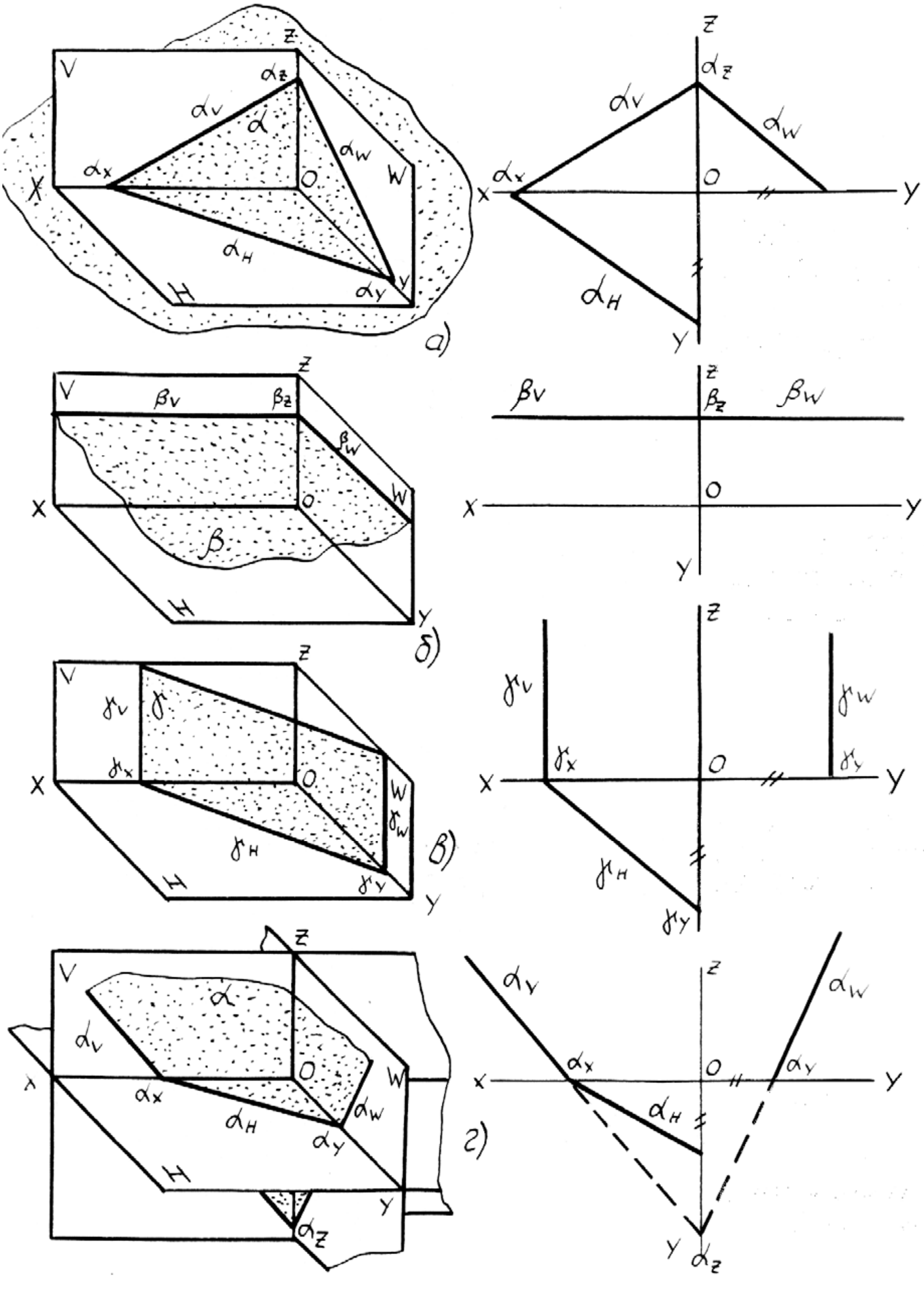


Рисунок 3.3 – Следы плоскости

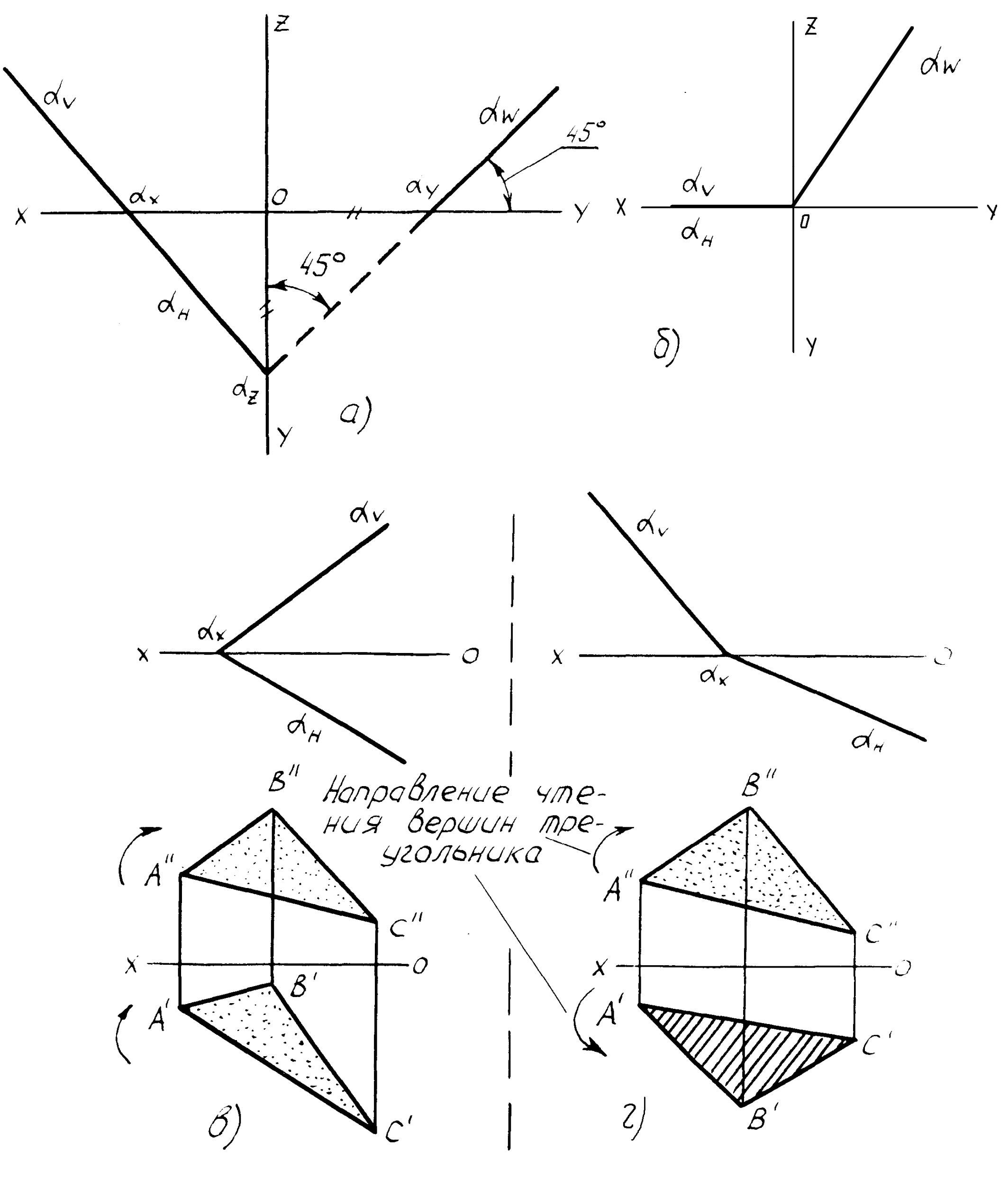


Рисунок 3.4 – Возможные положения плоскостей

У проецирующих плоскостей два следа всегда перпендикулярны осям. Третий след наклонен к соответствующей оси и называется собирательным следом. Он называется так потому, что, если в плоскости находится какой-либо геометрический объект (точка, прямая или кривая линия, треугольник и т.д.), то он проецируется на этот след в линию, совпадающую со следом (след "собирает" на себя проекцию объекта).

У плоскостей, параллельных плоскостям проекций, один след отсутствует, а два других следа являются продолжением друг друга и параллельны соответствующим осям проекций.

Если плоскость в пространстве равнонаклонена к какой-либо паре плоскостей проекций, то следы такой плоскости вырождаются в прямую линию (рисунок 3.4а).

Плоскости, перпендикулярные к одной из плоскостей проекций и проходящие через ось проекций, называются осевыми плоскостями. Два их следа сливаются с соответствующими осями (рисунок 3.4б).

Плоскости общего положения дополнительно делятся на плоскости с односторонней (рисунок 3.4в) и двухсторонней (рисунок 3.4г) видимостью. Признаком односторонней видимости является, например, одинаковое направление чтения букв вершин треугольника на проекциях.

3.2 Главные линии плоскости

Главные линии плоскости делятся на линии уровня и линии наибольшего наклона.

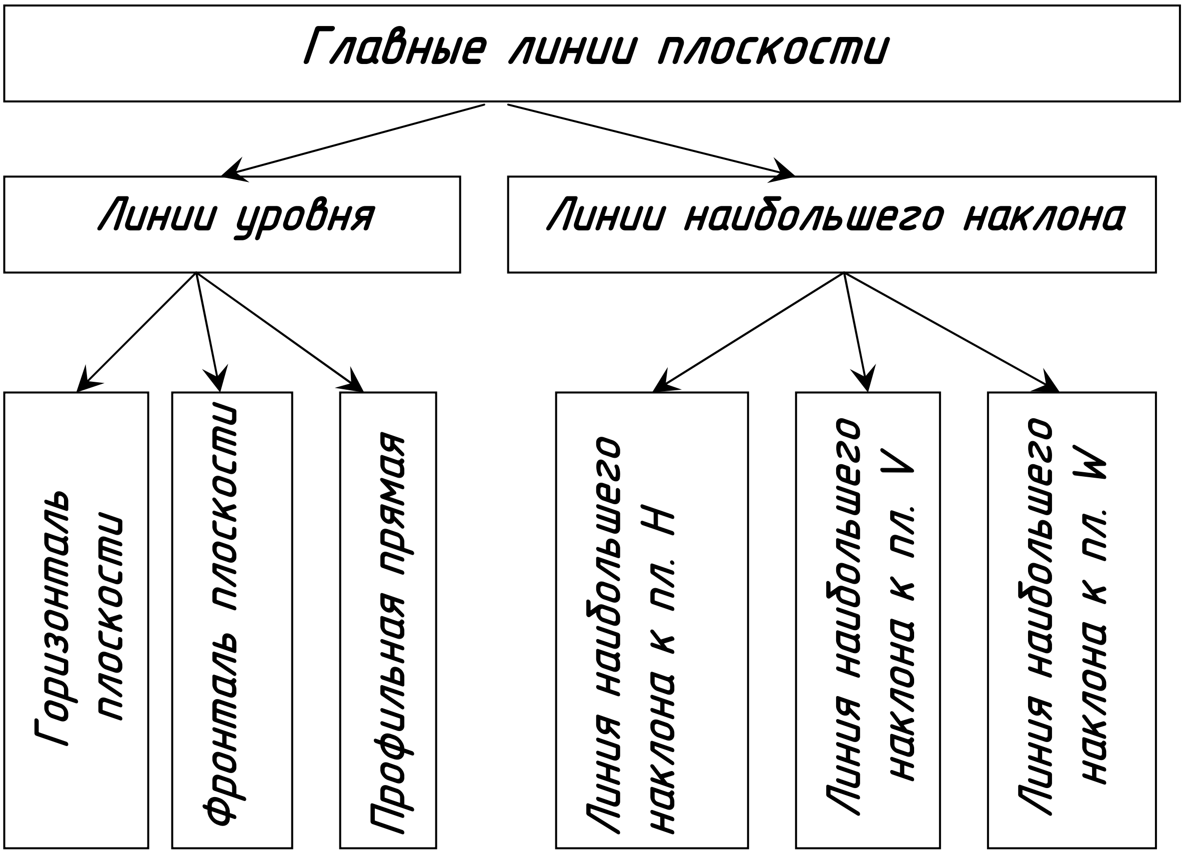


Рисунок 3.5 – Классификация главных линий плоскости

Классификация главных линий плоскости представлена на рисунке 3.5, а на рисунке 3.6 – их наглядное изображение.

К линиям уровня относятся горизонталь, фронталь и профильная прямая плоскости. Они принадлежат плоскости и проводятся в ней по тем же правилам, что и обычные прямые. В каждой плоскости можно провести бесчисленное множество линий уровня. На рисунке 3.7 показано проведение горизонтали и фронтали в плоскостях, заданных плоской фигурой и следами.

При проведении горизонтали и фронтали в плоскости, заданной треугольником, целесообразно взять одну из вершин треугольника за точку, принадлежащую плоскости, и строить проекции **h** и **f** из этой вершины, что упрощает построения.

В плоскости, заданной следами, горизонталь проводится параллельно горизонтальному следу, а фронталь – фронтальному следу.

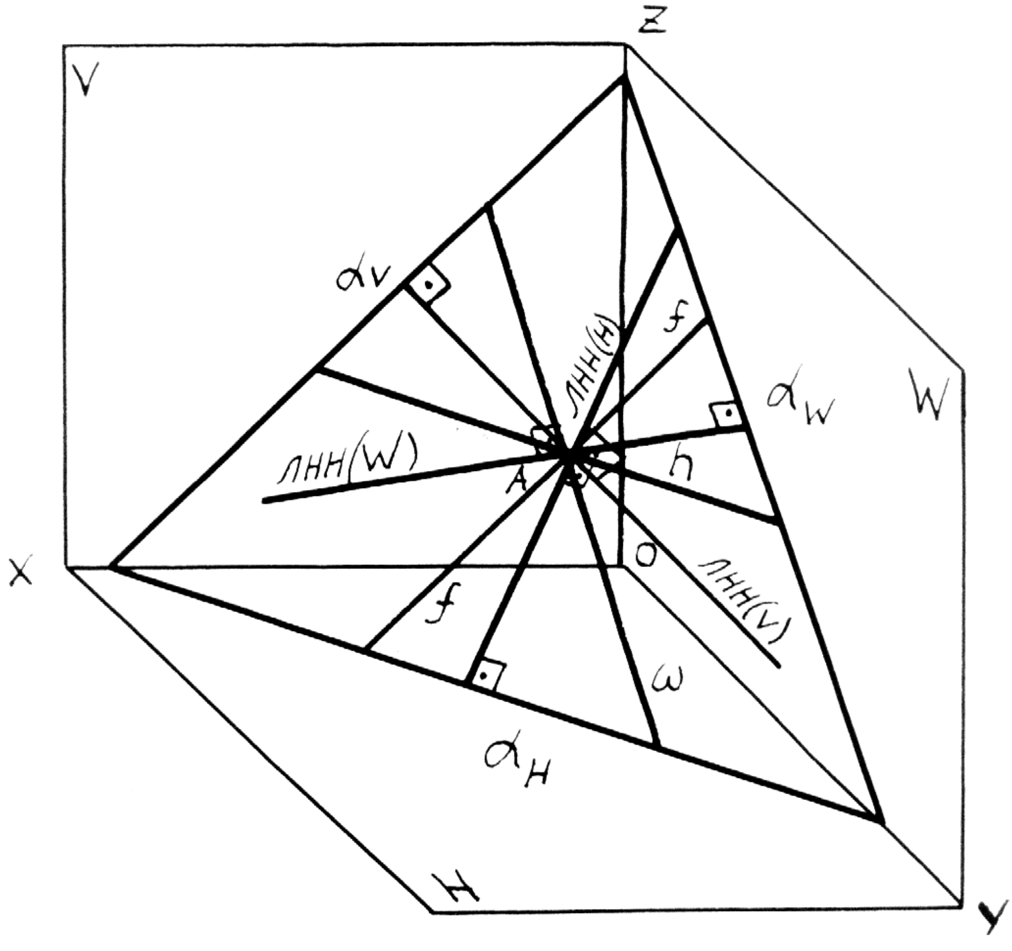


Рисунок 3.6 – Главные линии плоскости

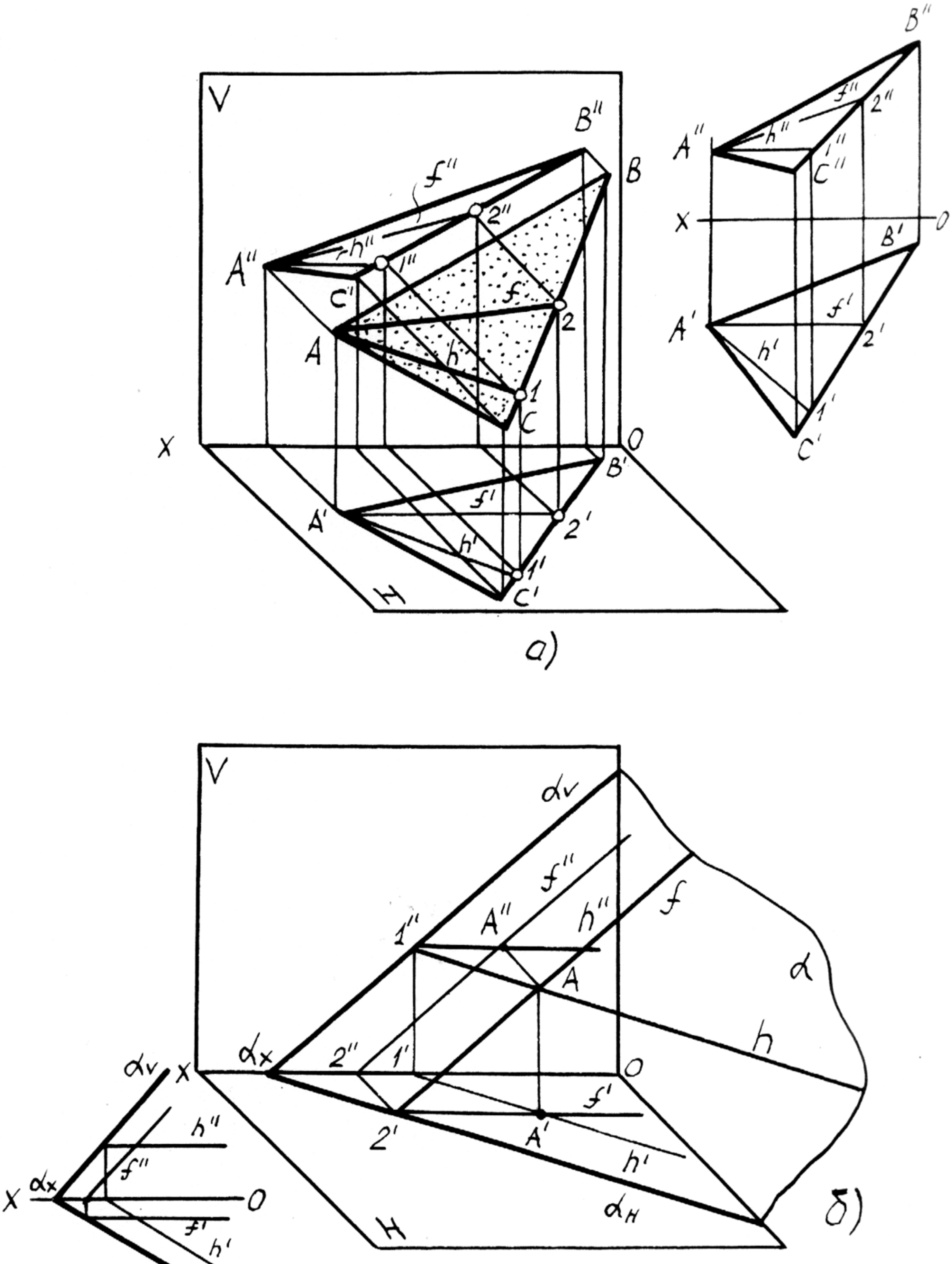


Рисунок 3.7 – Построение главных линий плоскости

В обоих случаях построение горизонтали начинают с фронтальной проекции, а построение фронтали – с горизонтальной проекции, так как они параллельны оси 0X.

Линиями наибольшего наклона плоскости к плоскостям проекций (ЛНН) называются линии, проведенные в плоскости и определяющие наибольший угол между плоскостью и плоскостью проекций, т.е. величину образованного двугранного угла. Различают линию наибольшего наклона плоскости к плоскости проекций **H** – ЛНН(H), к плоскости проекций **V** – ЛНН(V) и к плоскости проекций **W** – ЛНН(W). Рассмотрим подробнее первые две линии.

Линия наибольшего наклона плоскости к плоскости проекций **H** проводится перпендикулярно к горизонтальному следу плоскости или к горизонтали плоскости. Линия наибольшего наклона плоскости к плоскости проекций **V** проводится перпендикулярно к фронтальному следу плоскости или к фронтали (рисунок 3.8).

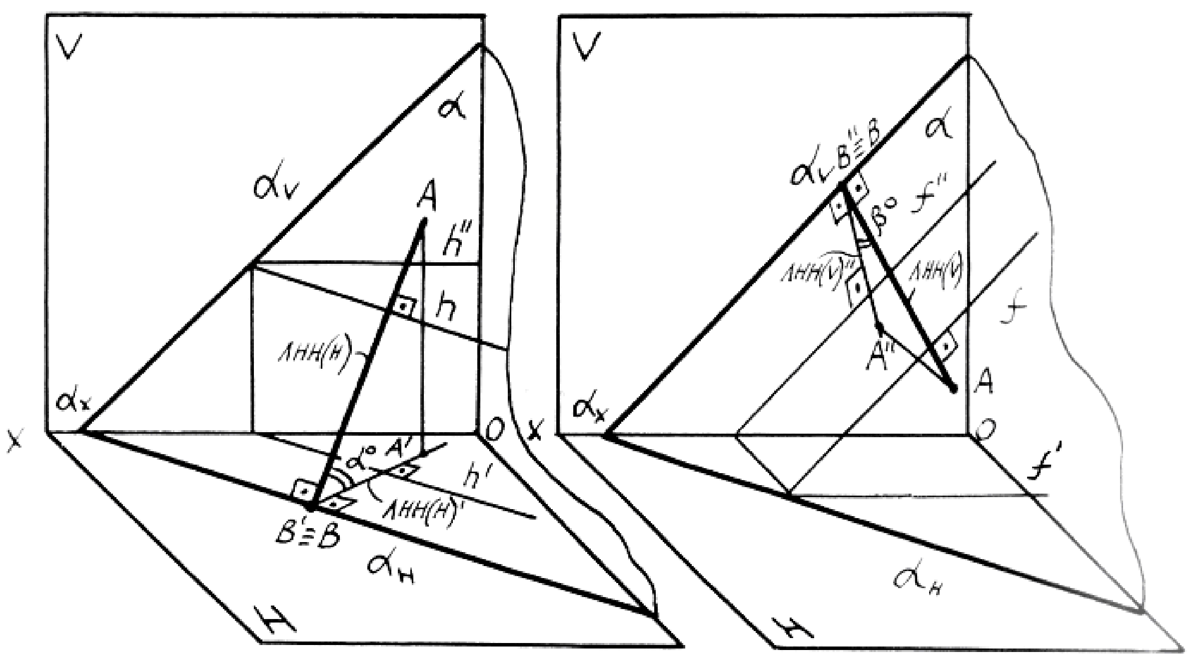


Рисунок 3.8 – Построение проекций линий наибольшего наклона

Принцип методики построения проекций ЛНН основывается на теореме прямого угла: если один из катетов прямого угла

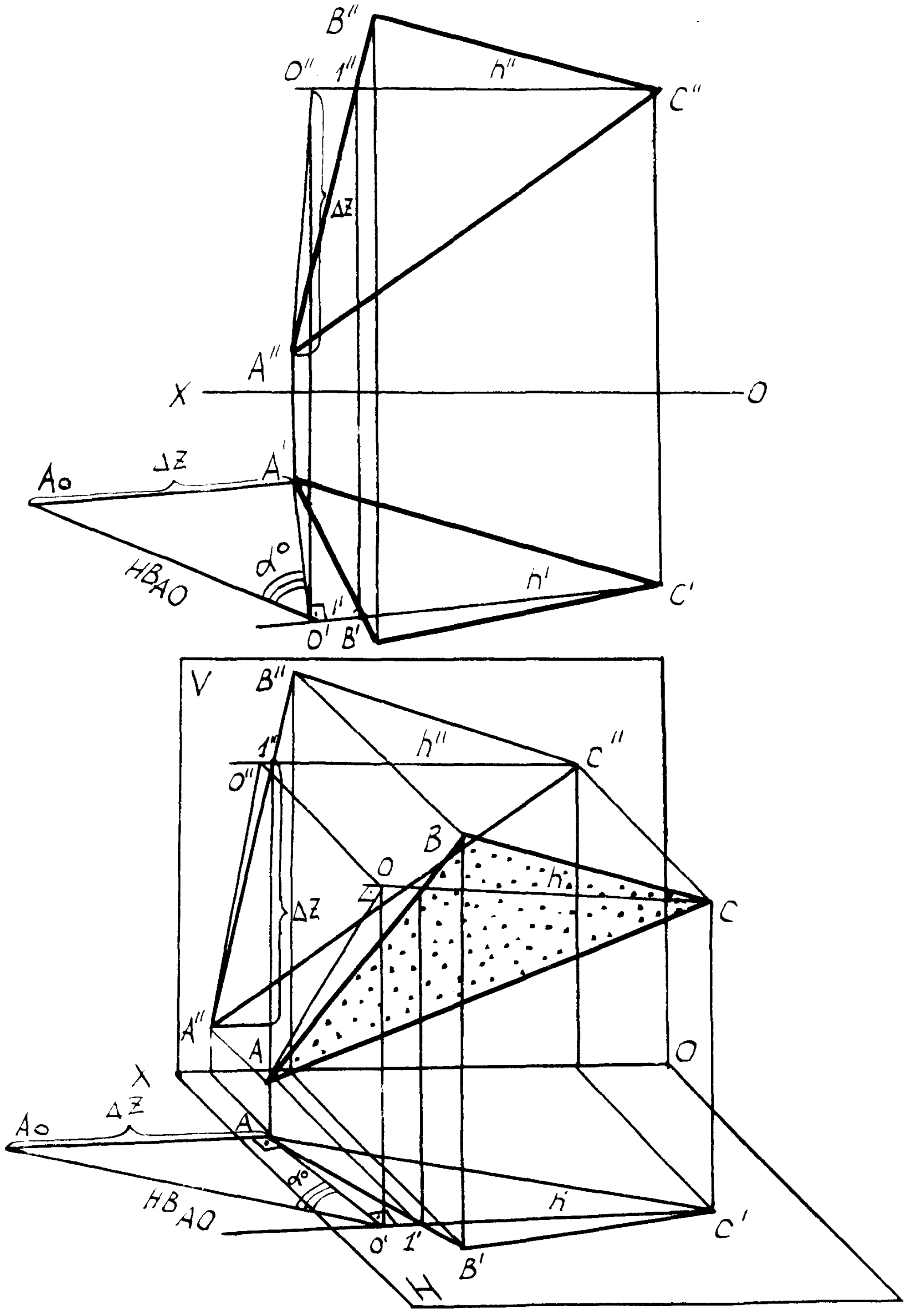


Рисунок 3.9 – Пример на определение угла наклона плоскости

параллелен какой-либо плоскости, то на эту плоскость прямой угол проецируется в натуральную величину (см. рисунок 2.8).

Исходя из пространственных моделей в соответствие с рисунком 3.8 и на основании теоремы о проецировании прямого угла, можно сформулировать методику построения проекций ЛНН(Н) и ЛНН(V): горизонтальная проекция ЛНН(Н) проводится перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали или горизонтальному следу, а фронтальная проекция ЛНН(V) – перпендикулярно фронтальной проекции фронтали или фронтальному следу. Алгоритмически это может записано в следующем виде:

$$\mathbf{ЛНН(H)^{/} \perp h^{/}}, \alpha_H; \; \mathbf{ЛНН(V)^{//} \perp f^{//}}, \alpha_V.$$

Проекции ЛНН(Н)$^{//}$ и ЛНН(V)$^{/}$ образуются по ходу построений.

Угол наклона плоскости к плоскости проекций Н (угол α^o) определится как угол между натуральной величиной ЛНН(Н) и её горизонтальной проекцией, а угол наклона плоскости к плоскости проекций V (угол β^o) - как угол между натуральной величиной ЛНН(V) и её фронтальной проекцией.

ПРИМЕР 3.1. Определить угол наклона плоскости **АВС** к плоскости проекций Н (рисунок 3.9).

РЕШЕНИЕ. Для определения угла α^o в плоскости треугольника **АВС** необходимо провести ЛНН(Н), которая проводится перпендикулярно горизонтали. В связи с этим проведем в плоскости горизонталь **h** (проекции $\mathbf{h}^{/}$ и $\mathbf{h}^{//}$). Далее из точки $\mathbf{C}^{/}$ под прямым углом к $\mathbf{h}^{/}$ проведем горизонтальную проекцию ЛНН(Н)$^{/}$ ($\mathbf{C}^{/}\mathbf{D}^{/}$) и построим фронтальную проекцию ЛНН(Н)$^{//}$ ($\mathbf{C}^{//}\mathbf{D}^{//}$). Затем методом прямоугольного треугольника найдем натуральную величину ЛНН(Н) ($НВ_{CD}$). Угол α^o между $НВ_{CD}$ и горизонтальной проекцией линии наибольшего наклона $\mathbf{C}^{/}\mathbf{D}^{/}$ – искомый. Задача на рисунке 3.9 представлена в пространственной и эпюрной формах.

4 ПОЗИЦИОННЫЕ ЗАДАЧИ

Позиционными задачами называются задачи на построение элементов, общих для взаимодействующих объектов, и задачи на взаимное положение геометрических объектов. Первая группа задач включает задачи на принадлежность и задачи на пересечение. Ко второй группе задач относятся задачи на параллельность геометрических объектов.

Задачи на перпендикулярность объектов относят к метрическим задачам, которые будут рассмотрены в следующем разделе. Позиционные задачи, в которых участвуют поверхности, будут рассмотрены в главе "Поверхности".

Классификация позиционных задач, относящихся к элементарным геометрическим объектам (точка, прямая, плоскость), представлена на рисунке 4.1.

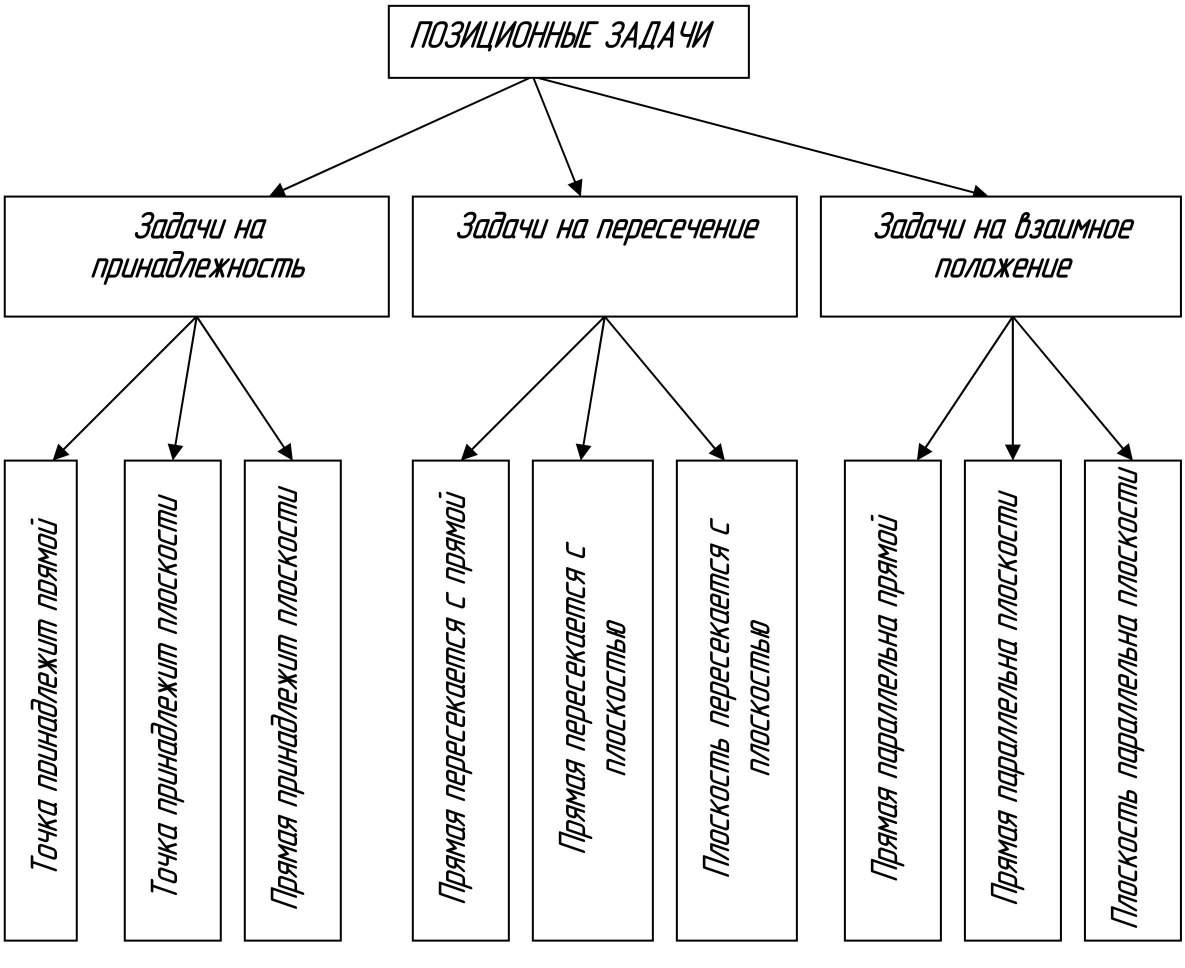


Рисунок 4.1 – Классификация позиционных задач

4.1 Задачи на принадлежность

Эта группа задач содержит три типовые задачи – точка принадлежит прямой, точка принадлежит плоскости, прямая принадлежит плоскости, суть решения которых основана на свойствах проецирования.

Если точка принадлежит прямой, то проекции этой точки принадлежат одноименным проекциям прямой.

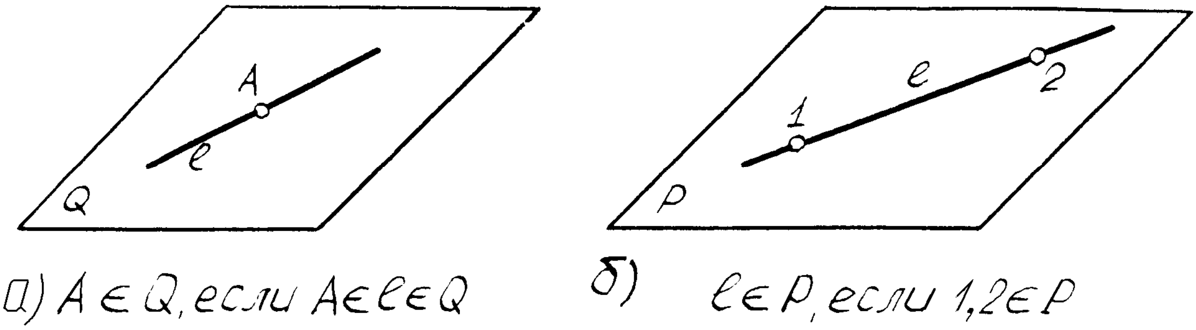


Рисунок 4.2 – точка и прямая в плоскости

Точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой, находящейся в этой плоскости (рисунок 4.2а). Прямая принадлежит плоскости, если она проходит через две точки, принадлежащих плоскости. Поэтому для того, чтобы указать в плоскости какую-либо точку, необходимо сначала указать в плоскости прямую, а затем на этой прямой указать положение точки.

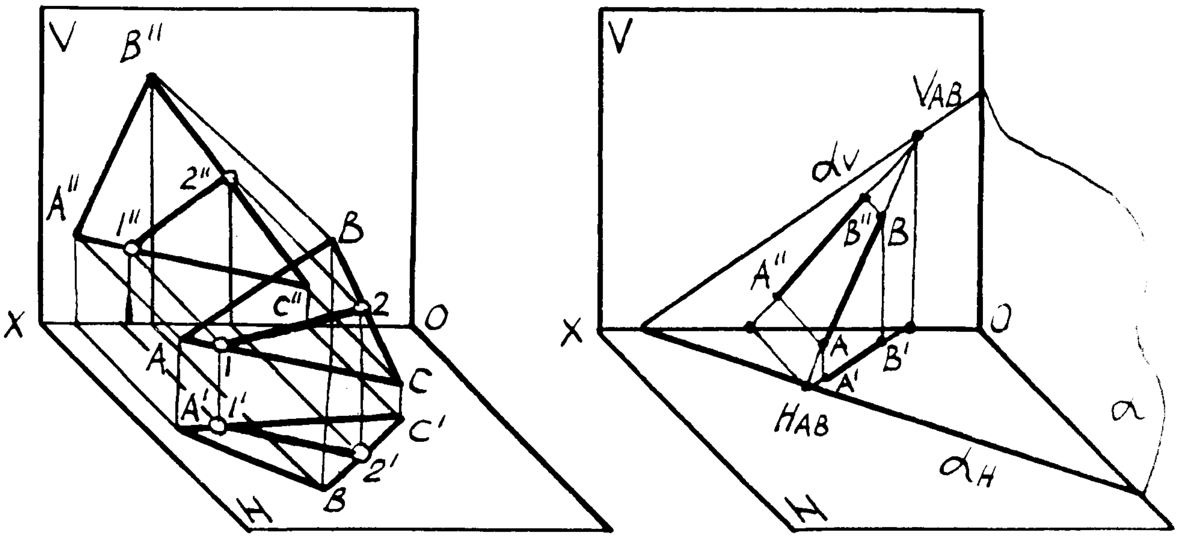


Рисунок 4.3 –Построение прямой в плоскости

На рисунках 4.3 показано построение прямой в плоскостях, заданных треугольником и следами. Если плоскость задана треугольником, то целесообразно упомянутые точки взять на сторонах треугольника. Если плоскость задана следами, то в качестве двух точек целесообразно взять следы прямой. Это основано на следующем свойстве: если плоскость задана следами и в ней находится прямая, то следы прямой лежат на одноименных следах плоскости.

На рисунке 4.4 представлено построение точек в плоскости, заданной следами и точки в плоскости, заданной треугольником. В первом случае точка **А** построена с помощью горизонтали. На этом же рисунке показано построение точек (**K** и **L**), находящихся на следах плоскости. Во втором случае точка **K** построена с помощью прямой **1-2**.

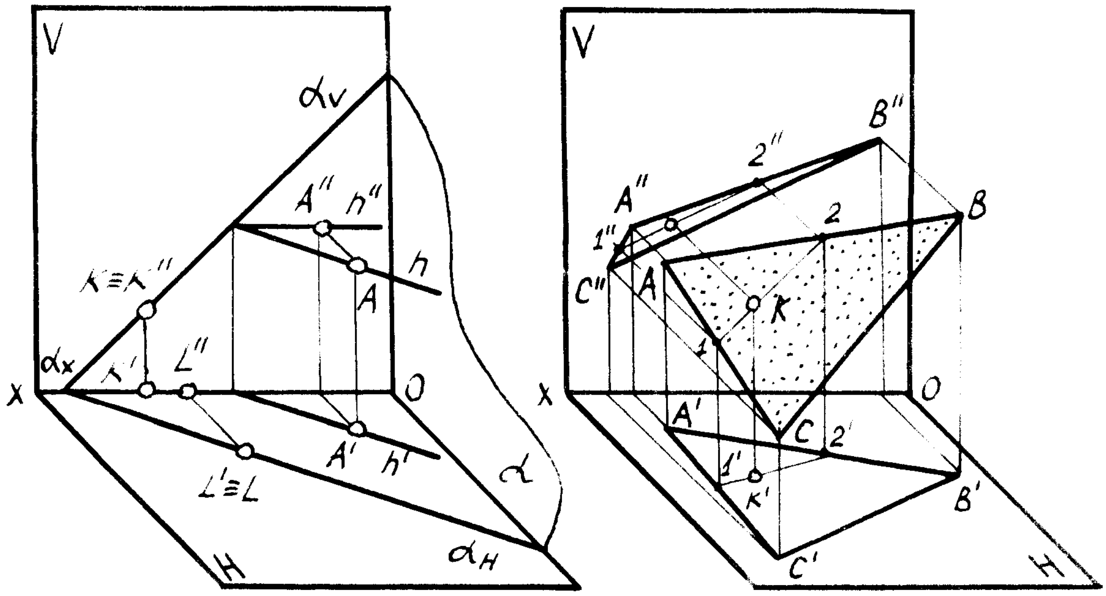


Рисунок 4.4 – Построение точек в плоскости

С рассматриваемым вопросом тесно связан вопрос о проведении плоскости частного положения (например, проецирующих плоскостей) через прямую.

Если прямая принадлежит плоскости частного положения и плоскость задается следами, то одна из проекций прямой будет совпадать с собирательным следом плоскости в соответствие с рисунком 4.5.

На рисунке 4.6 в эпюрной форме показано проведение через прямую фронтально проецирующей плоскости α и горизонтально проецирующей плоскости β.

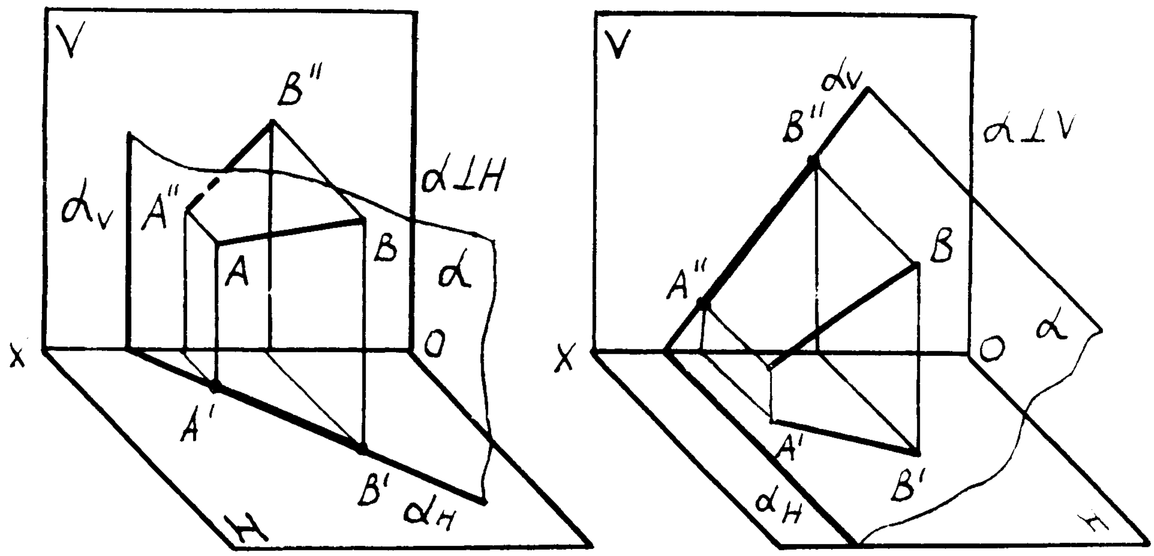


Рисунок 4.5 –Построение проецирующей плоскости через прямую

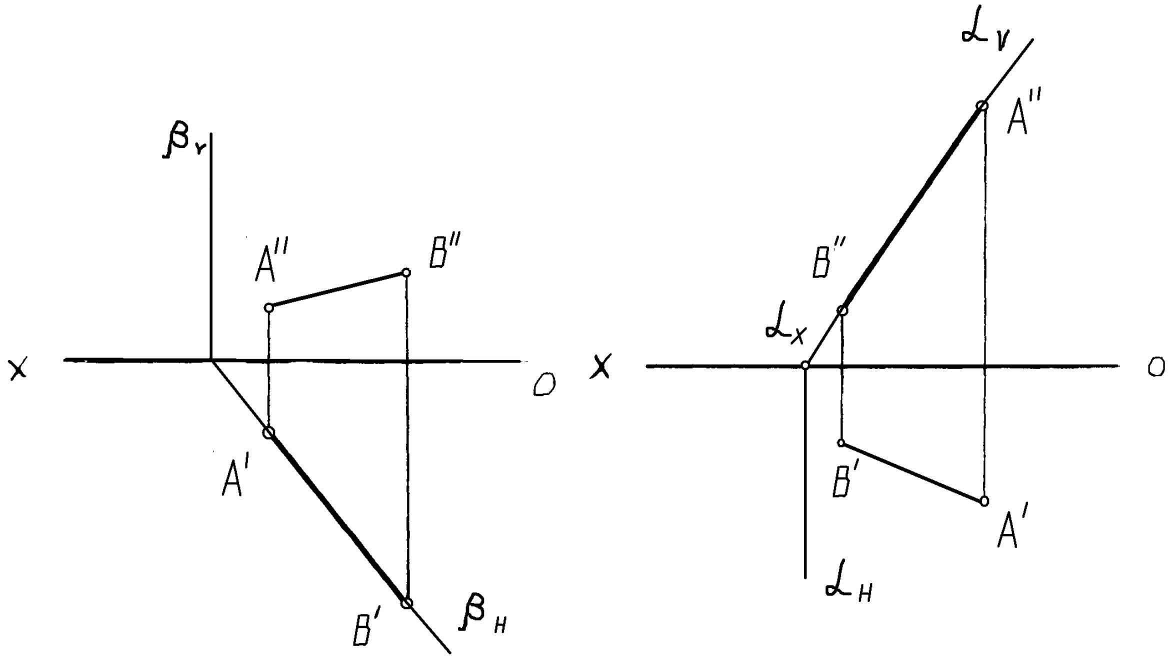


Рисунок 4.6 - Построение проецирующей плоскости через прямую

4.2 Задачи на пересечение

Задача на пересечение двух прямых рассмотрена ранее в разделе "Пересекающиеся прямые".

Наиболее важной позиционной задачей является задача о пересечении прямой с плоскостью. При решении задачи могут встретиться следующие случаи пересечения:

1. Прямая общего положения пересекается с плоскостью частного положения;
2. Прямая частного положения (например, проецирующая) пересекается с плоскостью общего положения;
3. Прямая общего положения пересекается с плоскостью общего положения.

Решение первых двух задач не представляет особых трудностей (рисунок 4.7). На рисунке 4.7а дано построение точки встречи прямой общего положения с горизонтально-проецирующей плоскостью, а на рисунке 4.7б – горизонтально-проецирующей прямой с плоскостью общего положения. Последняя задача решена с помощью вспомогательной прямой 1-2.

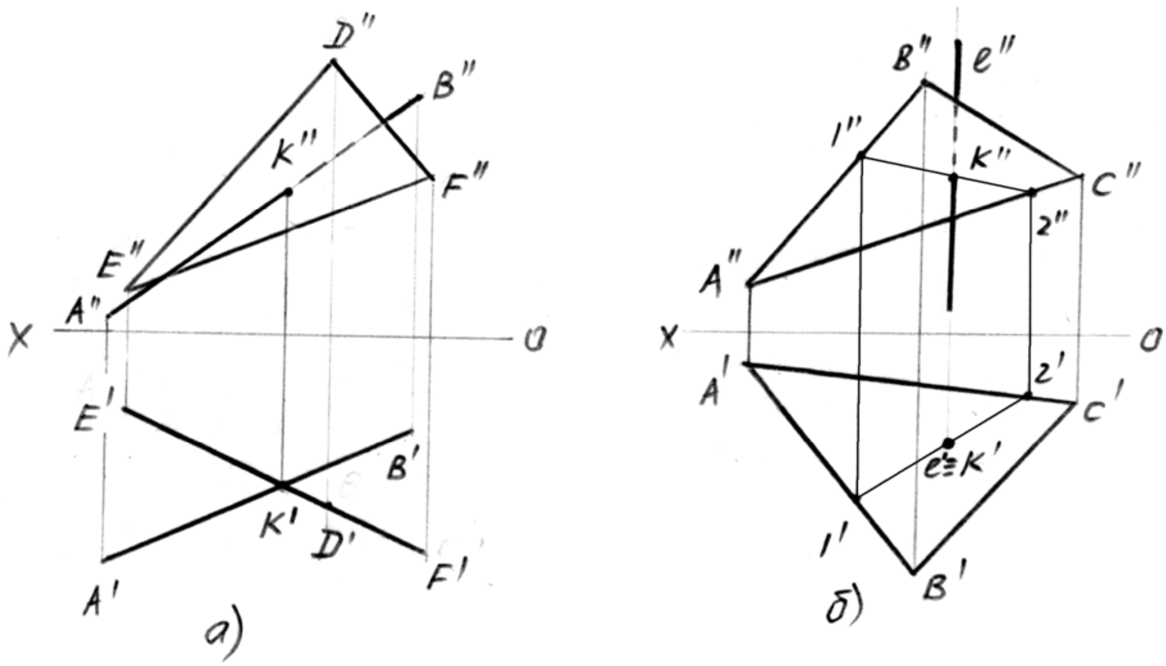


Рисунок 4.7 – Пересечение прямой с плоскостью

Для решения задачи о пересечении прямой с плоскостью в общем положении разработана следующая методика (рисунок 4.8а):

1) Через прямую проводят вспомогательную плоскость частного положения β (чаще всего проецирующую плоскость, заданную следами);

2) Находят линию пересечения заданной α и вспомогательной плоскостей β (линия 1-2);

3) Находят точку пересечения заданной прямой и найденной линии пересечения плоскостей. Полученная точка **K** – искомая.

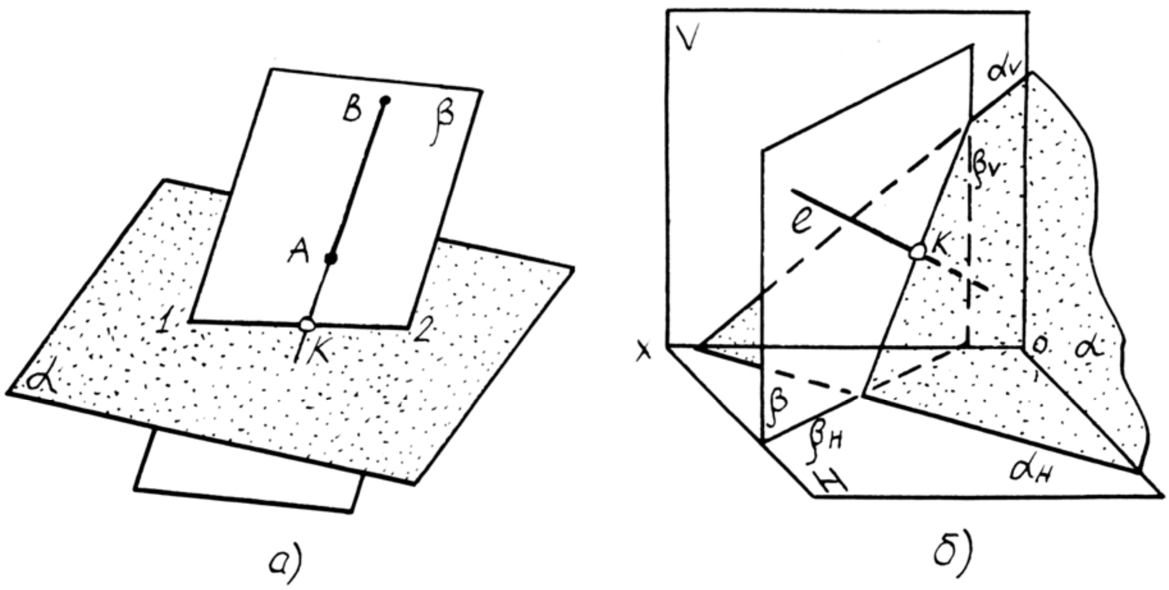


Рисунок 4.8 – Пересечение прямой общего положения с плоскостью общего положения

На рисунке 4.8б дана пространственная схема решения задачи, в которой прямая пересекается с плоскостью, заданной следами. В качестве вспомогательной плоскости взята горизонтально-проецирующая плоскость.

На рисунке 4.9 дано решение задачи на пересечение прямой общего положения с плоскостью общего положения, заданной треугольником. В качестве вспомогательной плоскости использована горизонтально-проецирующая плоскость.

Видимость проекций определена методом конкурирующих точек (прямых).

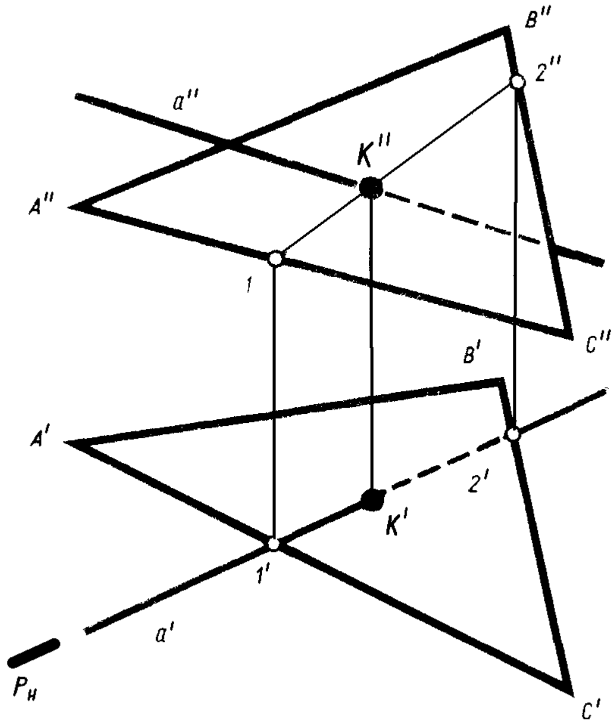


Рисунок 4.9 – Задача на пересечение прямой с плоскостью

К главным задачам на пересечение относится также задача о пересечении двух плоскостей. Линия пересечения двух плоскостей – это прямая, принадлежащая как одной, так и другой плоскости. Следовательно, для построения линии пересечения двух плоскостей надо найти какие-либо две точки, каждая из которых принадлежит обеим плоскостям (рисунок 4.10).

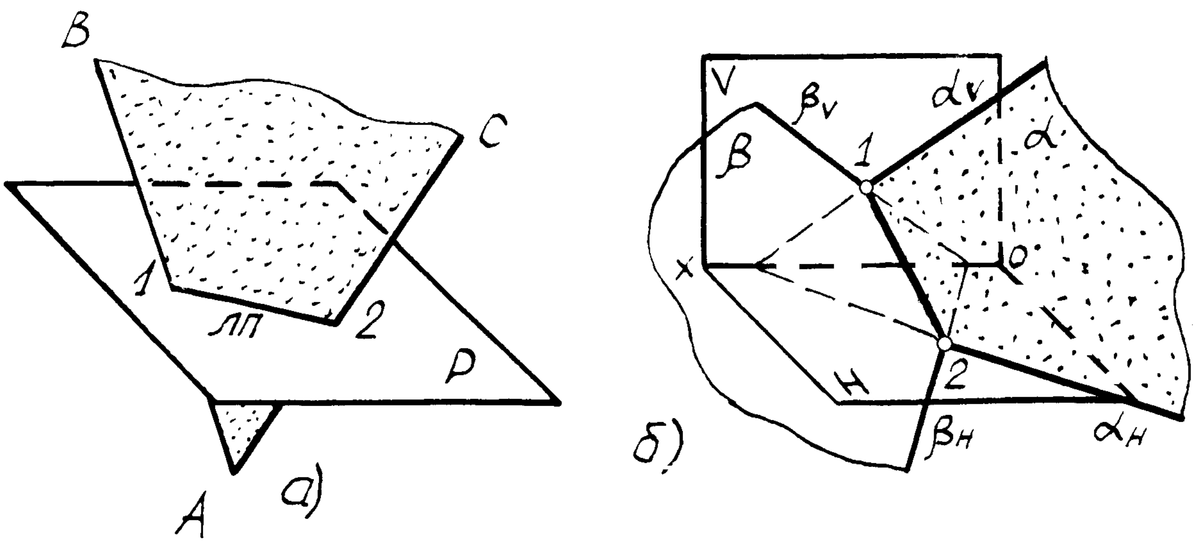


Рисунок 4.10 – Линия пересечения двух плоскостей

Если плоскости заданы следами, то исходя из рисунка 4.10б линия пересечения таких плоскостей определяется точками пересечения одноименных следов. На рисунке 4.11 представлены решения задач о пересечении двух плоскостей, заданных следами. Во втором случае одна из плоскостей является плоскостью общего положения, а другая – фронтально-проецирующей.

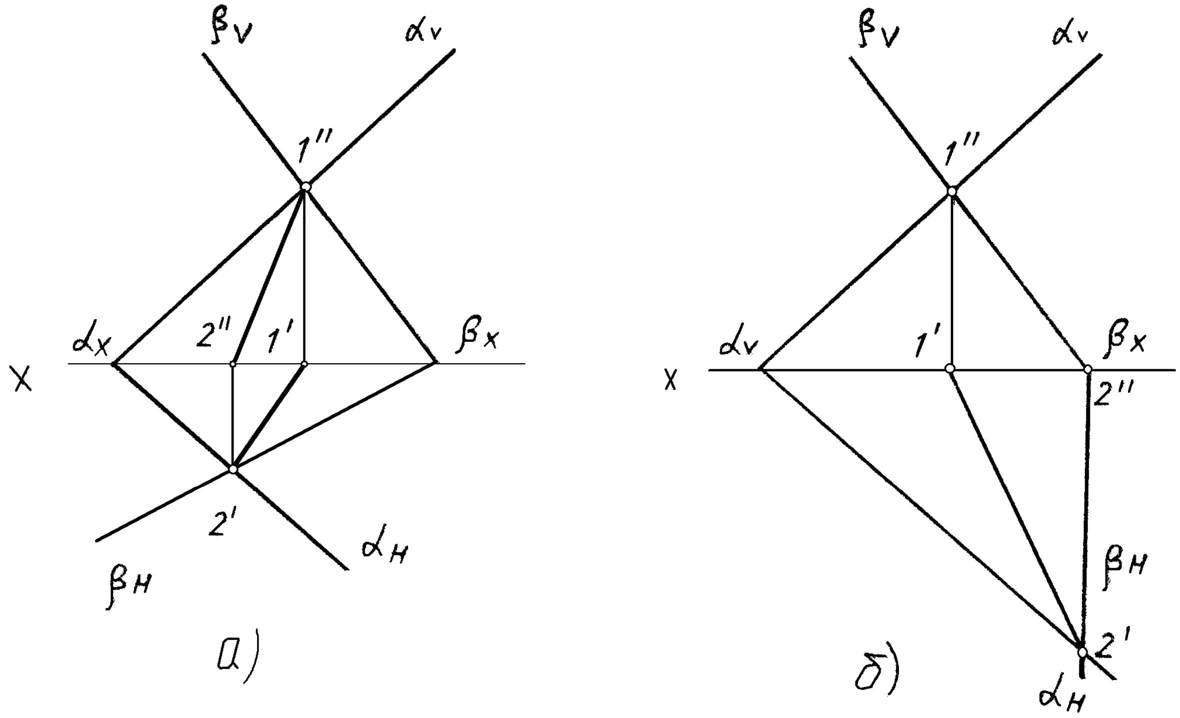


Рисунок 4.11 – Пересечение плоскостей, заданных следами

В случаях, если плоскости заданы разными способами, применяют общий метод построения линии пересечения, основанный на введении вспомогательных плоскостей (рисунок 4.12).

Сущность метода заключается в том, что заданные плоскости **Q** и **P** дважды пересекают вспомогательными плоскостями α и β (например, горизонтальными). Находят линии их пересечения с заданными плоскостями, далее находят точки **1** и **2** пересечения найденных линий и соединяют полученные точки прямой линией, которая является линией пересечения заданных плоскостей.

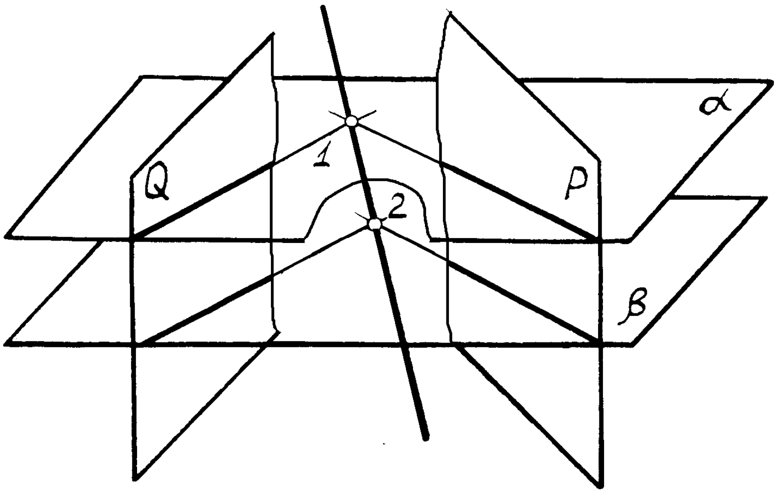


Рисунок 4.12 – Введение вспомогательных секущих плоскостей

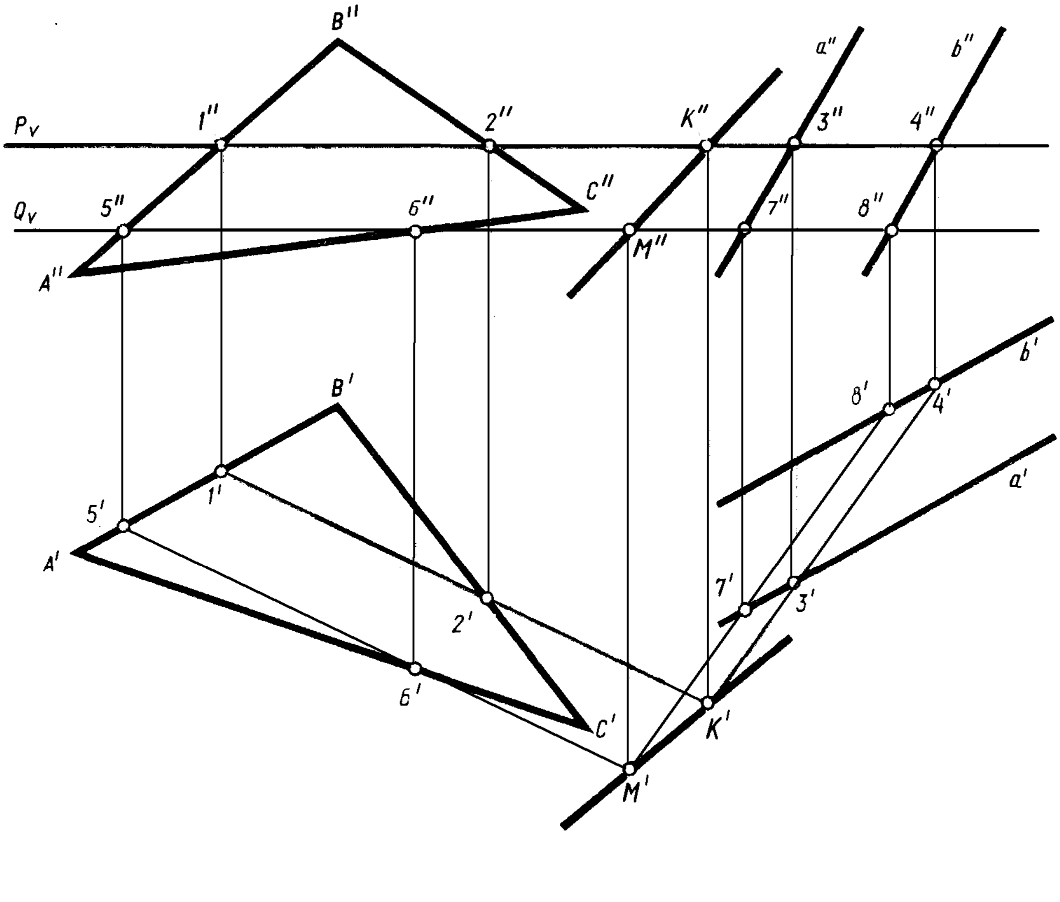


Рисунок 4.13 – Пример на пересечение двух плоскостей

Если пересекающиеся плоскости являются плоскостями частного положения, или если одна из пересекающихся плоскостей является плоскостью частного положения, то задача упрощается. На рисунке 4.14 представлены примеры решения задач на пересечение упомянутых плоскостей.

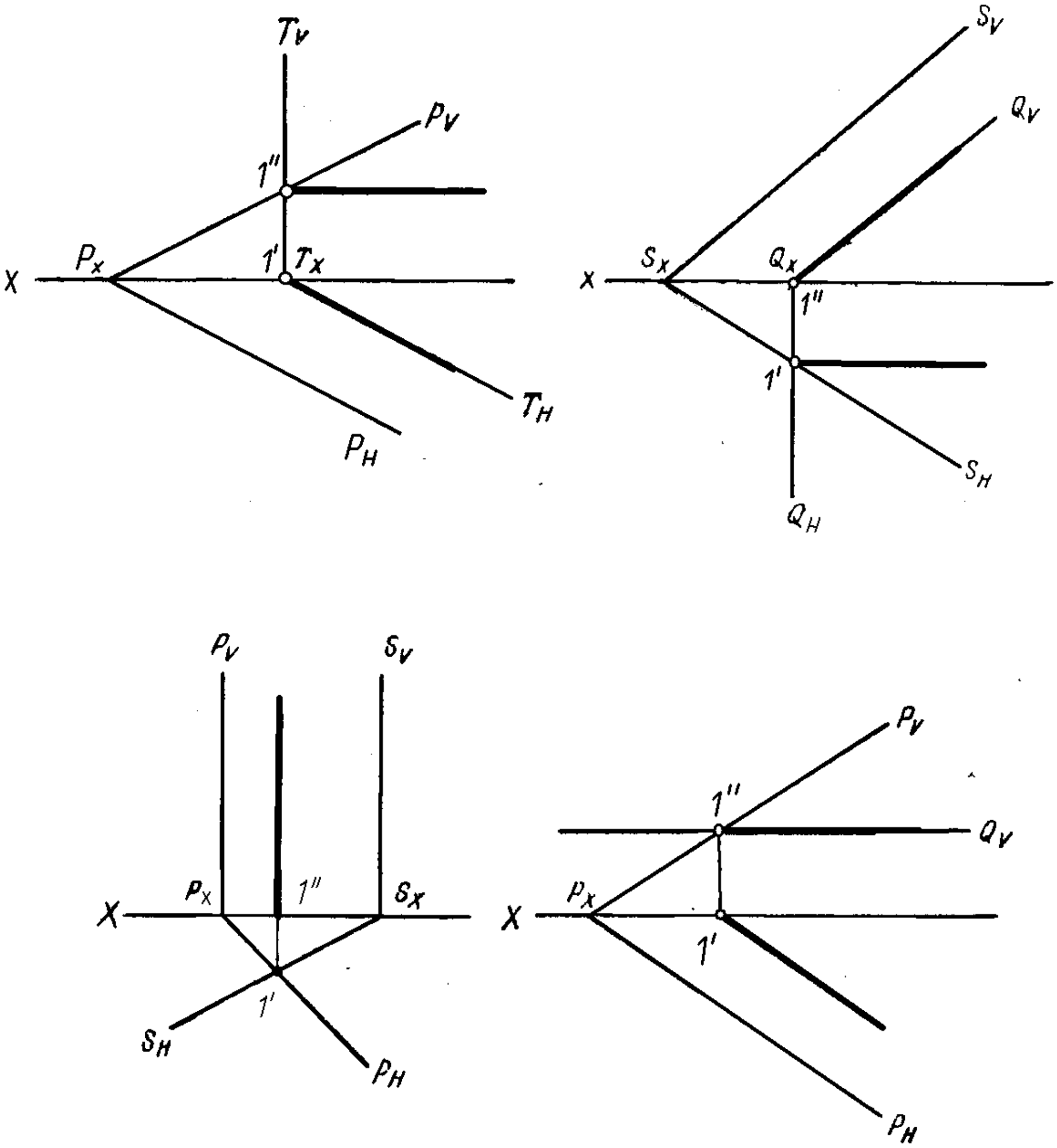


Рисунок 4.14 – Пересечение плоскости с плоскостью частного положения

Наиболее трудоемкой задачей является задача на пересечение двух плоскостей общего положения, заданных плоскими фигурами, например, треугольниками, многоугольниками и т.д. При пересечении плоских фигур возможны два случая пересечения (рисунок 4.15): полное пересечение (а) и неполное пересечение (б).

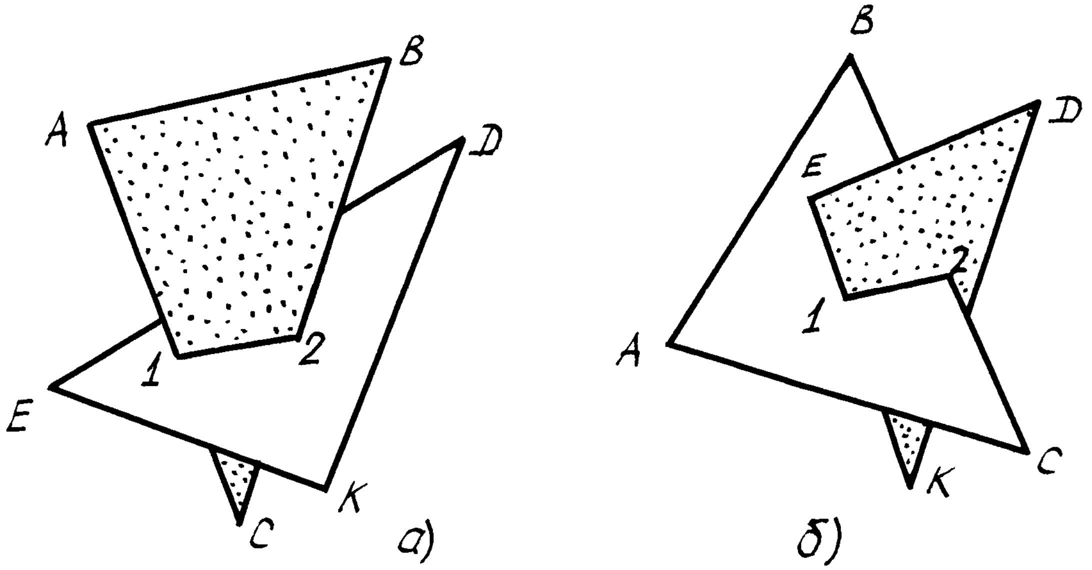


Рисунок 4.15 – Полное и неполное пересечение плоских фигур

В обоих случаях линия пересечения треугольников определяется двумя точками 1 и 2, каждая из которых определяется как точка пересечения стороны одного треугольника с плоскостью другого. Отсюда следует вывод: для того, чтобы построить линию пересечения треугольников, необходимо дважды решить задачу о пересечении стороны одного треугольника с плоскостью другого треугольника (типовая задача о пересечении прямой с плоскостью). При этом пару пересекающихся объектов можно подбирать произвольно. В любом случае линия пересечения будет построена.

4.3 Задачи на параллельность

Задача на параллельность двух прямых была рассмотрена ранее в разделе "Параллельные прямые".

Задачи на параллельность плоскостей основываются на положениях элементарной геометрии. Две плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости взаимно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости (рисунок 4.16а).

Если две параллельные плоскости заданы следами, то одноименные следы таких плоскостей параллельны друг другу (рисунок 4.16б).

Прямая будет параллельна плоскости в том случае, если она параллельна любой прямой, находящейся в этой плоскости.

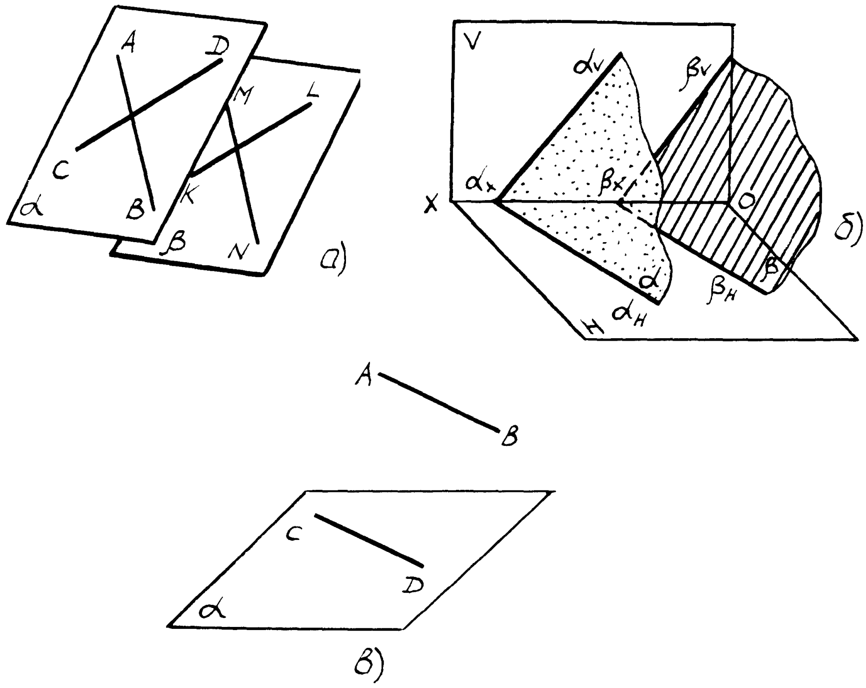


Рисунок 4.16 – Параллельность геометрических объектов

ПРИМЕР 4.1. Через прямую **АВ** провести профильно-проецирующую плоскость (рисунок 4.17).

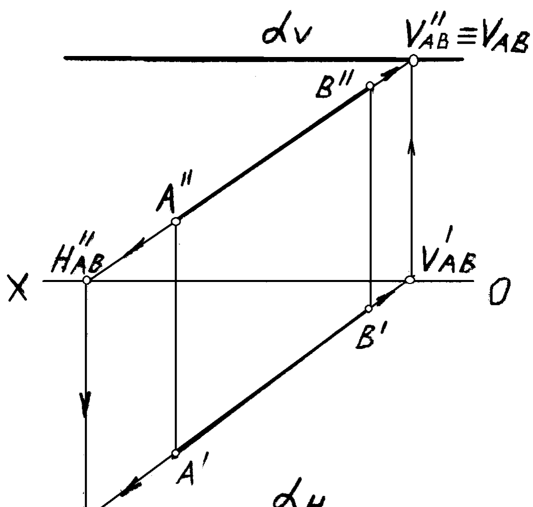


Рисунок 4.17

РЕШЕНИЕ. Как было показано ранее горизонтальный и фронтальный следы профильно-проецирующей плоскости располагаются параллельно оси 0X. Было также показано, что если прямая принадлежит плоскости, заданной следами, то следы прямой находятся на одноименных следах плоскости. Сказанное позволяет разработать план решения задачи:

1) Найдем горизонтальный и фронтальный следы прямой;

2) Через найденные следы прямой проведем одноименные следы плоскости.

ПРИМЕР 4.2. Через точку провести плоскость, параллельную заданной (рисунок 4.18).

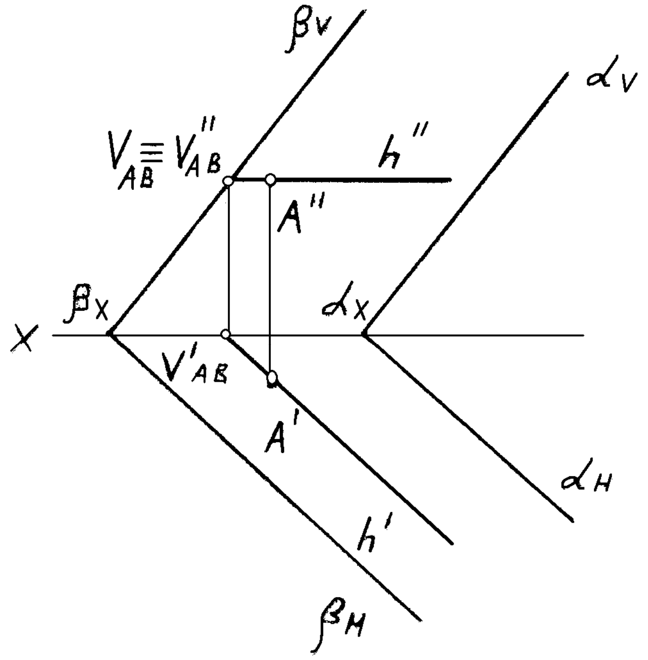


Рисунок 4.18

РЕШЕНИЕ. Плоскость задана следами. Искомую плоскость целесообразно тоже задать следами. Чтобы обеспечить параллельность плоскостей, необходимо следы искомой плоскости провести параллельно одноименным следам заданной плоскости.

Для того чтобы искомая плоскость проходила через заданную точку, необходимо через точку провести прямую (например, горизонталь), которая принадлежала бы искомой плоскости. Исходя из изложенного, определяется следующий план решения задачи:

1) Проводим через заданную точку горизонталь **h**;

2) Через фронтальный след горизонтали проводим фронтальный след искомой плоскости параллельно фронтальному следу заданной плоскости;

3) Горизонтальный след искомой плоскости проводим параллельно горизонтальному следу заданной плоскости.

ПРИМЕР 4.3. Построить линию пересечения треугольников ABC и EDK, определить видимость проекций (рисунок 4.19).

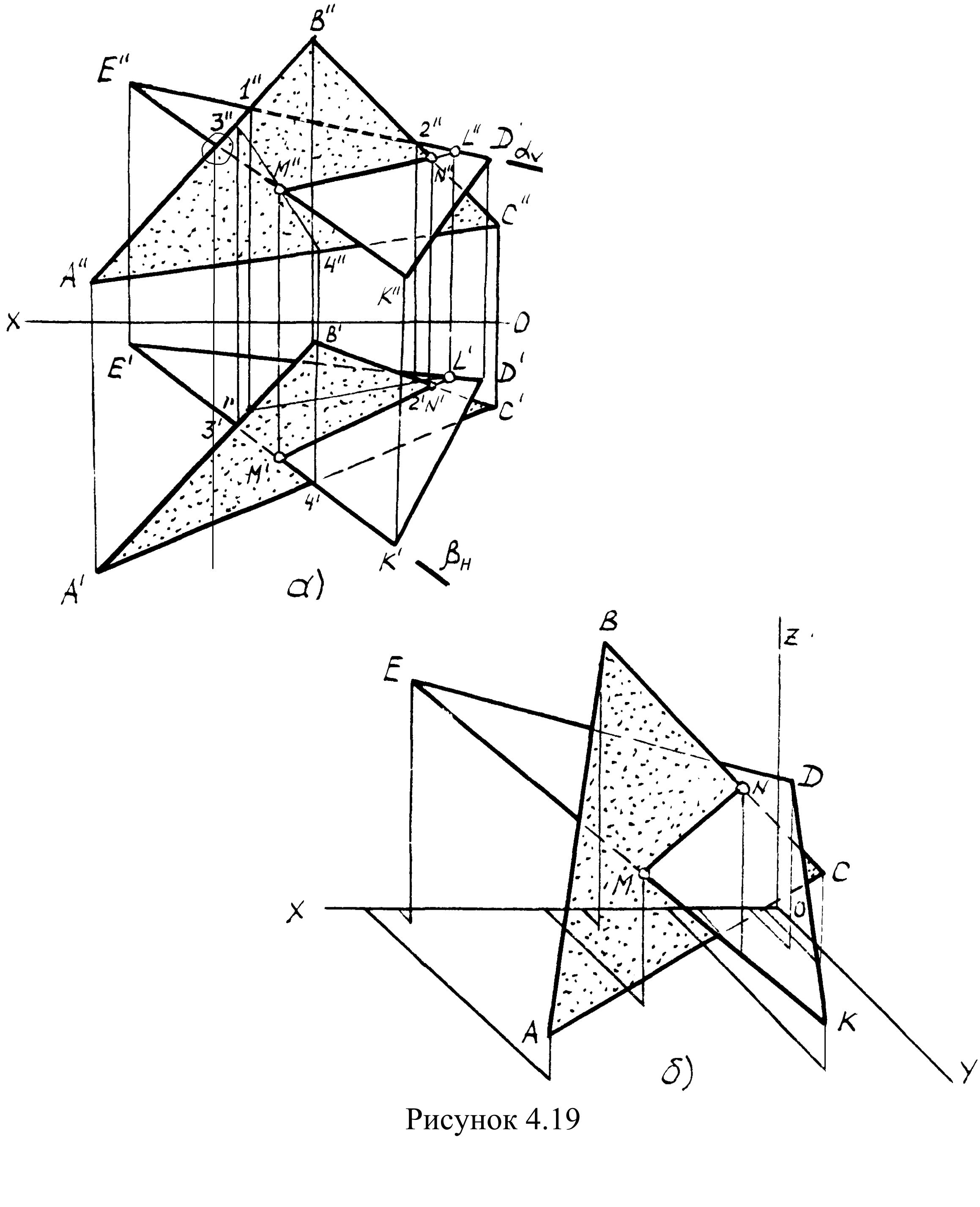


Рисунок 4.19

РЕШЕНИЕ. Предварительно намечаем две произвольные задачи на пересечение стороны одного треугольника с плоскостью другого (произвольно). Например, **ED** I Δ **ABC, EK** I Δ **ABC.**

Решаем первую задачу. Через **ED** проводим вспомогательную фронтально-проецирующую плоскость α (след плоскости α_V). Она пересекает треугольник **ABC** в двух точках $1^{//}$,$2^{//}$ на сторонах **AB** и **BC**. Находим горизонтальные проекции этих точек $1^{//}$ и $2^{//}$ и соединяем их. Линия 1-2 является линией пересечения вспомогательной плоскости с плоскостью треугольника **ABC**. Ищем точку пересечения линии 1-2 с прямой **ED**. Это точка $\mathbf{L}^{/}$, которая лежит вне треугольника **ABC**, но является точкой линии пересечения треугольников.

Аналогично решаем вторую задачу. В качестве вспомогательной плоскости берем горизонтально-проецирующую плоскость β (след β_V). В результате решения задачи получаем точку **M**.

Далее соединяем полученные точки **L** и **M**. Однако не вся эта линия будет являться линией пересечения треугольников, а лишь участок **MN**, который принадлежит обоим треугольникам. Таким образом, в результате решения двух произвольно выбранных задач получили линию **MN** пересечения заданных треугольников.

Определяем видимость проекций треугольников. При определении видимости проекций методом конкурирующих точек (прямых) необходимо учитывать следующие особенности:

1) Плоскости треугольников считаются геометрически непрозрачными;

2) В точках **M** и **N** линии пересечения видимость сторон треугольников меняется;

3) Если при вершине какого-либо треугольника одна сторона видна (не видна), то и другая сторона будет видна (не видна).

Учет перечисленных особенностей позволяет определить видимость проекций треугольников по анализу одного конкурирующего места на каждой проекции, что значительно ускоряет решение задачи.

Отметим на фронтальной проекции любое конкурирующее место из шести (отмечено кружочком). Проведем через него линию связи и вдоль линии связи сравним ординаты конкурирующих прямых **EK** и **AB**. Наибольшую ординату имеет прямая **AB**. Она и будет видна на рассматриваемой фронтальной проекции. Видимость остальных сторон треугольников определяется с учетом особенностей, отмеченных выше.

На горизонтальной проекции отметим конкурирующее место, в котором конкурируют прямые **AB** и **ED**. Аналогично описанному определяем, что на горизонтальной проекции будет видна прямая **AB**, так как у ней наибольшая аппликата. Видимость остальных сторон треугольников определим аналогично рассмотренному выше.

Для усиления эффекта видимости треугольников на проекциях целесообразно один их треугольников заштриховать с учетом видимости или раскрасить оба треугольника.

На рисунке 4.19б представлено наглядное аксонометрическое изображение пересекающихся треугольников в косоугольной фронтальной изометрии. Вершины треугольников строятся по заданным координатам точек, линия пересечения **MN** – по координатам, взятым с проекционного чертежа.

5 МЕТРИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ

Метрические задачи – это задачи на определение линейных или угловых размеров геометрических объектов, а также расстояний и углов между ними.

Главным вопросом метрических задач является вопрос о построении перпендикуляра к прямой или плоскости. Построение взаимно перпендикулярных прямых было рассмотрено ранее.

Из элементарной геометрии известно, что прямая перпендикулярна к плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, принадлежащим этой плоскости. В качестве этих пересекающихся прямых наиболее целесообразно использовать горизонталь и фронталь плоскости. Это объясняется тем, что только в этом случае прямой угол будет проецироваться в натуральную величину на соответствующие плоскости проекций. На рисунке 5.1 приведен пространственный чертеж, на котором из плоскости α (из точки **A**) восстановлен перпендикуляр **AB**. Из приведенного изображения можно выяснить методику построения проекций перпендикуляра к плоскости: горизонтальная проекция перпендикуляра к плоскости проводится перпендикулярно горизонтальной проекции горизонтали или горизонтальному следу плоскости, а фронтальная проекция перпендикуляра проводится перпендикулярно фронтальной проекции фронтали или фронтальному следу плоскости. Таким образом, необходимо выполнить следующий алгоритм проведения проекций перпендикуляра к плоскости:

$$\text{если } \mathbf{AB} \perp \alpha, \text{ то } \mathbf{A}^{/}\mathbf{B}^{/} \perp \mathbf{h}^{/} \text{ или } \alpha_{\mathbf{H}};$$
$$\mathbf{A}^{//}\mathbf{B}^{//} \perp \mathbf{f}^{//} \text{ или } \alpha_{\mathbf{V}}.$$

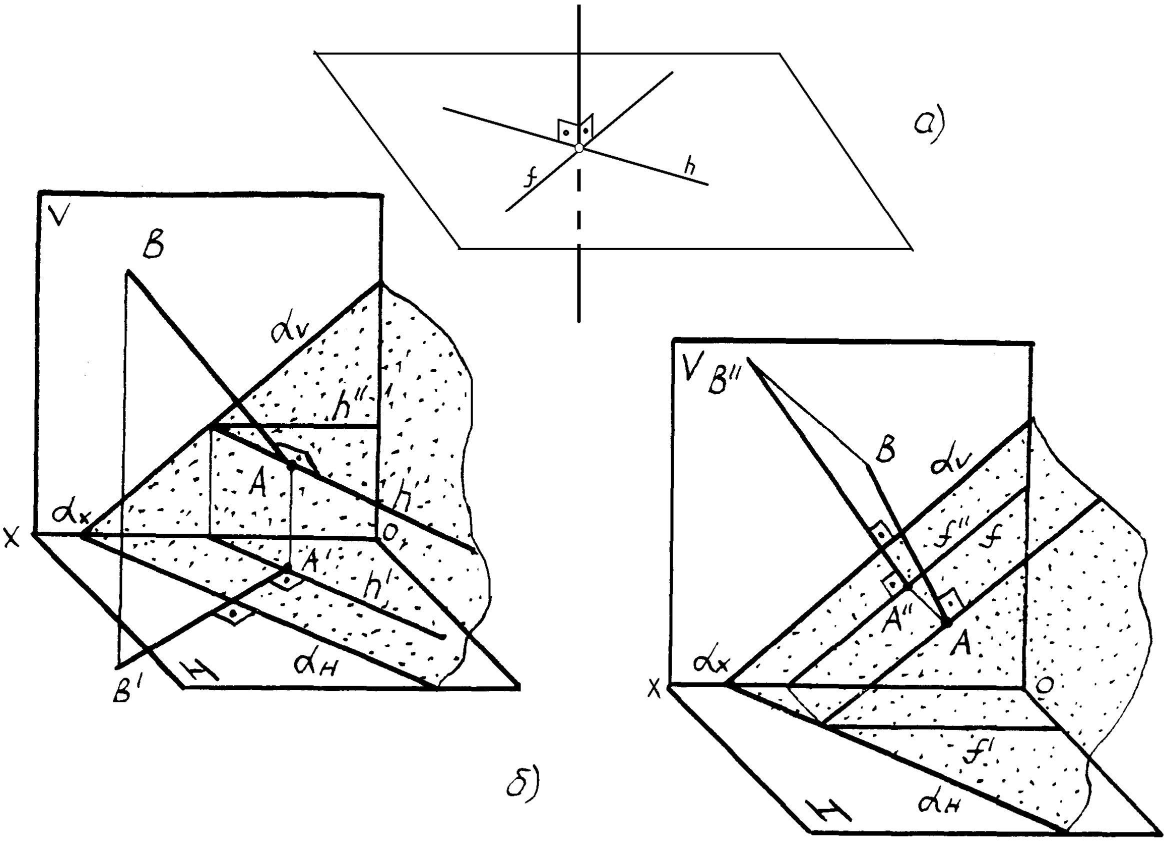


Рисунок 5.1 – Перпендикуляр к плоскости

Построение перпендикуляра к плоскость и восстановление перпендикуляра из плоскости называется прямой задачей, а построение плоскости, перпендикулярной к прямой – обратной задачей. Обе задачи решаются по одному и тому же вышеописанному алгоритму. При этом плоскость, перпендикулярную заданной прямой, можно задать следами или пересекающимися горизонталью и фронталью.

На рисунке 5.2 показано решение прямой (а) и обратной (б) задач. В прямой задаче из точки **А** треугольника **АВС** восстановлен перпендикуляр, в обратной задаче через точку **К** проведена плоскость, перпендикулярная прямой **АВ**. Плоскость задана пересекающимися горизонталью и фронталью.

Здесь же приведены примеры прямой и обратной задач, если плоскость задана следами. В прямой задаче (в) из точки **А** построен перпендикуляр на плоскость, в обратной (г) – через точку К проведена плоскость перпендикулярно прямой АВ.

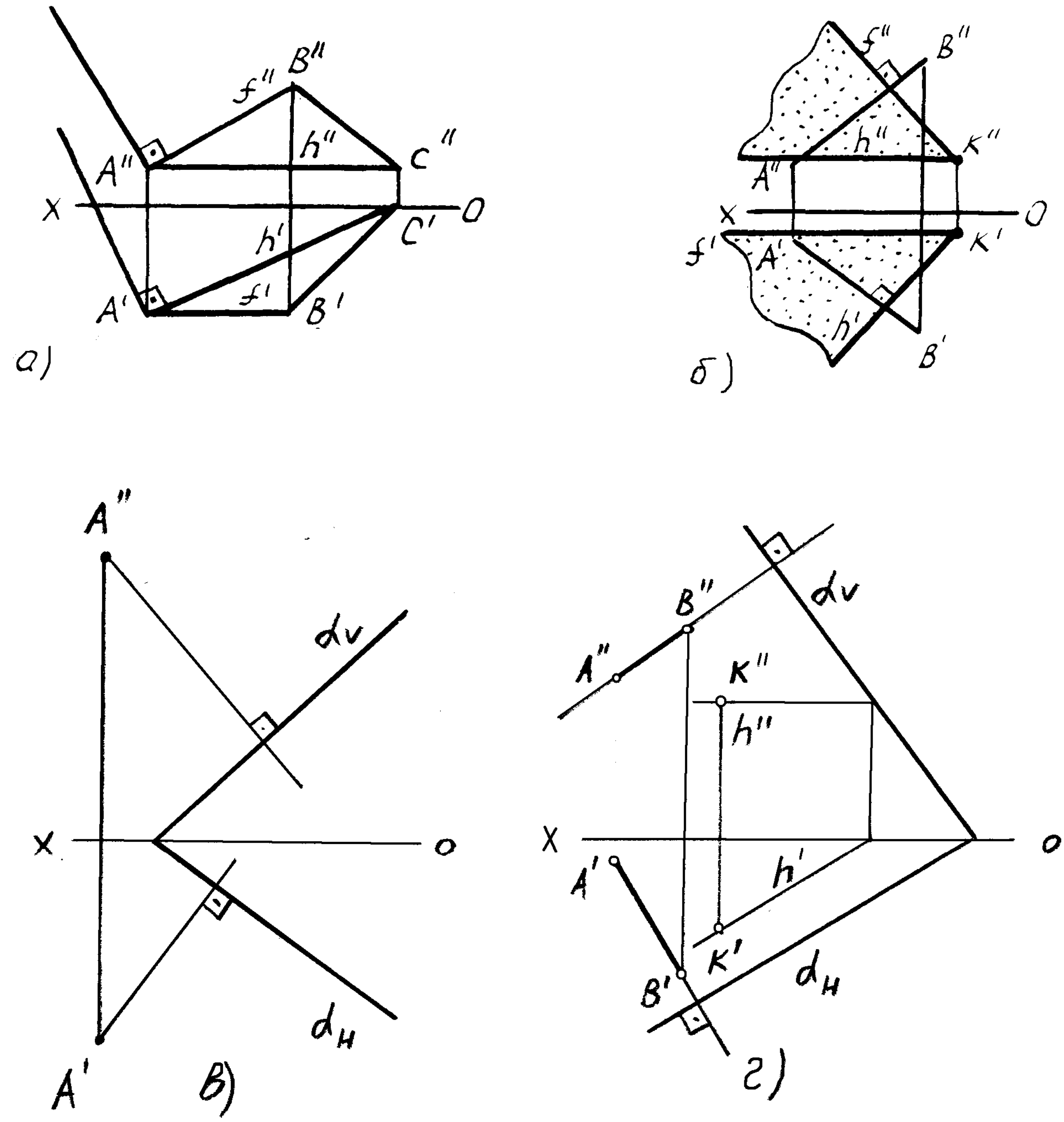


Рисунок 5.2 – Построение взаимно перпендикулярных прямой и плоскости

5.1 Определение расстояний между геометрическими объектами

Среди этих задач можно выделить следующие задачи: расстояние от точки до плоскости, расстояние от точки до прямой, расстояние между двумя параллельными прямыми, расстояние между двумя скрещивающимися прямыми, расстояние между двумя параллельными плоскостями и другие. В общем случае все задачи сводятся к определению расстояний между двумя точками.

Чтобы определить расстояние от точки до плоскости, необходимо выполнить ряд логических действий:

1) Из точки опустить перпендикуляр на заданную плоскость;

2) Найти точку встречи перпендикуляра с плоскостью;

3) Определить НВ расстояния между заданной и найденной точками.

Задача на определение расстояния от точки до прямой решается по следующему плану:

1) Через точку **k** провести плоскость, перпендикулярную заданной прямой;
2) Найти точку встречи **M** заданной прямой с проведенной плоскостью;
3) Соединить полученные точки (это будет перпендикуляр из точки на прямую);
4) Определить НВ перпендикуляра.

Пространственная модель решения второй задачи представлена на рисунке 5.3. Рассмотренная задача относится также к задачам на перпендикулярность двух прямых.

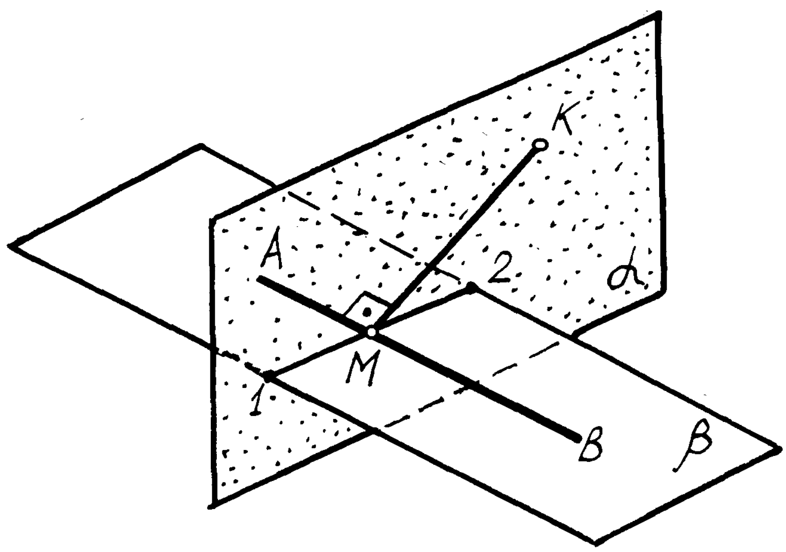


Рисунок 5.3 – Расстояние от точки до прямой

Другие упомянутые задачи на определение расстояний легче решаются методами преобразования эпюра, которые будут рассмотрены в последующих разделах.

5.2 Перпендикулярность плоскостей

Плоскость перпендикулярна другой плоскости, если она содержит прямую, перпендикулярную другой плоскости (рисунок 5.4а). Таким образом, для того, чтобы провести плоскость, перпендикулярную другой, необходимо сначала провести перпендикуляр к заданной плоскости, а затем через него провести искомую плоскость. На рисунке 5.4б представлена задача: через точку **K** провести плоскость, перпендикулярную плоскости треугольника **ABC**. Искомая плоскость задана двумя пересекающимися прямыми, одна из которых перпендикулярна заданной плоскости.

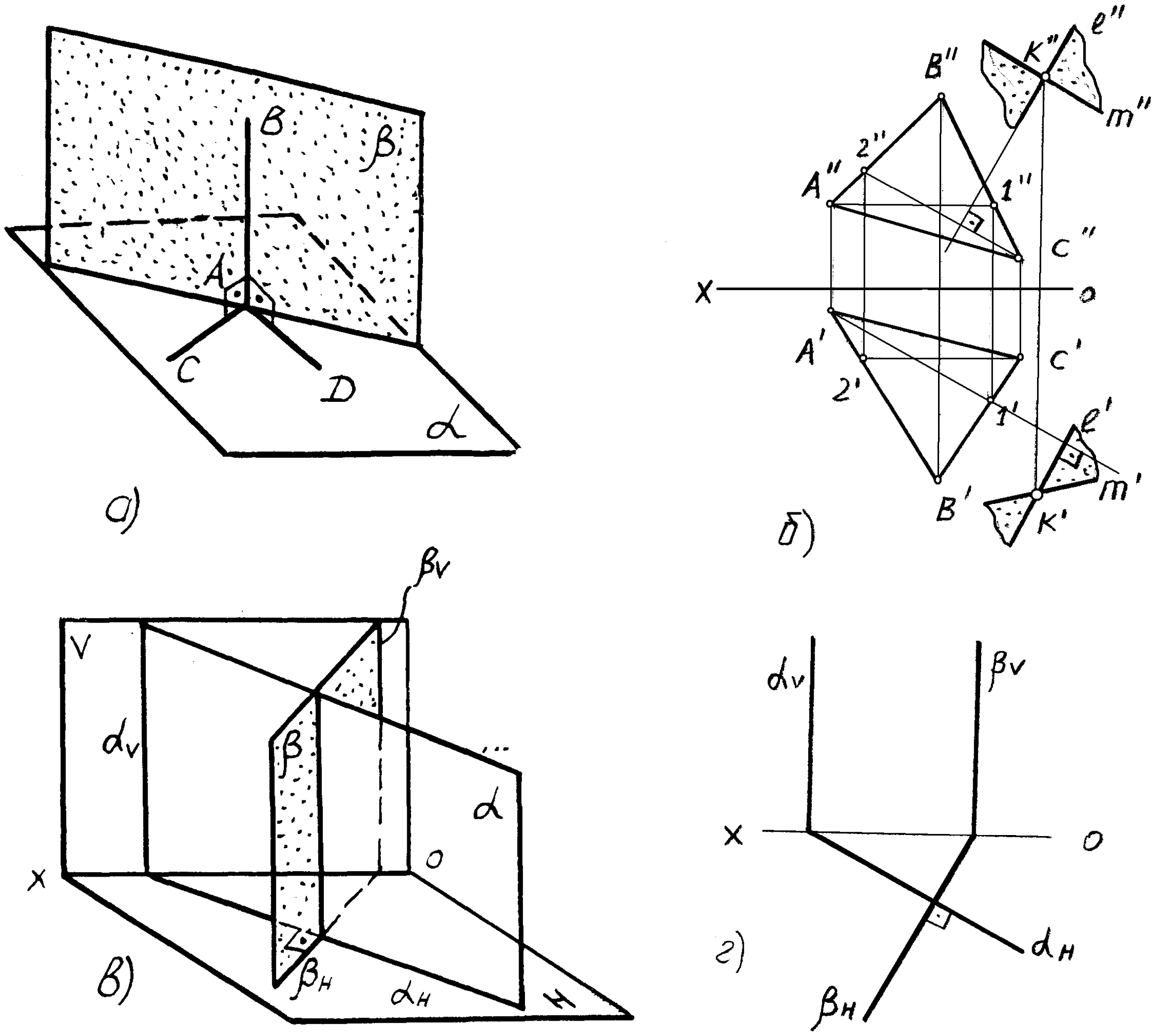


Рисунок 5.4 – Перпендикулярность двух плоскостей

Если две плоскости являются одноименными плоскостями частного положения (например, горизонтально- или фронтально-проецирующими), то при перпендикулярности плоскостей их собирательные следы будут перпендикулярны друг другу (рисунок 5.4в,г).

Если плоскости являются плоскостями общего положения, то при их перпендикулярности одноименные следы не будут взаимно перпендикулярны. Другими словами, перпендикулярность одноименных следов плоскостей общего положения не является достаточным условием для перпендикулярности самих плоскостей.

5.3 Определение углов между прямой и плоскостью и между двумя плоскостями.

Определение углов между геометрическими объектами является трудоемкой задачей, если её решать традиционными геометрическими способами. Так, например, задачу на определение угла между прямой и плоскостью (рисунок 5.5) можно решить способом, алгоритм которого содержит следующие операции:

1) Определить точку встречи прямой **AB** с плоскостью α;

2) Из точки **B** построить перпендикуляр на плоскость;

3) Найти точку встречи перпендикуляра с плоскостью;

4) Точки **K** и **N** соединить и определить НВ угла **BKN**.

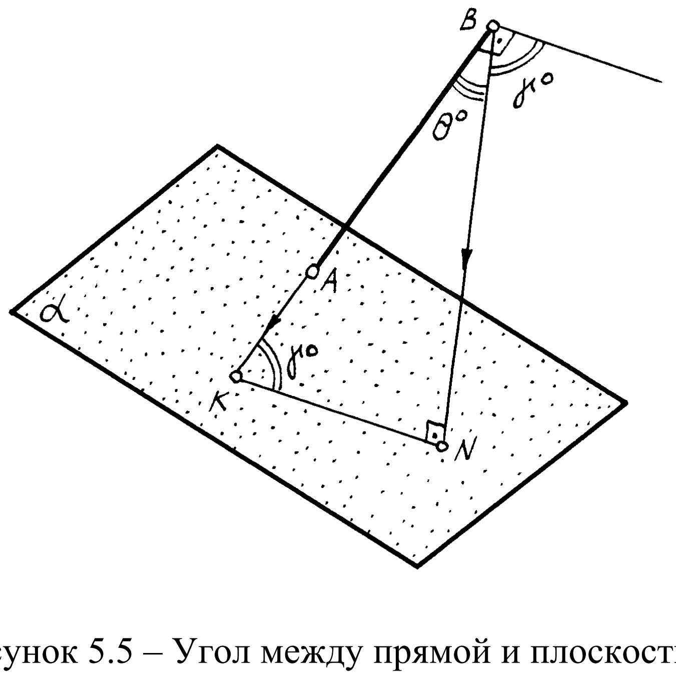


Рисунок 5.5 – Угол между прямой и плоскостью

Однако задача может быть значительно упрощена, если использовать способ решения задачи с помощью дополнительного угла. Дополнительным углом назовем угол между заданной прямой **AB** и перпендикуляром **BN**, обозначенный через Θ^{o}. Из приведенного рисунка видно, что, если из точки **B** прямой построить на плоскость перпендикуляр, определить НВ дополнительного угла Θ^{o}, то искомый угол определится по формуле:

$$\varphi^{o} = \mathbf{90^{o}} - \Theta^{o},$$

которую можно решить графически, достроив угол Θ до 90^{o}.

То же самое можно сказать о задаче на определение двугранного угла, то есть угла между двумя плоскостями (рисунок 5.6б). Первый способ (геометрический) достаточно трудоемок. Он заключается в пересечении угла вспомогательной плоскостью α, перпендикулярной ребру **AB**, построении линий пересечения **KN** и **KL** и определении натуральной величины угла **NKL**.

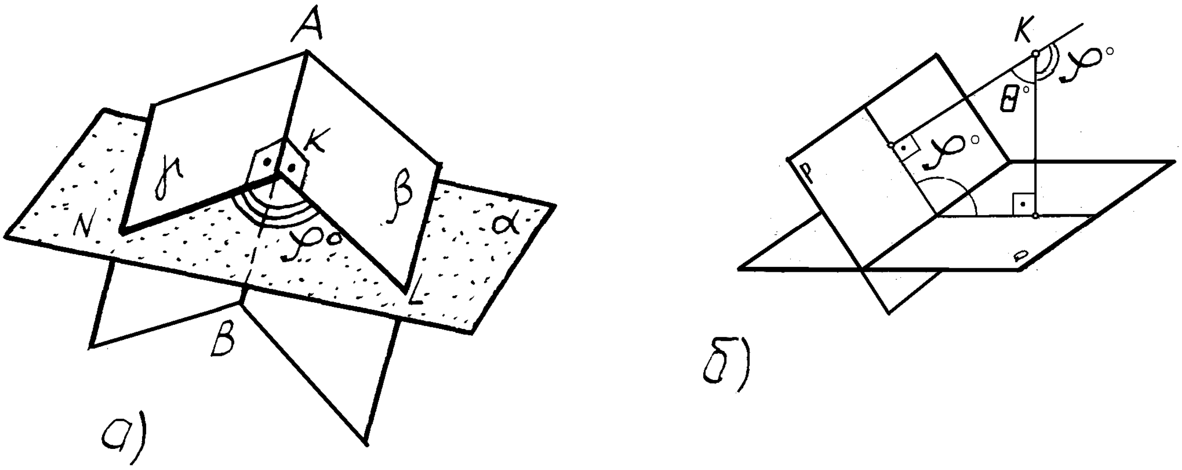


Рисунок 5.6 – Угол между двумя плоскостями

С помощью дополнительного угла задача решается следующим образом. В растворе двугранного угла (рисунок 5.6в) берут любую точку **K** и строят из неё перпендикуляры на обе плоскости двугранного угла, которые образуют дополнительный угол Θ^{o}. Далее определяют НВ дополнительного угла и дополняют его (графически) до 180 градусов, исходя из формулы:

$$\varphi^{o} = \mathbf{180^{o}} - \Theta^{o},$$

Дополненный угол будет искомым.

Натуральную величину дополнительного угла Θ^{o} в обеих задачах наиболее целесообразно определять методом вращения вокруг горизонтали или фронтали, который будет изложен в последующих темах.

ПРИМЕР 5.1. Из любой вершины треугольника **АВС** восстановить перпендикуляр длиной 40 мм.

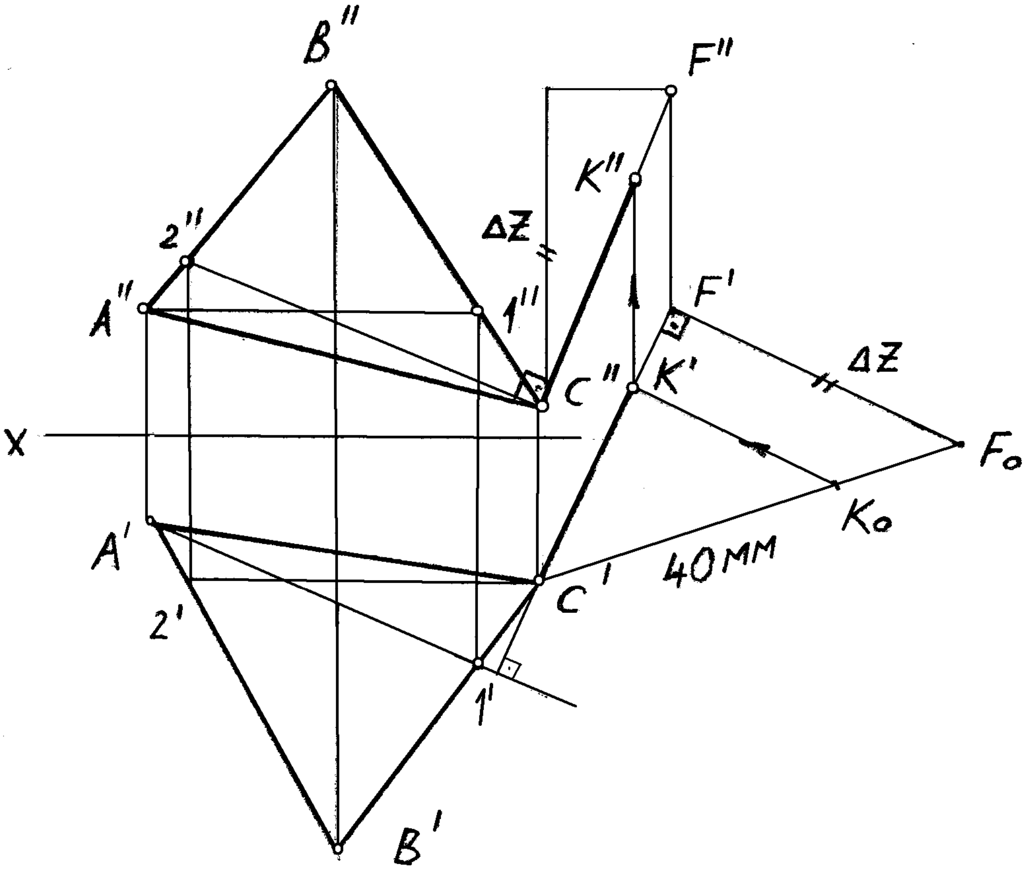


Рисунок 5.7

РЕШЕНИЕ. Сначала необходимо в плоскости треугольника **АВС** провести горизонталь и фронталь для того, чтобы построить проекции восстановленного перпендикуляра. Далее из точки **С** проводим проекции перпендикуляра согласно рассмотренному выше алгоритму о перпендикуляре к плоскости. Для того, чтобы отложить 40 мм, необходимо определить НВ ограниченного отрезка перпендикуляра **CF** (точку **F** берем произвольно). НВ отрезка **CF** определяем методом прямоугольного треугольника на горизонтальной проекции **CF**. Полученную точку **К** возвращаем на проекции по теореме Фалеса. Получаем проекции перпендикуляра длиной 40 мм (рисунок. 5.7).

ПРИМЕР 5.2. Найти расстояние от точки **А** до плоскости, заданной следами.

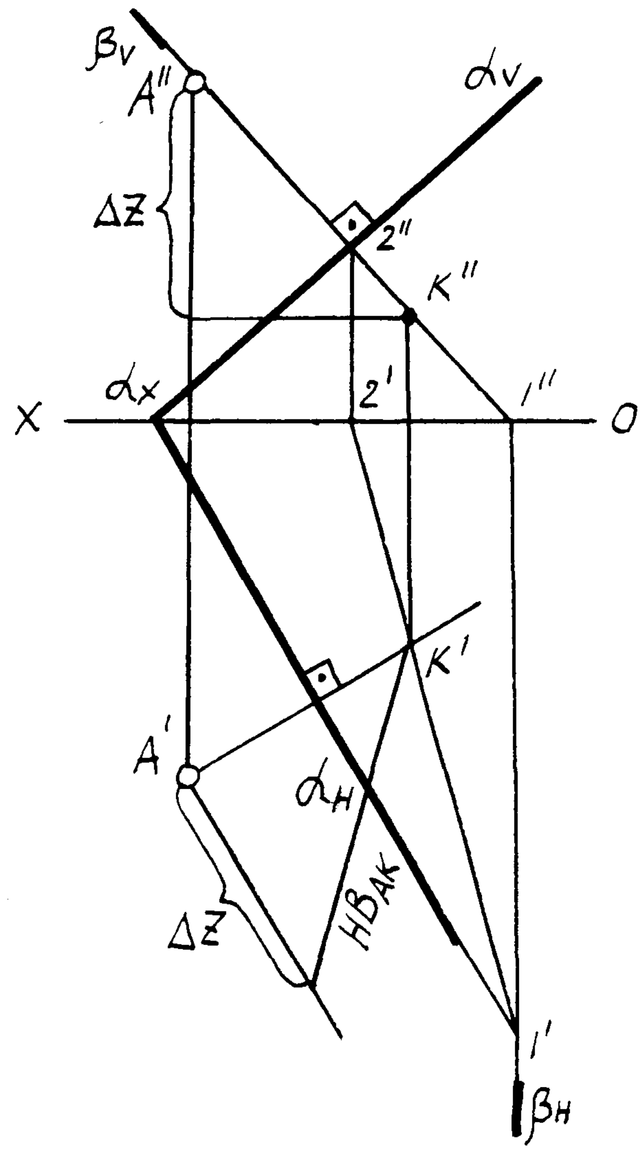


Рисунок 5.8

РЕШЕНИЕ. Из точки **А** строим перпендикуляр на заданную плоскость. Проекции перпендикуляра проводим перпендикулярно следам. Далее находим точку встречи перпендикуляра с заданной плоскостью с помощью вспомогательной фронтально-проецирующей плоскости β. Находим линию пересечения плоскостей α и β (линия 1-2) и точку встречи $\mathbf{K}'$ в месте пересечения горизонтальной проекции перпендикуляра с линией 1-2. Методом прямоугольного треугольника определяем НВ расстояния **АК** (рисунок 5.8).

ПРИМЕР 5.3. Определить расстояние от точки **K** до прямой **AB**.

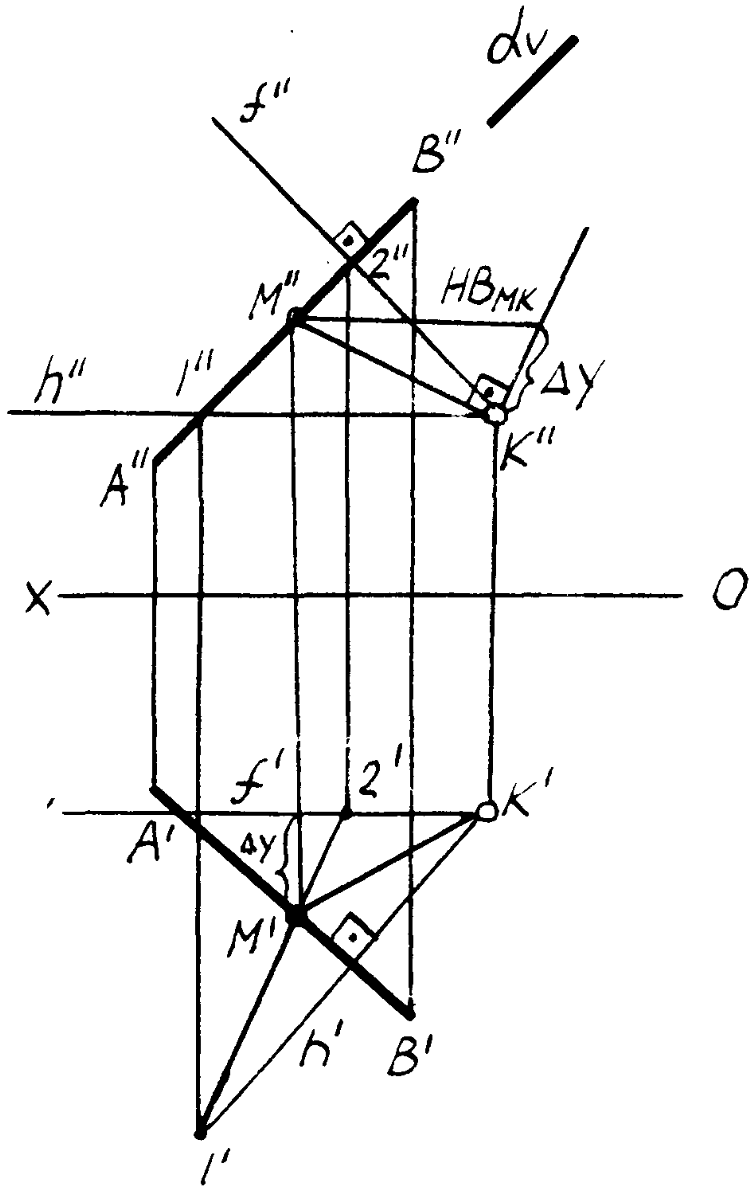


Рисунок 5.9

РЕШЕНИЕ. Через точку **K** проводим плоскость, перпендикулярную заданной прямой. Плоскость задаем пересекающимися горизонталью и фронталью. Их проекции проводим согласно алгоритму о перпендикуляре к плоскости (обратная задача). Далее находим точку встречи прямой **AB** с проведенной плоскостью (точка **M**). Определяем натуральную величину **KM** методом прямоугольного треугольника (рисунок 5.9).

6 МЕТОДЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЭПЮРА МОНЖА

Как видно из предыдущего материала, все геометрические задачи решаются проще, если объекты (или хотя бы один объект) заданы в частном положении.

Для перевода объектов из общего положения в частное с целью упрощения решения задач разработаны методы преобразования эпюра Монжа. Они делятся на два вида:

1) Геометрический объект при преобразовании остается неподвижным, а плоскости проекций меняют свое положение так, чтобы объект находился относительно них в частном положении (метод перемены или замены плоскостей проекций);

2) Плоскости проекций при преобразовании остаются неподвижными , а объект меняет свое положение так, чтобы относительно плоскостей проекций он занял частное положение (метод вращения вокруг проецирующей оси, метод совмещения, метод вращения вокруг линий уровня, метод плоско-параллельного перемещения).

6.1 Метод замены (перемены) плоскостей проекций

Смысл метода заключается в том, что в систему плоскостей проекций вводятся дополнительные плоскости проекций, по отношению к которым объект занимает частное положение (другими словами, плоскости проекций заменяются другими плоскостями). Ортогональность новых систем плоскостей проекций при этом сохраняется.

Замена плоскостей проекций осуществляется в последовательности:

$$X\frac{V}{H} \to X_1\frac{V_1}{H} \to X_2\frac{V_1}{H_1} \text{ и т.д. или}$$

$$X\frac{V}{H} \to X_1\frac{V}{H_1} \to X_2\frac{V_1}{H_1} \text{ и т.д.}$$

Обычно производят одну или две замены плоскостей проекций.

На рисунке 6.1 в наглядной форме показана методика проведения замены плоскостей проекций. На рисунке 6.1а представлена замена одной фронтальной плоскости проекций ($V \to V_1$), а на рисунке 6.1б – замена двух плоскостей проекций ($V \to V_1$; $H \to H_1$).

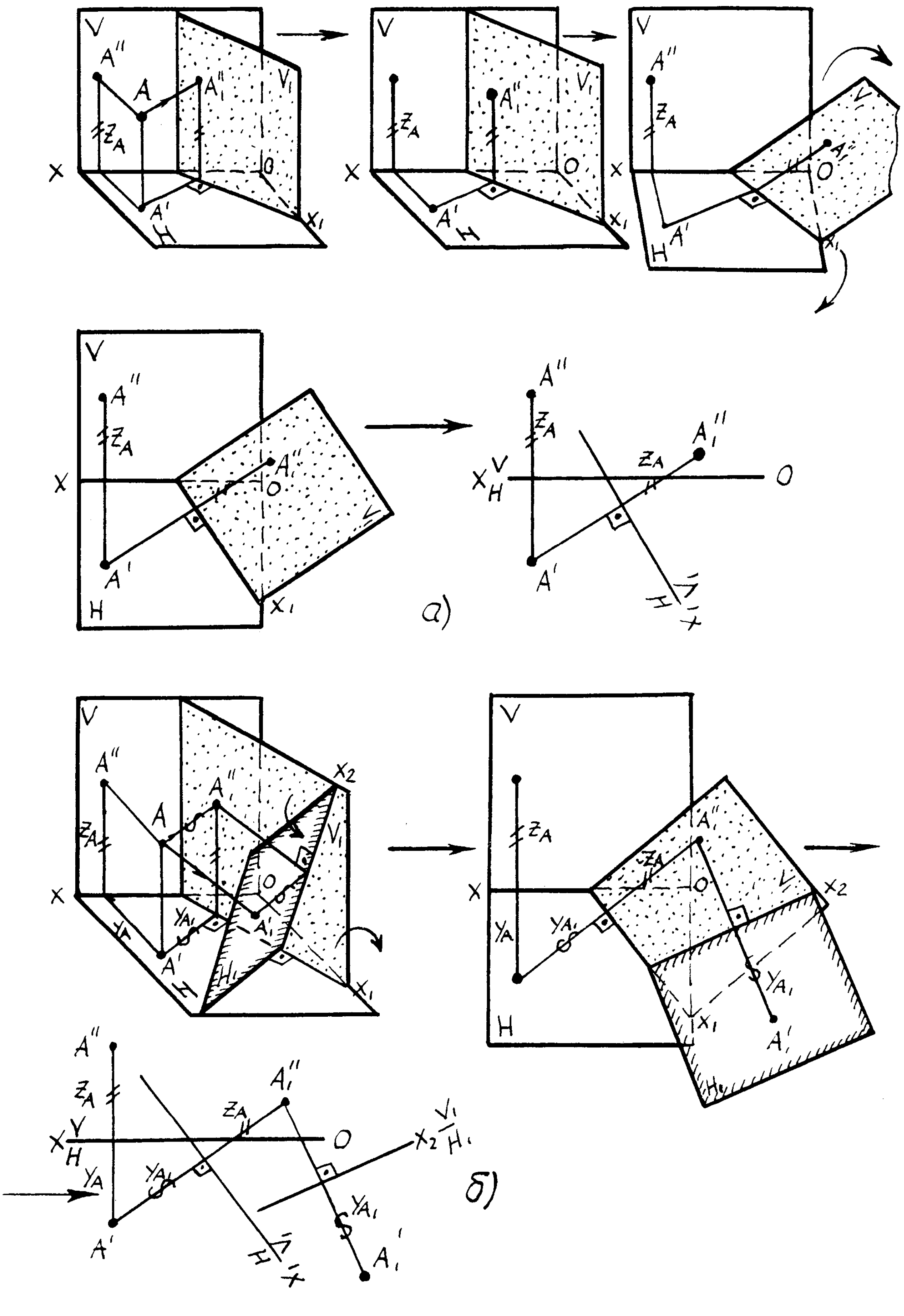


Рисунок 6.1 – Метод замены плоскостей проекций

Из представленных наглядных изображений и эпюров вытекают следующие правила построения новых фронтальных и горизонтальных проекций точки на дополнительные плоскости проекций:

1) *ПРИ ЗАМЕНЕ ПЛОСКОСТИ* **V** на $\mathbf{V}_1$. Для того, чтобы построить новую фронтальную проекцию точки на новой плоскости проекций $\mathbf{V_1}$, необходимо от новой оси по новой линии связи отложить аппликату точки из предыдущей системы плоскостей проекций.

2) *ПРИ ЗАМЕНЕ ПЛОСКОСТИ* **H** на $\mathbf{H}_1$. Для того, чтобы построить новую горизонтальную проекцию точки на новой плоскости проекций H_1, необходимо от новой оси по новой линии связи отложить ординату точки из предыдущей системы плоскостей проекций.

В методе замены плоскостей проекций выделяют две основные задачи:

1) Перевод прямой общего положения в проецирующую;

2) Перевод плоскости общего положения в проецирующую.

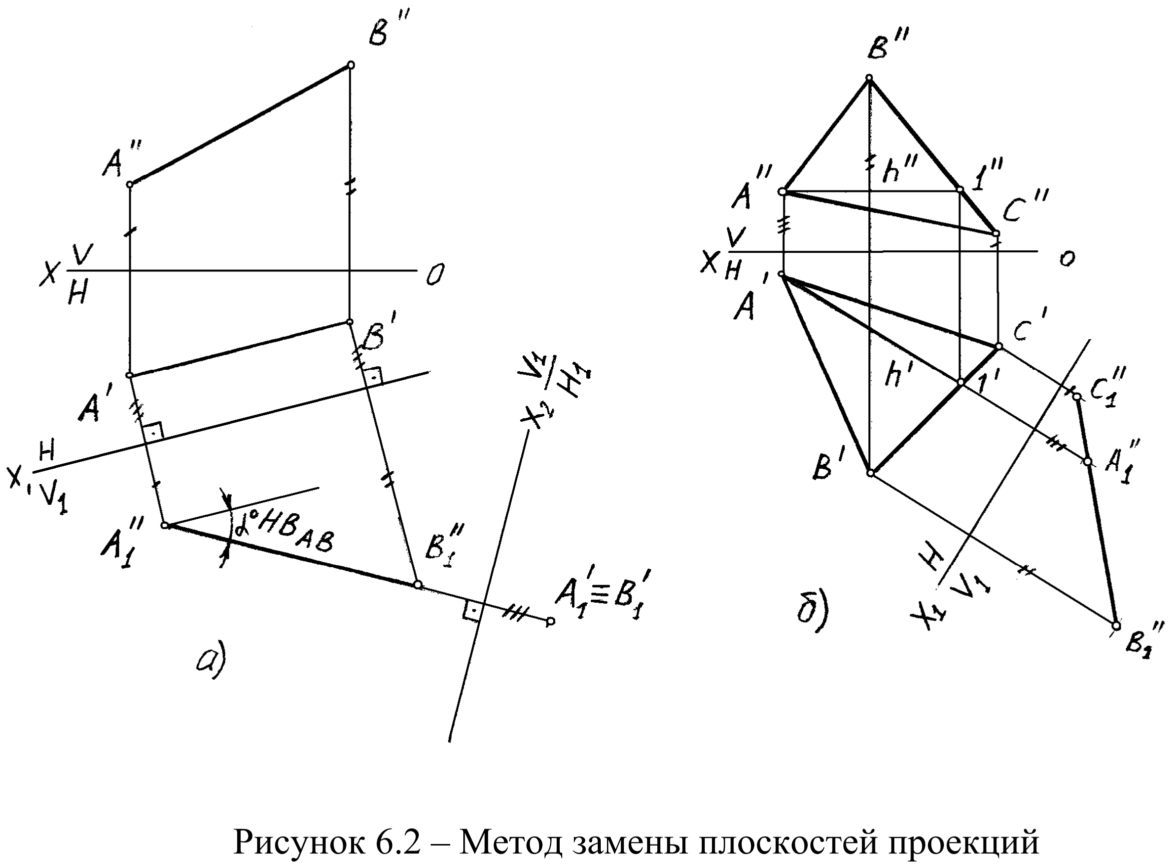


Рисунок 6.2 – Метод замены плоскостей проекций

На рисунке 6.2а показано преобразование прямой общего положения в проецирующую прямую, которое выполнено двумя заменами плоскостей проекций ($V \rightarrow V_1$; $H \rightarrow H_1$). Первая замена осуществляется параллельно прямой **AB**, а вторая – перпендикулярно прямой **AB**. Следует заметить, что при решении задачи определяется натуральная величина прямой (новая фронтальная проекция $A_1'' \; B_1''$) и угол наклона прямой к плоскости проекций **H** (угол α^{o}).

На рисунке 6.2б показано преобразование плоскости общего положения, заданной треугольником **ABC,** в проецирующую плоскость, которое выполнено одной заменой плоскостей проекций ($\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V_1}$). Замена осуществляется перпендикулярно горизонтали, проведенной в плоскости треугольника **ABC** для обеспечения перпендикулярности двух плоскостей (плоскости треугольника и новой плоскости проекций $\mathbf{V_1}$).

Рассмотренные задачи положены в основу решения многих геометрических задач.

ПРИМЕР 6.1. Определить расстояние между двумя параллельными прямыми **AB** и **CD** (Рис.6.3).

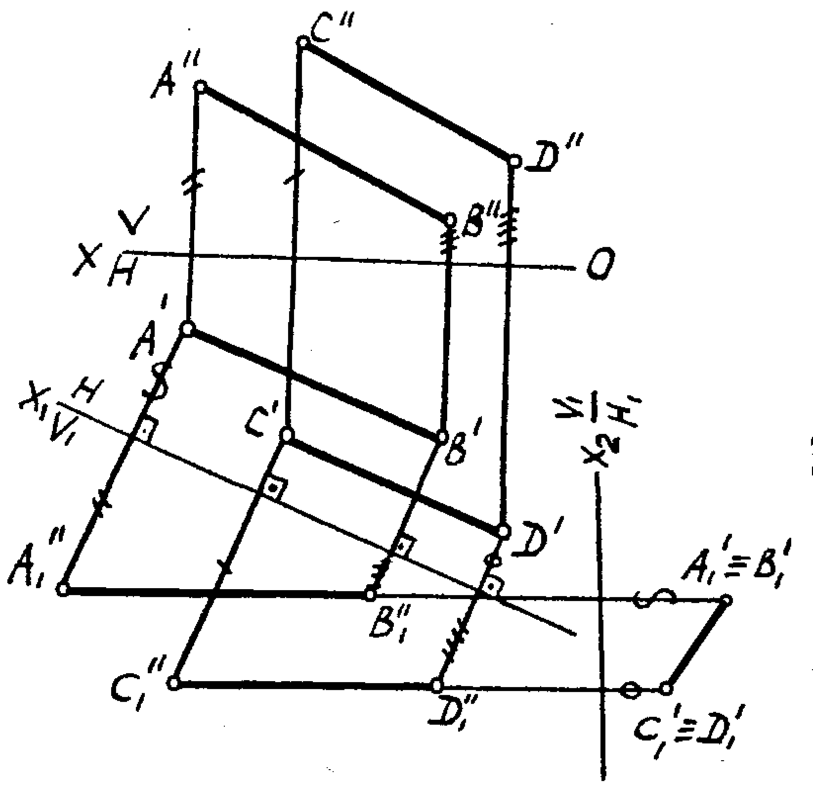


Рисунок 6.3

РЕШЕНИЕ. Расстояние между параллельными прямыми определится, если обе прямые преобразовать в проецирующие. Тогда расстояние между двумя полученными точками будет являться искомым расстоянием. Преобразование произведем двумя заменами (**V** $\rightarrow$ **V$_1$**; **H** $\rightarrow$ **H$_1$**).

ПРИМЕР 6.2. Определить угол между двумя плоскостями (двугранный угол).

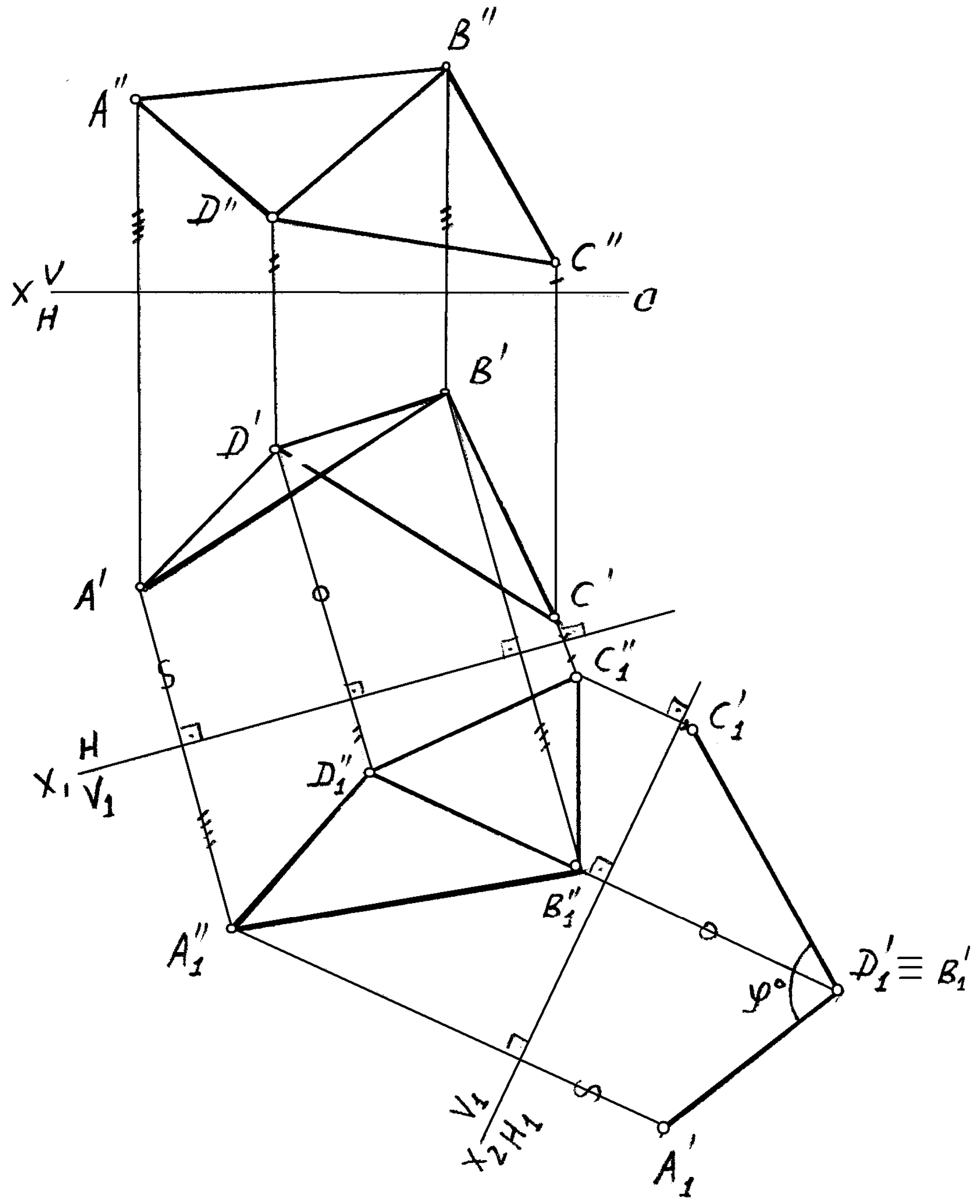


Рисунок 6.4

РЕШЕНИЕ. Двугранный угол определится, если общее ребро угла перевести в проецирующее положение (см. рисунок 6.2а). Тогда ребро "вырождается" в точку, а плоскости – в линии. Угол между линиями является искомым углом (рисунок 6.4).

ПРИМЕР 6.3. Определить натуральную величину треугольника **ABC**.

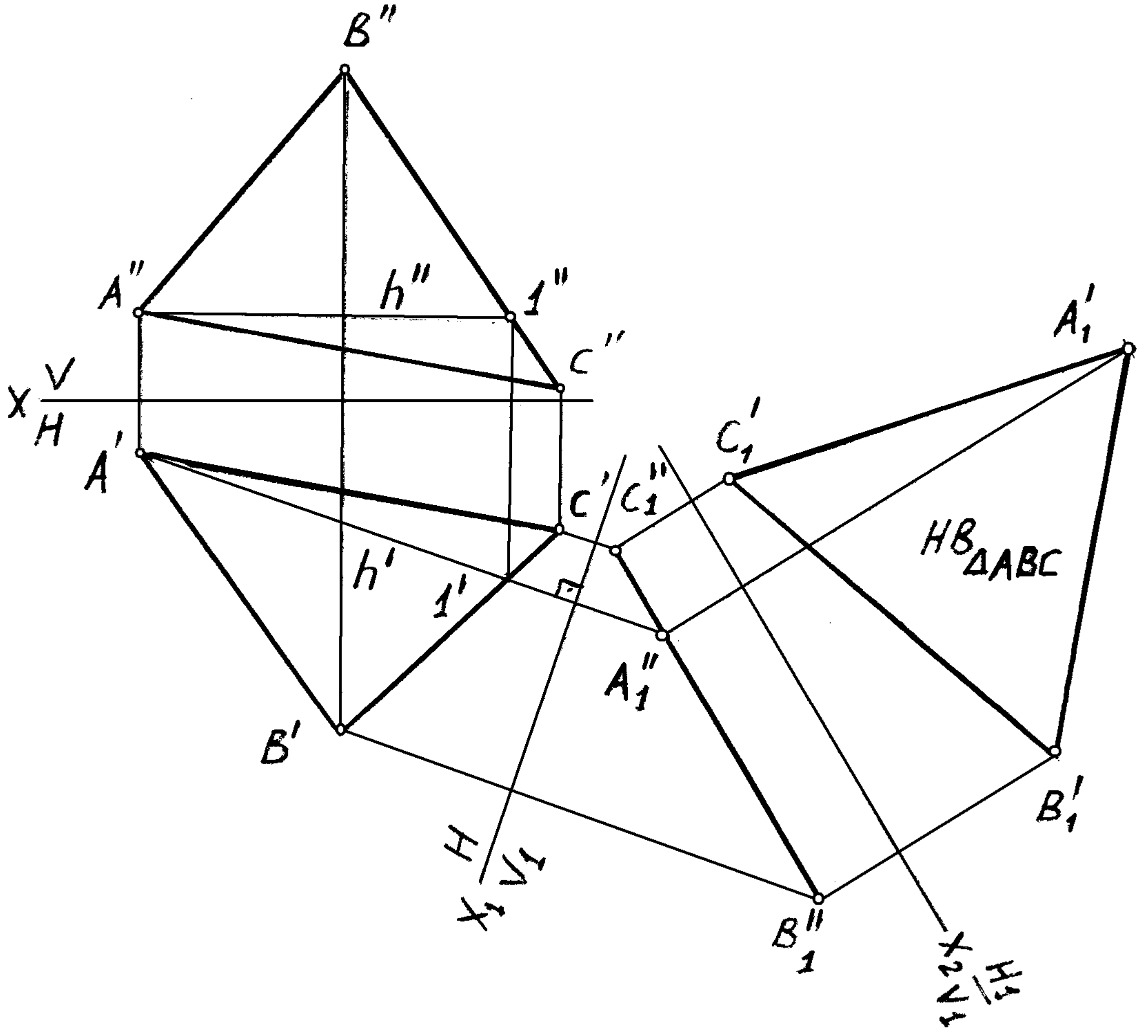


Рисунок 6.5

РЕШЕНИЕ. Натуральную величину треугольника определим двумя заменами ($\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V_1}$; $\mathbf{H} \rightarrow \mathbf{H_1}$).

Сначала треугольник переведем в проецирующее положение, а затем – в параллельное. В последнем положении плоскость треугольника будет параллельна новой плоскости проекций $\mathbf{H_1}$ и спроецируется на эту плоскость в натуральную величину (рисунок 6.5).

6.2 Метод вращения вокруг проецирующих осей

Метод заключается в том, что геометрический объект (прямую или плоскость) вращают вокруг проецирующей оси до положения параллельности какой-либо плоскости проекций. В результате вращения геометрический объект проецируется на плоскость проекций в натуральную величину. На рисунке 6.6 в наглядной форме представлено вращение вокруг горизонтально-проецирующей оси (а) и вокруг фронтально-проецирующей оси (б) точки **А**.

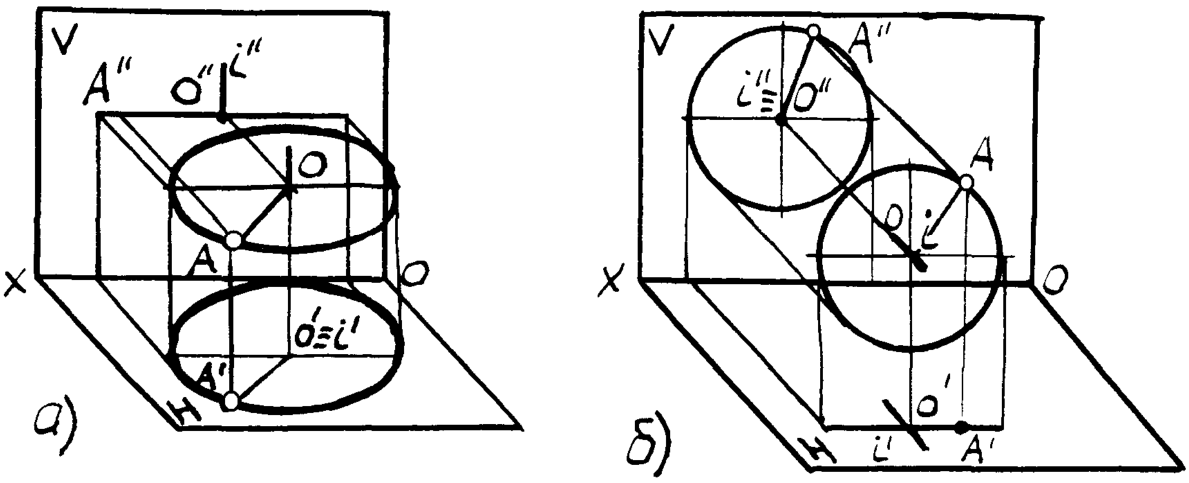


Рисунок 6.6 Вращение вокруг проецирующей прямой

Из приведенных схем видно, что если точка вращается вокруг горизонтально-проецирующей оси, то её горизонтальная проекция перемещается по дуге окружности, а фронтальная – по прямой линии, параллельной оси 0X. При вращении вокруг фронтально-проецирующей оси наблюдается обратная картина.

ПРИМЕР 6.4. Определить угол наклона прямой к плоскости проекций **H** и натуральную величину прямой.

РЕШЕНИЕ. НВ прямой и угол α^{o} определится, если прямую вращать вокруг горизонтально-проецирующей оси до параллельности плоскости проекций **V**. Ось проведем, например, через точку **B** (рисунок 6.7).

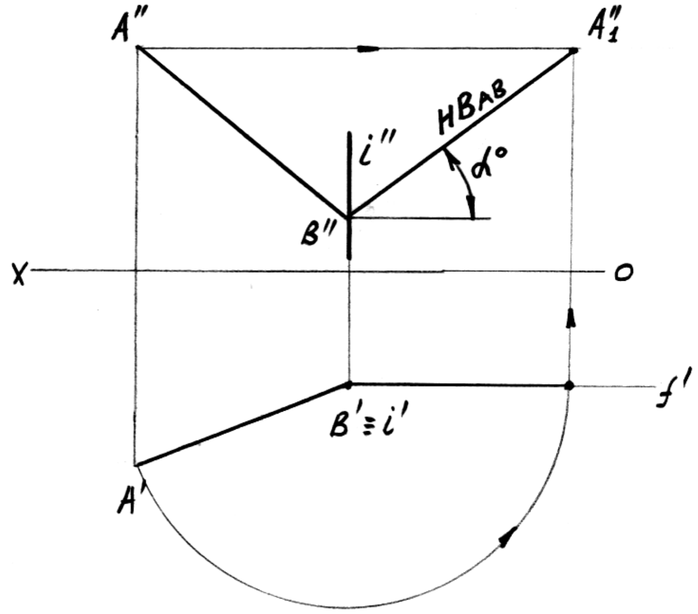


Рисунок 6.7

6.3 Вращение вокруг линий уровня (горизонтали или фронтали)

Метод вращения вокруг горизонтали или фронтали заключается в том, что объект, например, плоскую фигуру вращают вокруг горизонтали или фронтали, проведенной в плоскости, до положения параллельности какой-либо плоскости проекций. После окончания вращения объект проецируется на плоскость проекций в натуральную величину (рисунок 6.8).

Главным вопросом метода вращения вокруг линий уровня является вопрос о параметрах вращения. Параметры вращения – это аппарат для решения задач с использованием этого метода. Параметрами вращения являются (рисунок 6.9):

1) Объект вращения. Под объектом вращения следует понимать точку на геометрическом теле. Поэтому в каждой задаче важно определить точки, которые будут вращаться и конечное положение которых надо определить, чтобы получить решение;

2) Ось вращения (выбирается произвольно, если не задана);

3) Плоскость вращения объекта. Она проводится перпендикулярно оси вращения;

4) Центр вращения объекта. Это точка пересечения оси с плоскостью вращения;

5) Радиус вращения объекта. Это расстояние между точкой и центром вращения.

6) Новое положение объекта вращения (выбирается такое, чтобы геометрический объект занял частное положение).

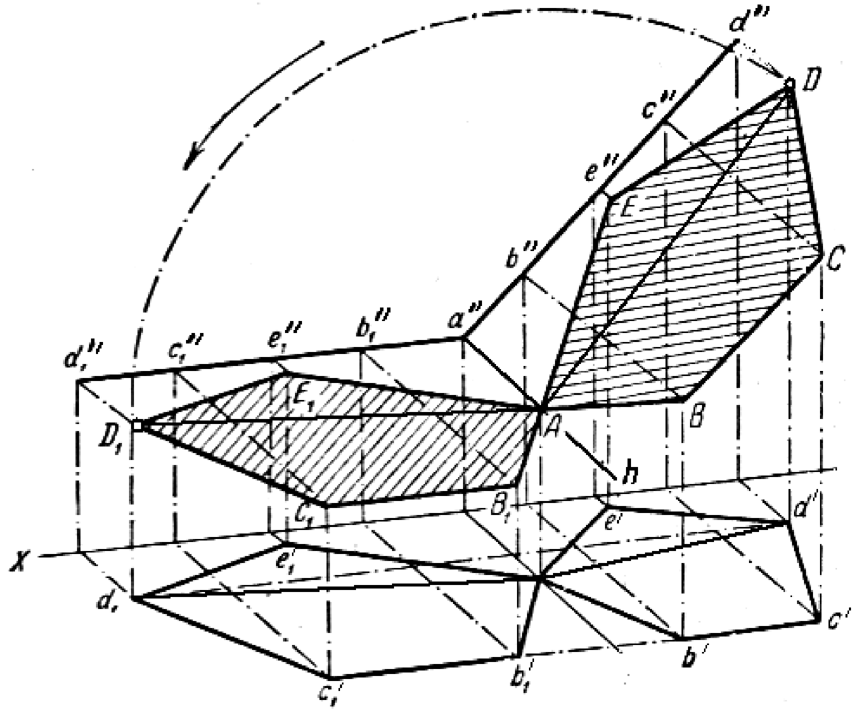


Рисунок 6.8 – Вращение вокруг линии уровня

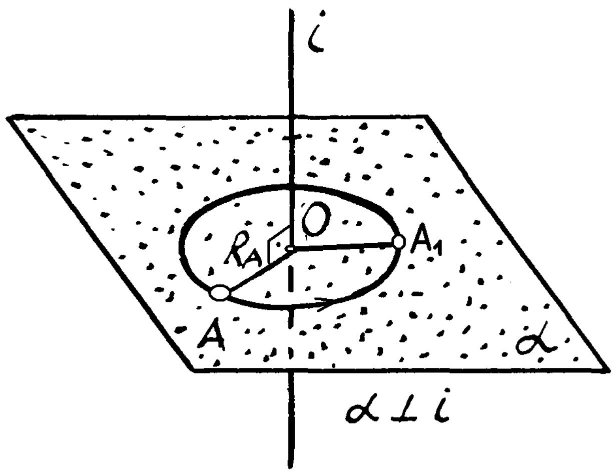


Рисунок 6.9 – Параметры вращения

Конечное положение объекта вращения (на рисунке 6.8, например, точка **D**) определится, когда радиус вращения (отрезок **AD**) станет проецироваться на плоскость проекции в натуральную величину.

ПРИМЕР 6.5. Определить натуральную величину треугольника АВС методом вращения вокруг горизонтали (рисунок 6.10).

РЕШЕНИЕ. План решения задачи и его реализация:

1) В плоскости треугольника проводим горизонталь **h**;

2) Определяем объекты вращения – точки **B** и **C**. Точка **A** не может являться объектом вращения, так как она находится на оси и не будет перемещается в плоскости вращения;

3) Проводим плоскости вращения точек **B** и **C** перпендикулярно **h**$^{/}$;

4) Начинаем вращать точку, например, **B**;

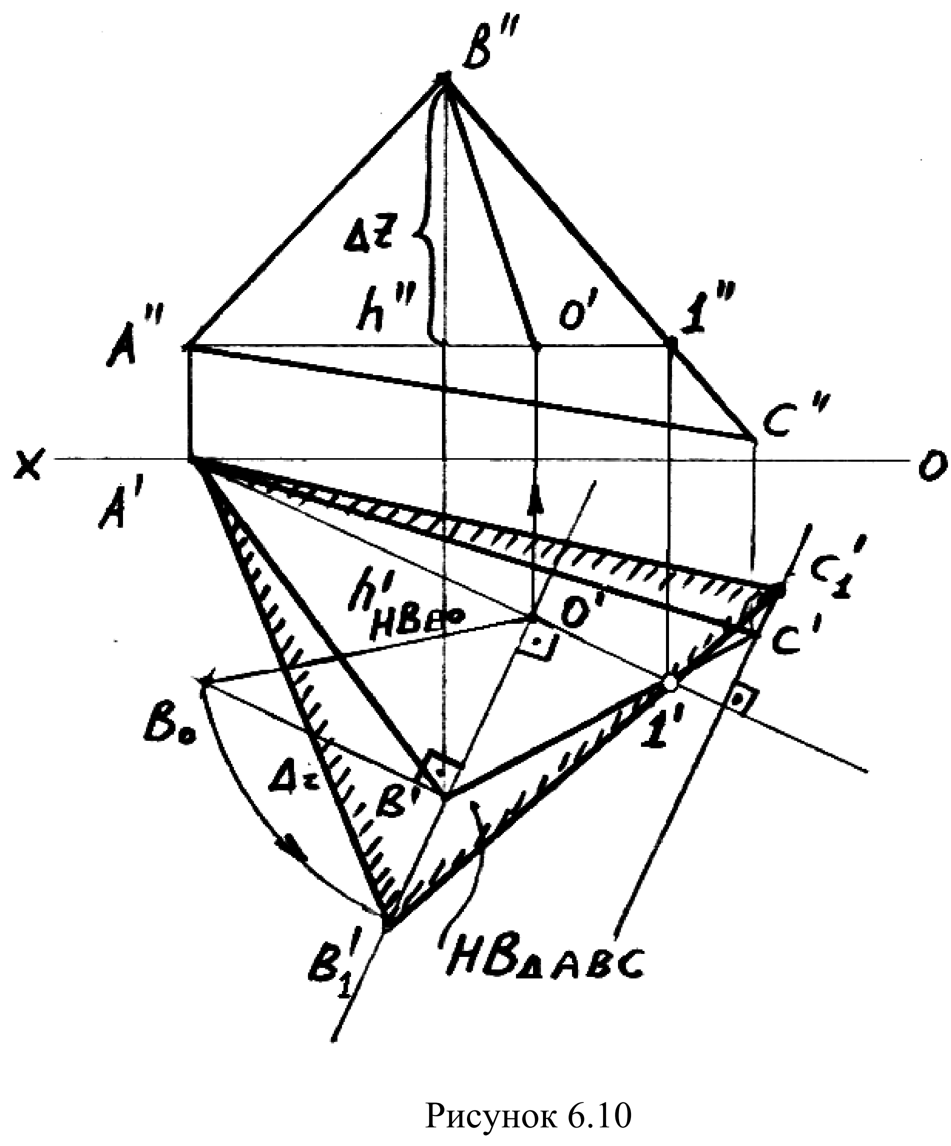


Рисунок 6.10

5) В месте пересечения плоскости вращения точки **B** с осью вращения находим центр вращения **O** ($O^/$, а затем $O^{//}$);

6) Строим проекции радиуса вращения точки **B** (отрезок **OB**);

7) Находим НВ радиуса вращения **OB** и откладываем его на плоскости вращения точки **B** от точки $O^/$;

8) Получаем окончательное положение точки после вращения (точка $B_1^/$);

9) Положение точки **C** можно найти таким же способом или другим способом, соединив точки $B_1^/$ и $1^/$ до пересечения с плоскостью вращения точки **C**. Получим точку $C_1^/$.

10) Полученные точки соединяем. Треугольник $A^/B_1^/C_1^/$ – искомый.

Ранее рассматривался вопрос об определении углов между прямой и плоскостью и между двумя плоскостями (см. раздел "Метрические задачи") с помощью дополнительных углов. Было показано, что натуральную величину дополнительных углов наиболее целесообразно определять методами преобразования, например, методом вращения вокруг горизонтали или фронтали. Рассмотрим пример задачи на определение угла между двумя плоскостями.

ПРИМЕР 6.6. Определить угол между плоскостью треугольника **ABC** и плоскостью α, заданной следами.

РЕШЕНИЕ. План решения и его реализация:

1) В растворе двугранного угла возьмем любую точку **K**;

2) Из точки **K** опустим перпендикуляры на обе плоскости (см. тему "Перпендикуляр к плоскости");

3) Между двумя перпендикулярами получаем дополнительный угол θ^o;

4) Определяем натуральную величину дополнительного угла методом вращения вокруг горизонтали **h** (см. тему "Вращение вокруг линий уровня");

4) Достраиваем полученную натуральную величину дополнительного угла до 180 градусов и получаем искомый угол φ^o(рисунок 6.11).

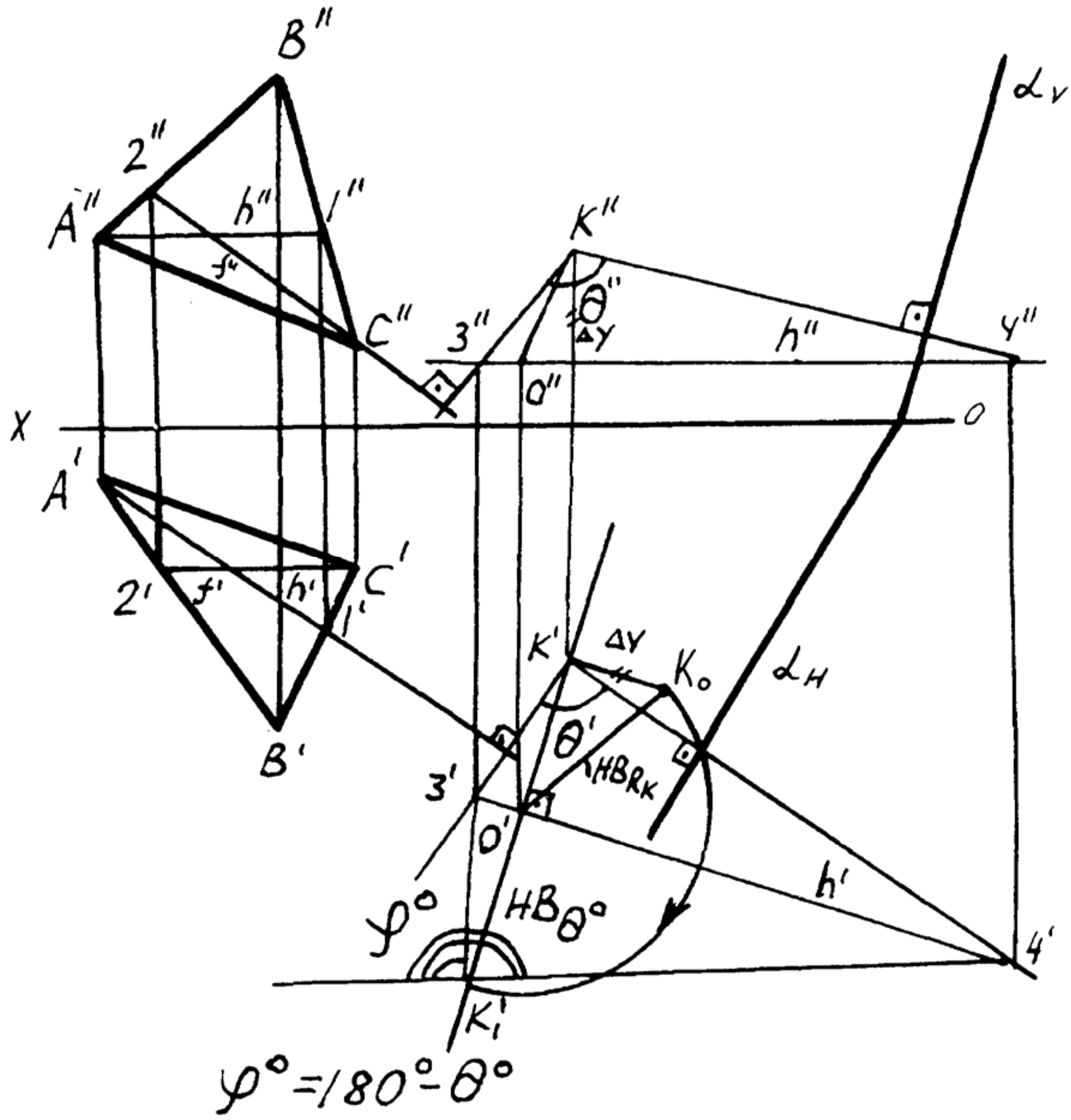


Рисунок 6.11

6.4 Метод совмещения

Метод совмещения представляет из себя частный случай вращения вокруг линии уровня. За ось вращения в этом случае принимают один из следов плоскости. Сущность метода заключается в том, что плоскость вместе с объектом, находящимся в ней, вращают до совмещения с плоскостью проекций.

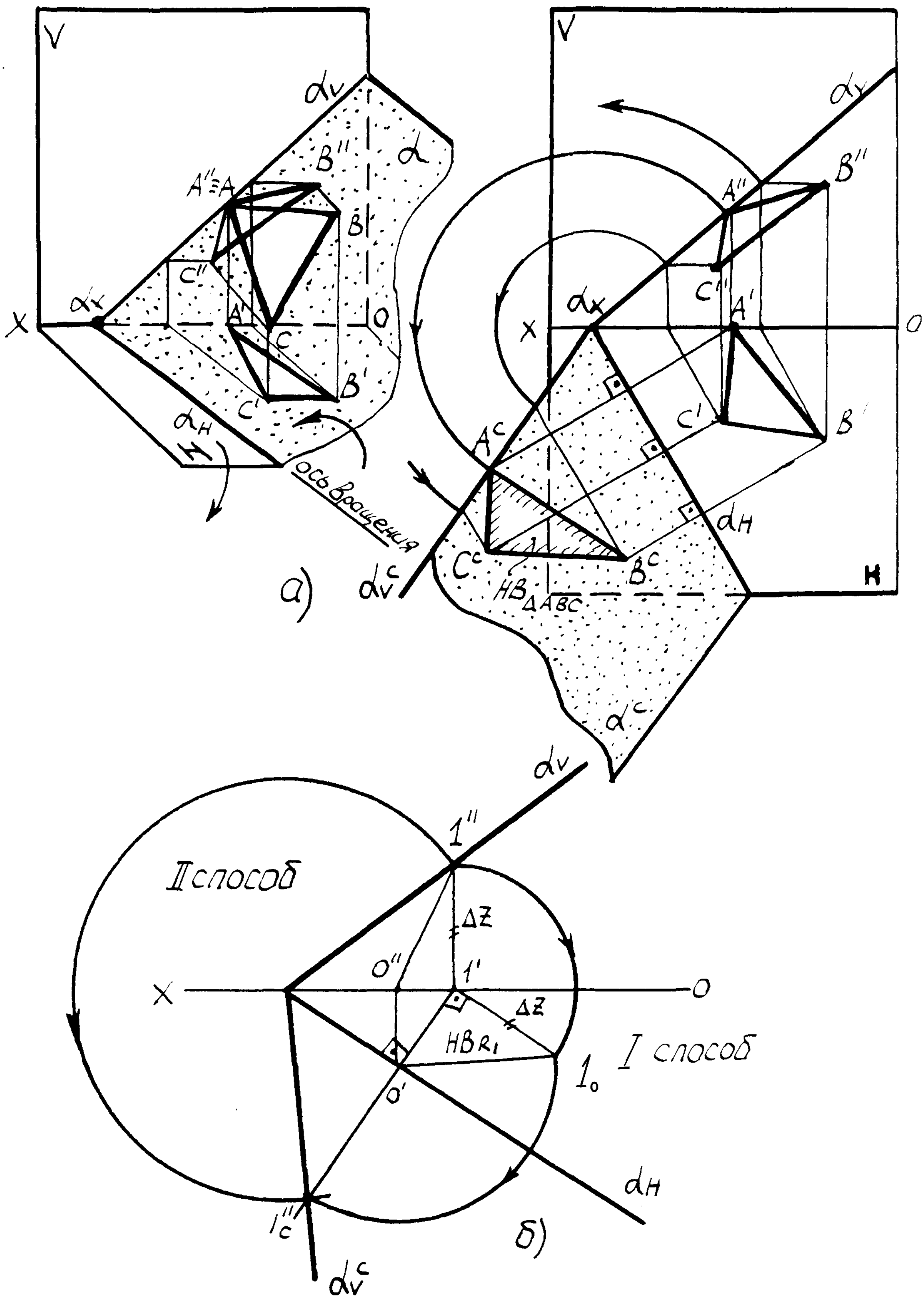


Рисунок 6.12 – Метод совмещения

Наглядное изображение способа совмещения вокруг горизонтального следа представлено на рисунке 6.12. Исходное положение плоскостей проекций и плоскости дано на рисунке 6.12а. После поворота плоскости проекций **H** и плоскости α образуется единая плоская система, в которой заданная плоскость вместе с треугольником, принадлежащим этой плоскости, совмещена с плоскостью **H** (рисунок 6.12а). Для метода совмещения характерны все параметры вращения, которые рассматривались выше.

Главным вопросом метода совмещения является построение совмещенного следа α_V^C, то есть следа, который вращается вместе с плоскостью и совмещается с плоскостью проекций. Его построение можно произвести двумя способами (рисунок 6.12б). В первом способе построение ведется аналогично методу вращения вокруг горизонтали. Второй способ является прикладным, и он менее трудоемок по сравнению с первым.

ПРИМЕР 6.7. Найти натуральную величину треугольника **ABC**, принадлежащего плоскости α.

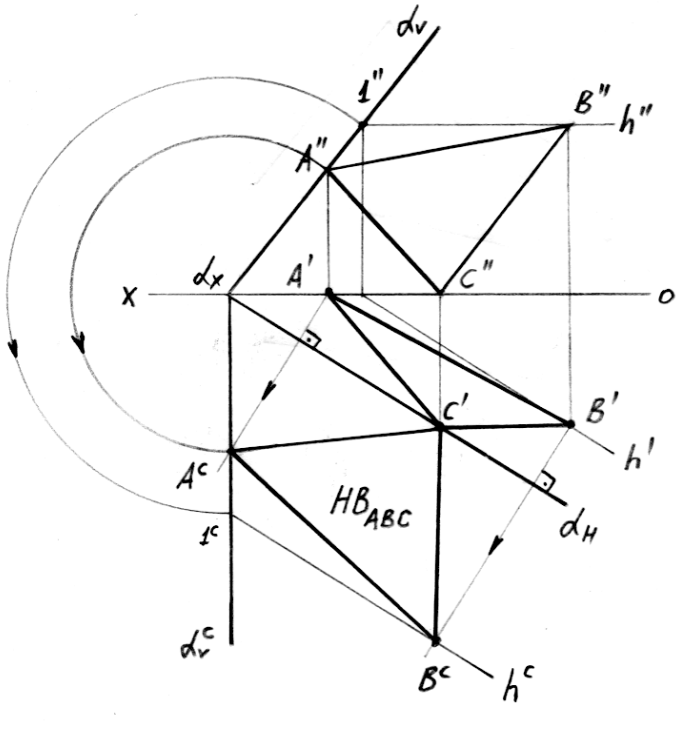


Рисунок 6.13

РЕШЕНИЕ. С помощью точки **A**, принадлежащей фронтальному следу, найдем совмещенный фронтальный след α_V^C (вторым способом).

Точка **C** треугольника находится на горизонтальном следе плоскости и поэтому не будет вращаться (горизонтальный след плоскости – ось вращения). Через точку **B** треугольника проведем горизонталь **h** и точку $\mathbf{1}^{//}$ с помощью дуги окружности переместим на совмещенный след (точка $\mathbf{1}^{C}$). Через точку $\mathbf{1}^{C}$ проведем горизонталь в совмещенном положении $\mathbf{h}^{C}$, а через точку $\mathbf{B}^{/}$ проведем плоскость вращения. На пересечении $\mathbf{h}^{C}$ и плоскости вращения точки **B** найдем точку $\mathbf{B}^{C}$. Соединив точки $\mathbf{A}^{C}$, $\mathbf{B}^{C}$ и $\mathbf{C}^{/}$, найдем НВ треугольника (рисунок 6.13).

ПРИМЕР 6.8. Методом совмещения построить наклонное сечение детали.

РЕШЕНИЕ. Секущая плоскость А-А в данном случае является фронтально проецирующей. Совмещение осуществлялось вращением вокруг горизонтального следа, который перпендикулярен горизонтальной оси проекций (рисунок 6.14).

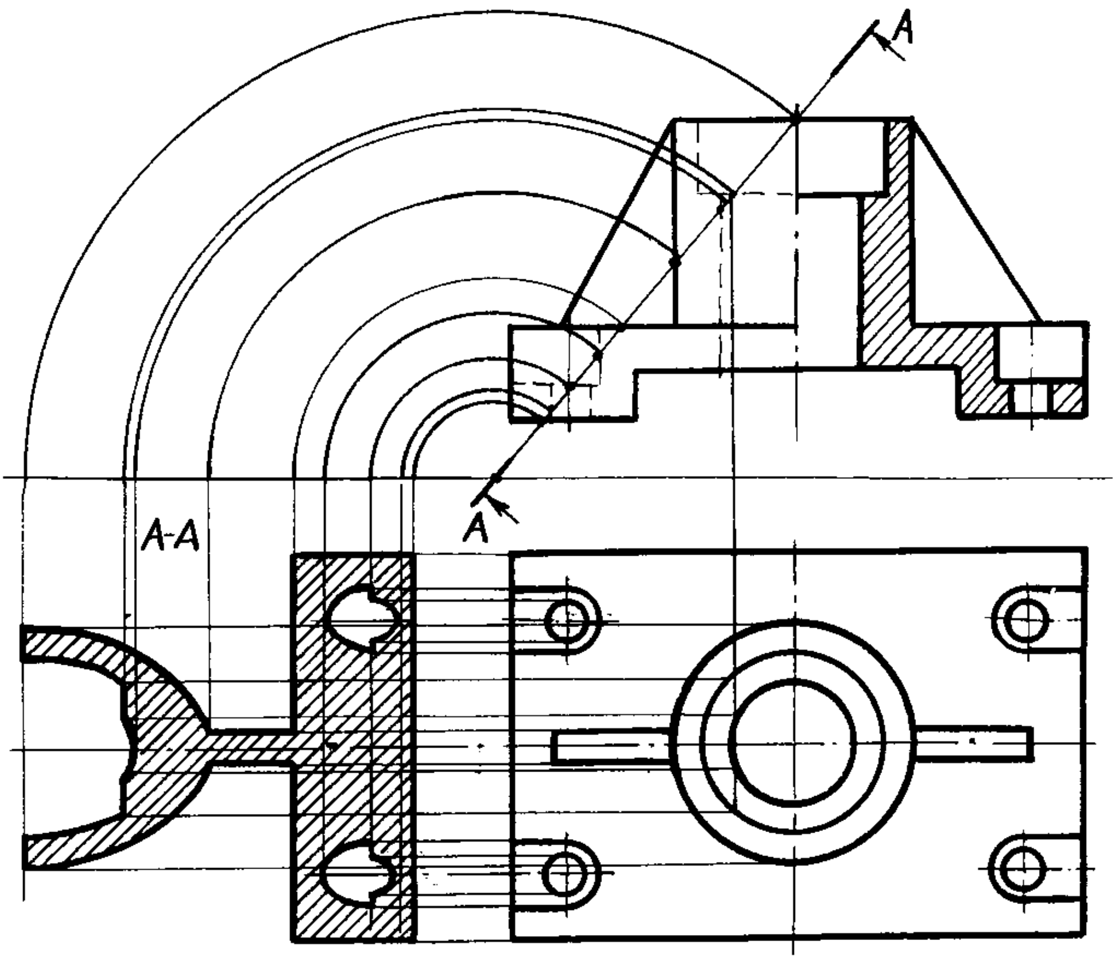


Рисунок 6.14

6.5 Метод плоско-параллельного перемещения

Плоско-параллельное перемещение – это вид механического движения объекта, когда каждая его точка перемещается в плоскости, параллельной какой-либо плоскости проекций, в результате чего объект перемещается на новое место и ему придаётся новое положение (рисунок 6.15).

Различают плоско-параллельное перемещение относительно плоскости **H** – ППП(H) и относительно плоскости **V** – ППП(V).

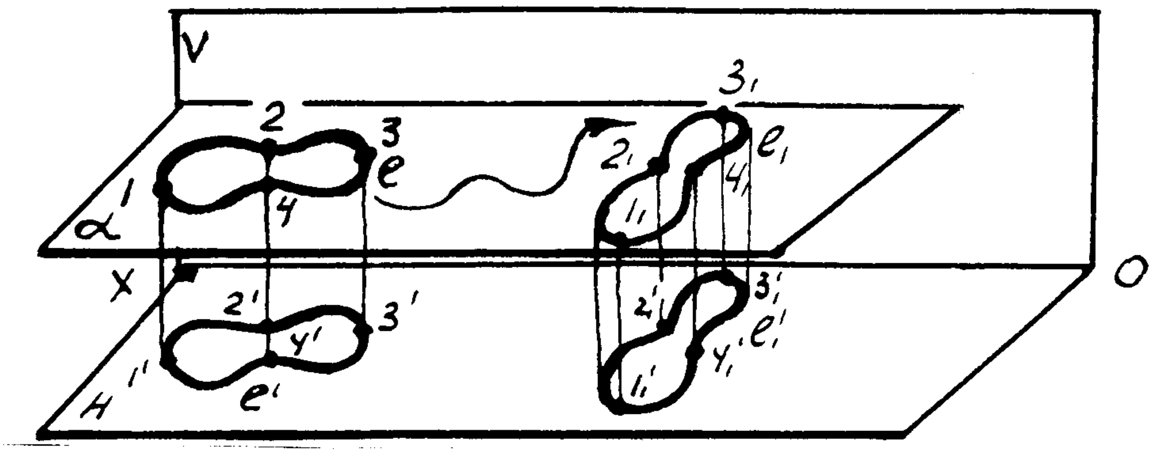


Рисунок 6.15 – Плоско-параллельное перемещение

При плоско-параллельном перемещении объекта относительно плоскости H горизонтальная проекция объекта изменяет свое положение, не изменяя своей формы и размеров. Фронтальная проекция объекта при этом изменяется по форме и размерам, а каждая точка объекта перемещается по прямым линиям, параллельным оси 0X. ППП(H) показано на рисунке 6.16а. Обратная картина наблюдается при ППП(V) – рисунок 6.16б.

Оба вида плоско-параллельного перемещения, представленные на рисунке, применяются при решении типовых задач на определение натуральной величины плоских фигур.

Для решения задачи по определению натуральной величины отрезка прямой общего положения необходимо сделать одно перемещение и разместить одну из проекций так, чтобы она стала параллельна оси OX.

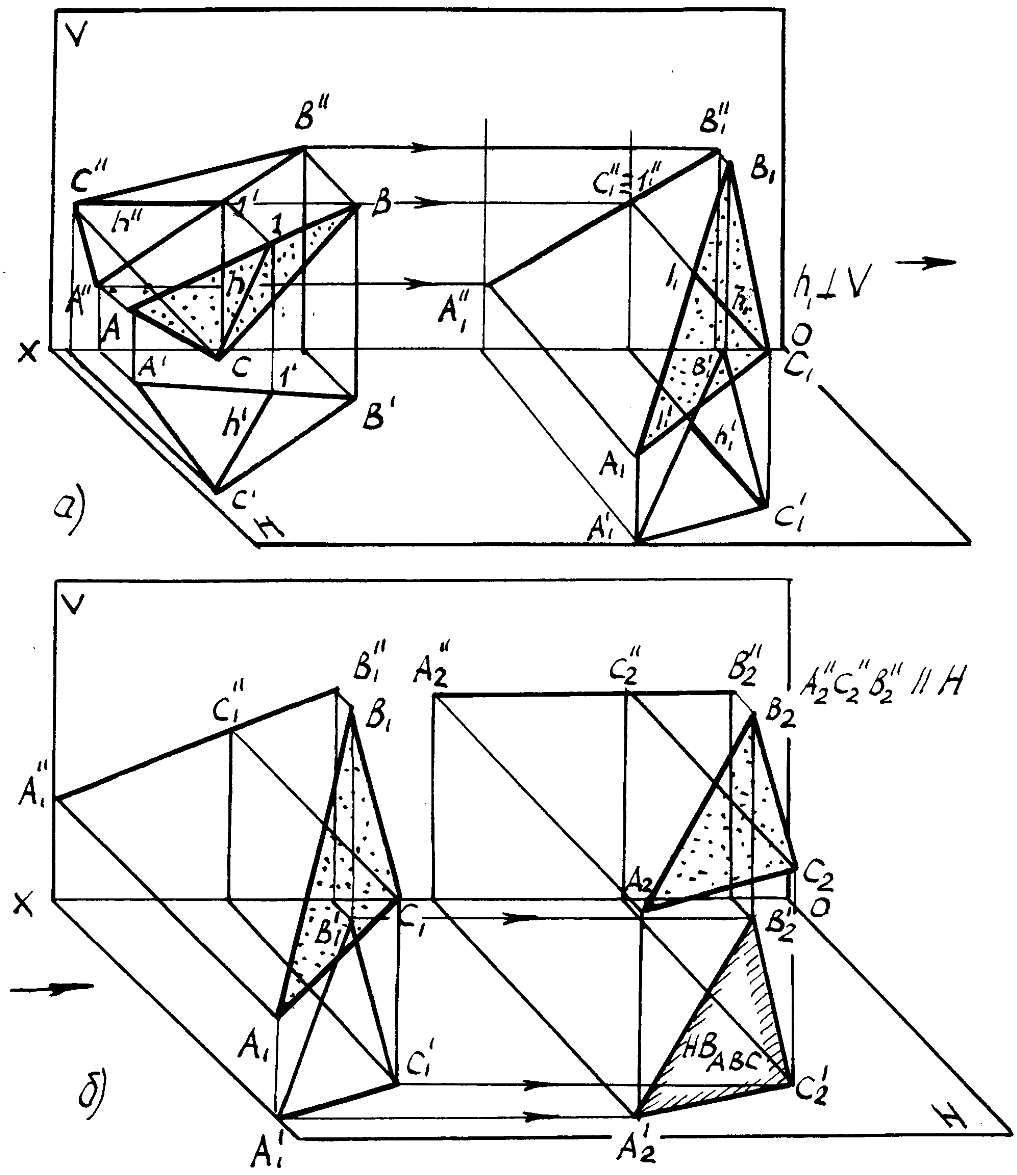


Рисунок 6.16 Принцип плоско-параллельного перемещения плоскости

Для решения задачи на определение натуральной величины плоскости совершают два плоско-параллельных перемещения: сначала относительно одной плоскости проекций, а затем относительно другой.

Целью первого перемещения является перевод плоскости из общего положения в проецирующее. Плоскость станет проецирующей, если будет содержать прямую, перпендикулярную плоскости проекций. В качестве такой прямой используют горизонталь или фронталь. При первом перемещении проекция натуральной величины горизонтали или фронтали плоскости должна принять положение, перпендикулярное оси OX. Целью второго перемещения является перевод плоскости из проецирующего положения в положение, параллельное плоскости проекции. После этого плоскость проецируется в натуральную величину.

ПРИМЕР 6.9. Методом плоско-параллельного перемещения определить центр окружности, описанной вокруг треугольника **ABC**.

РЕШЕНИЕ. Для того, чтобы найти центр описанной окружности треугольника, необходимо определить его натуральную величину. На основании вышерассмотренного материала совершим два плоско-параллельного перемещения: ППП(H) и ППП(V) (рисунок 6.17).

Для преобразования плоскости треугольника во фронтально-проецирующую плоскость проведем в треугольнике горизонталь **h** и расположим её при первом ППП перпендикулярно оси 0X. На ней построим треугольник $A_1'B_1'C_1'$, равный исходному треугольнику $\mathbf{A'B'C'}$ (известным методом с помощью циркуля). Полученную на фронтальной проекции линию плоско-параллельно перемещаем относительно **V** до положения, параллельного оси 0X. На новой горизонтальной проекции треугольника получаем его натуральную величину. С помощью срединных перпендикуляров получаем центр описанной окружности $\mathbf{O_2'}$ и возвращаем его на исходные проекции с помощью вспомогательной прямой **B-2**, проведенной в плоскости треугольника.

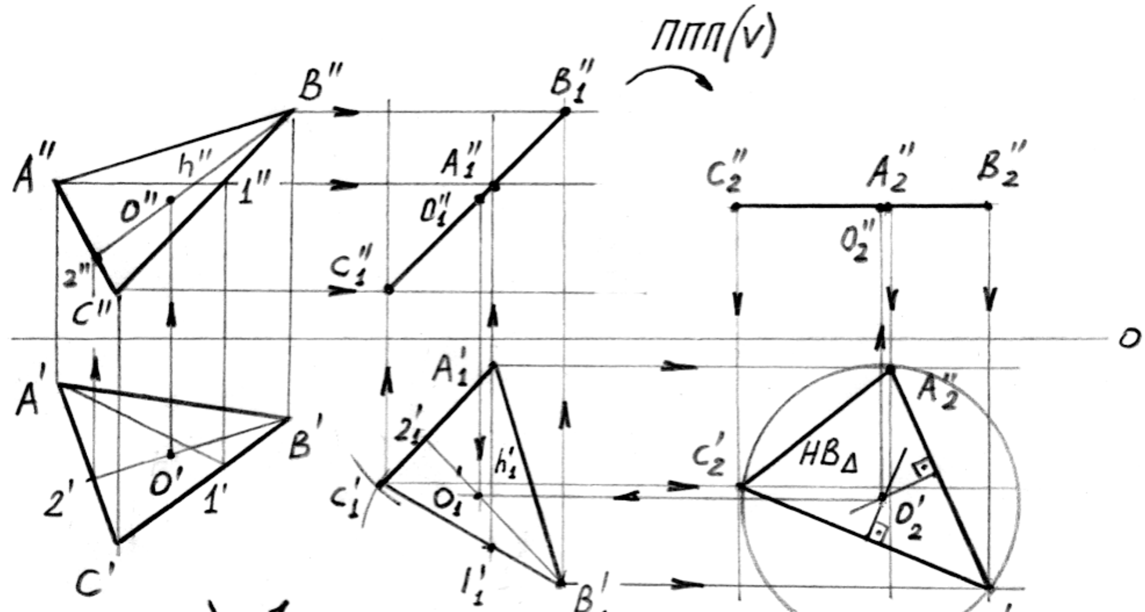


Рисунок 6.17

7 МНОГОГРАННИКИ

Многогранники относятся к поверхностям, точнее - к гранным поверхностям, грани которых являются плоскостями. В связи с этим целесообразно выделить их в отдельную главу.

Многогранниками называются тела, ограниченные плоскими n-угольниками, которые называются гранями. Линии пересечения граней называются ребрами, точки пересечения ребер – вершинами. Для всех многогранников справедлива формула Эйлера: сумма граней и вершин за минусом числа ребер есть величина постоянная: **Г + В – Р = 2**.

На рисунке 7.1 приведена классификация многогранников. Большую группу многогранников составляют правильные и полуправильные многогранники. Они характеризуются одинаково правильными гранями, одинаковым числом ребер, сходящихся в вершинах, и одинаковыми многогранными углами при вершинах. Полуправильные многогранники – это правильные многогранники со срезанными вершинами.

Выпуклыми многогранниками называются многогранники, располагаемые по одну сторону каждой грани. Если это не соблюдается, то многогранники называются вогнутыми или выпукло-вогнутыми.

Приведем примеры некоторых правильных многогранников. Тетраэдр – это четырехгранник, все грани которого равносторонние треугольники. Гексаэдр (куб) – шестигранник, все грани которого квадраты. Октаэдр – восьмигранник, все грани которого равносторонние треугольники. Додекаэдр – двенадцатигранник, все грани которого правильные пятиугольники. Икосаэдр – двадцатигранник, все грани которого равносторонние треугольники.

Наиболее распространенными в технике многогранниками являются правильные и неправильные, прямые и наклонные призмы и пирамиды. Призмой называется многогранник, в основаниях которого находятся плоские n-угольники, а остальные грани являются в общем случае параллелограммами. Пирамидой называется многогранник, в основании которого находится плоский n – угольник, а боковыми гранями являются треугольники с общей вершиной.

На эпюре многогранники задаются проекциями ребер, так называемой сеткой ребер. Поверхность многогранников считается геометрически непрозрачной, в связи с чем на эпюре следует определить видимость ребер методом конкурирующих точек (прямых). На рисунке 7.2 показан пример задания многогранников на эпюре и определения видимости ребер.

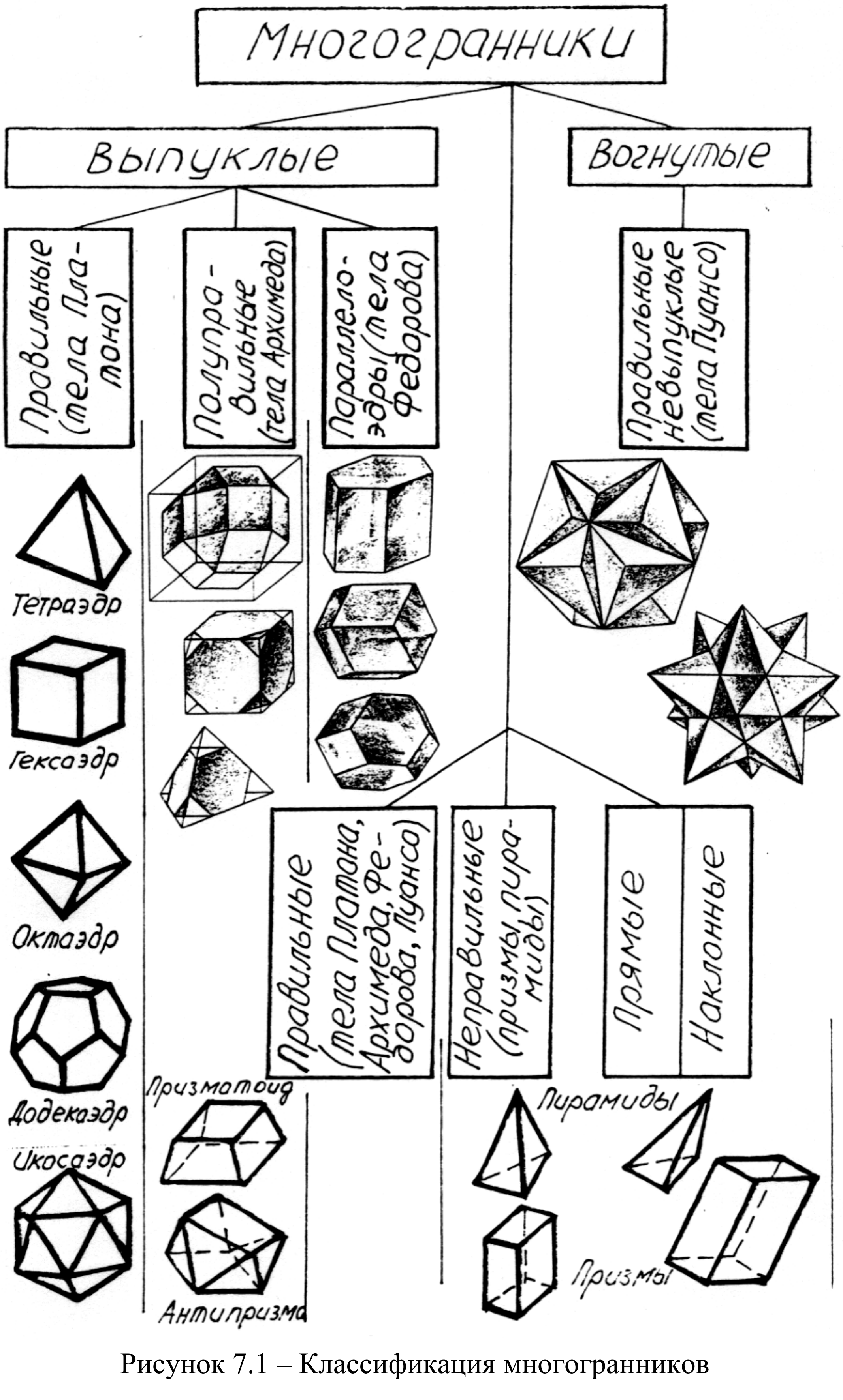


Рисунок 7.1 – Классификация многогранников

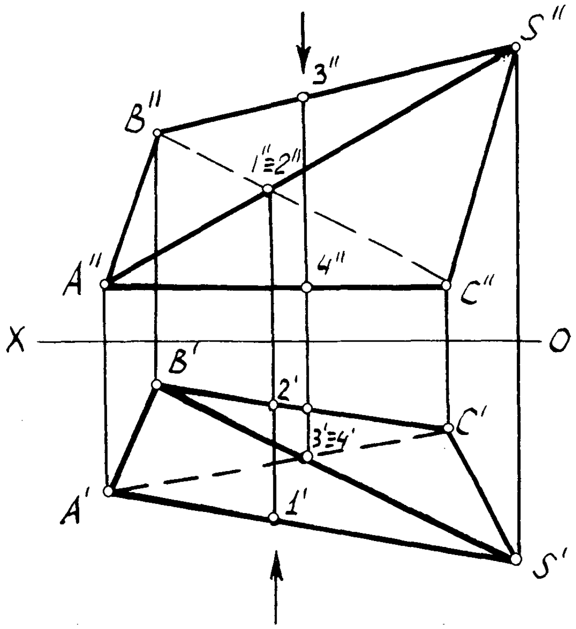


Рисунок 7.2 Задание многогранника на эпюре

7.1 Пересечение многогранников плоскостями

Типовой задачей для многогранников является задача о пересечении многогранников плоскостями частного и общего положения (рисунок 7.3).

В обоих случаях задача может быть решена двумя методами, основанными на типичных позиционных задачах: методом ребер и методом граней.

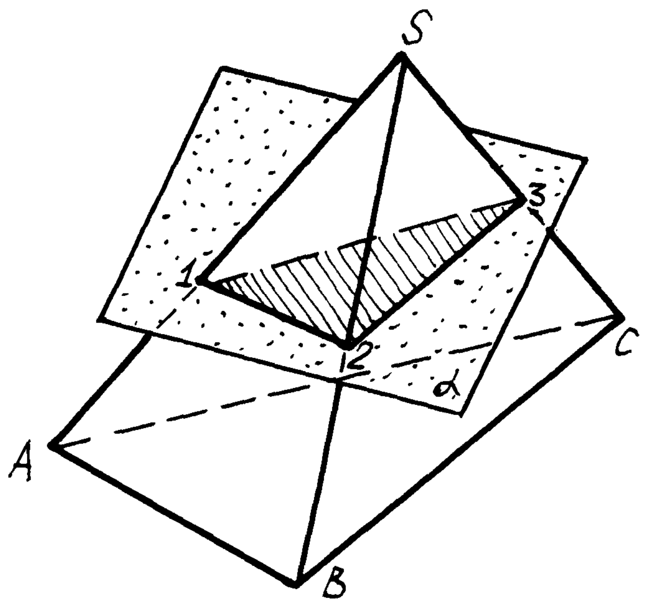


Рисунок 7.3 – Сечение многогранников плоскостью

В методе ребер несколько раз (по числу пересекаемых ребер) решается задача о пересечении прямой (ребра) с плоскостью (секущей плоскостью). В этом случае находятся точки **1,2,3**. Найденные точки являются вершинами многоугольника сечения. В методе граней несколько раз решается типичная задача о пересечении двух плоскостей (граней многогранника и секущей плоскости) и находят линии **1-2, 2-3, 3-1**, которые являются сторонами многоугольника сечения. Если секущая плоскость является плоскостью частного положения, то задача решается упрощенно.

ПРИМЕР 7.1. Построить сечение пирамиды фронтально-проецирующей плоскостью (рисунок 7.4).

РЕШЕНИЕ. Решаем задачу методом ребер. Так как секущая плоскость является фронтально-проецирующей, то на фронтальной проекции можно сразу определить точки встречи ребер пирамиды с секущей плоскостью – точки $\mathbf{1}^{//}$, $\mathbf{2}^{//}$, $\mathbf{3}^{//}$. Далее определяем горизонтальные проекции точек. Полученные точки соединяем прямыми линиями и получаем проекции сечения.

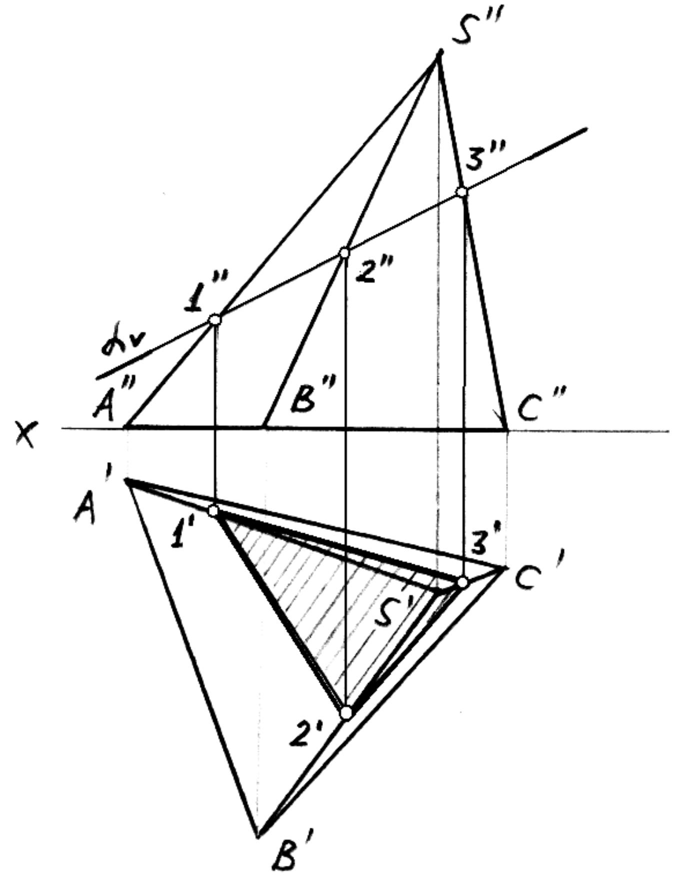


Рисунок 7.4

ПРИМЕР 7.2. Построить сечение пирамиды плоскостью общего положения, определить его натуральную величину и построить развертку пирамиды с нанесением на неё линий сечения.

РЕШЕНИЕ. На рисунке 7.5 представлено решение задачи. Секущая плоскость рассекает пирамиду, начиная с основания пирамиды **ABC**. Горизонтальный след плоскости и горизонтальная проекция основания пересекаются в точках **1**$^{/}$ и **2**$^{/}$.

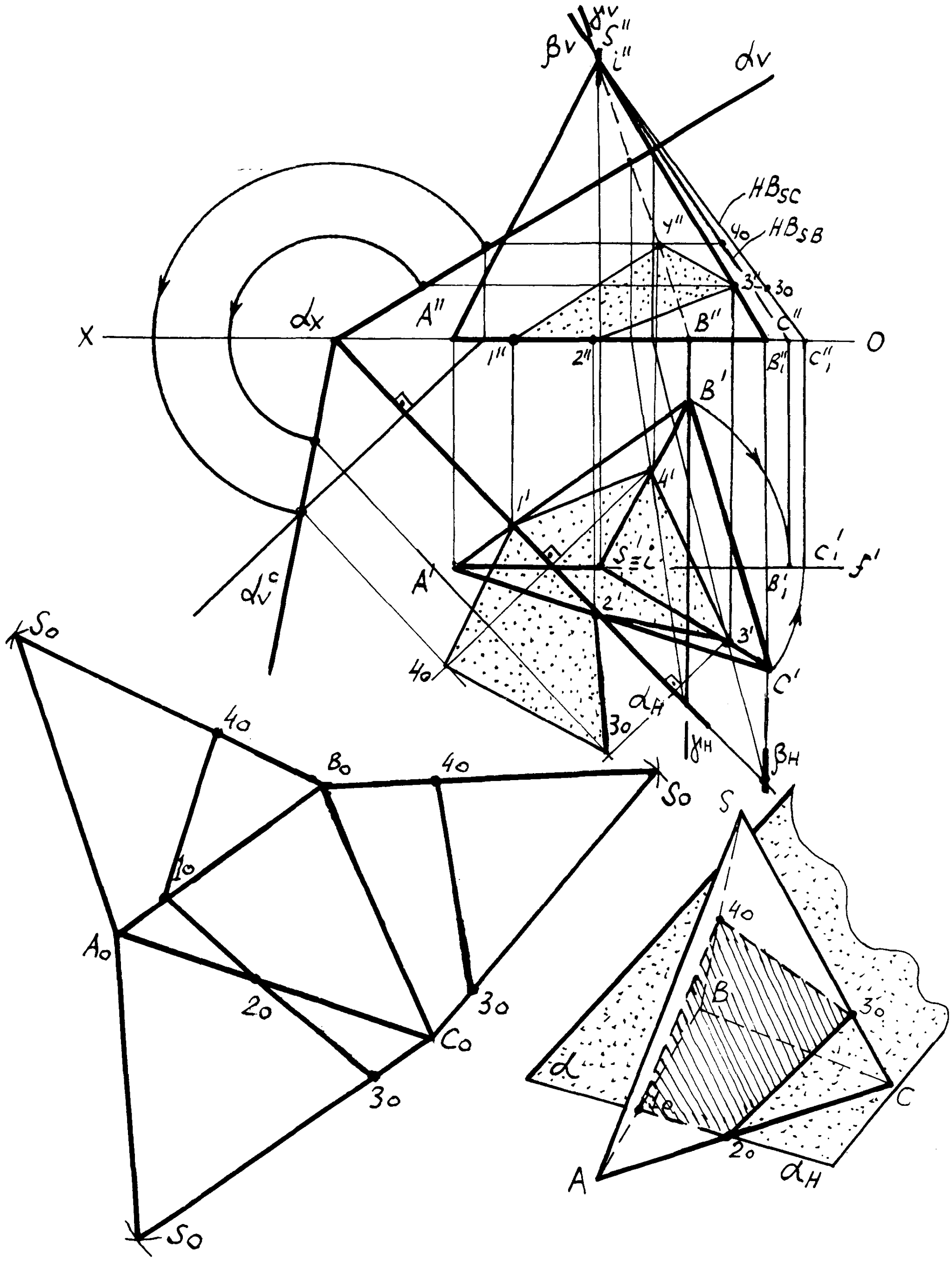


Рисунок 7.5

Ребро пирамиды **SA** с секущей плоскостью не пересекается. Точки пересечения ребер **SB** и **SC** найдем как точки встречи прямых с плоскостью при помощи вспомогательных фронтально-проецирующих плоскостей β и γ (точки 4 и 3). Полученные точки соединяем прямыми линиями и получаем проекции сечения **1-2-3-4**.

Натуральную величину сечения найдем методом совмещения (см. тему "Метод совмещения"). Для построения развертки пирамиды определим натуральную величину ребер **SB** и **SC** методом вращения вокруг горизонтально-проецирующей оси, проходящей через вершину пирамиды **S** (см. раздел "Метод вращения вокруг проецирующих осей"). Точки $\mathbf{3}^{//}$ **и** $\mathbf{4}^{//}$ "перенесем" на натуральную величину ребер **SB** и **SC**.

Развертку пирамиды построим методом раскатки (см. раздел "Развертки многогранников").

7.2 Пересечение прямой с многогранником

Решение задачи о пересечении прямой с поверхностью многогранника осуществляется по методике, аналогичной методике решения задачи о пересечении прямой с плоскостью (см. рисунок 7.3). Через прямую проводят вспомогательную плоскость частного положения, строят сечение многогранника вспомогательной плоскостью и находят общие точки прямой и построенного сечения. Полученные точки являются точками встречи прямой с поверхностью многогранника (точки входа и выхода). Таким образом, задача сводится к решению задачи о построении сечения многогранника плоскостью частного положения, которая рассмотрена выше (см. рисунок 7.4).

7.3 Взаимное пересечение многогранников

Задача о пересечении многогранников также решается методом ребер или методом граней в соответствие с рисунком 7.3. При пересечении многогранников возможны два случая: полное и неполное пересечение (рисунок 7.6).

Линия пересечения многогранников (или линии пересечения при полном пересечении) находится по следующему плану:

1) Определяют ребра, не участвующие в пересечении;

2) Определяют точки пересечения ребер первого многогранника с гранями второго многогранника;

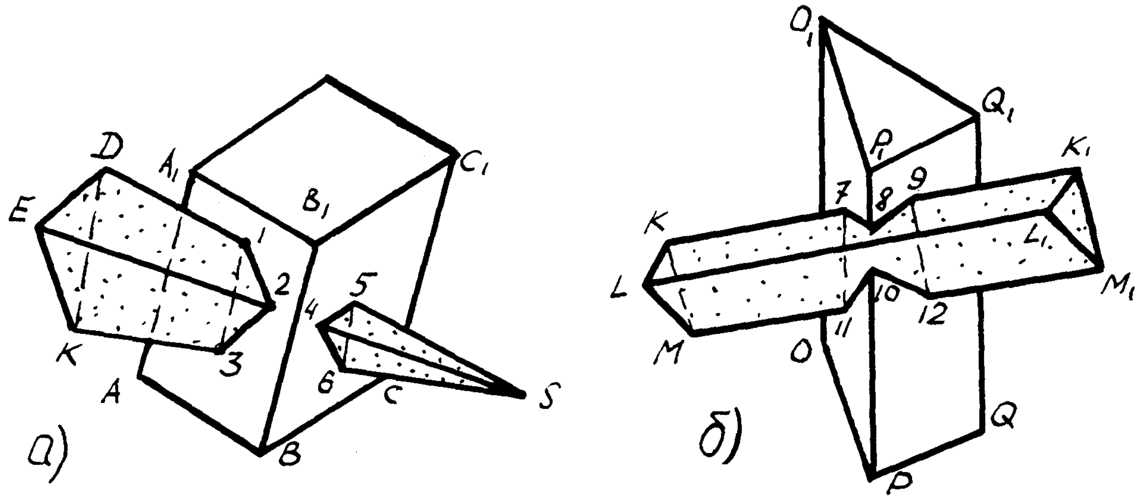


Рисунок 7.6 – Полное и неполное пересечение многогранников

3) Определяют точки пересечения ребер второго многогранника с гранями первого многогранника;

4) Полученные точки соединяют прямыми линиями в пределах каждой грани.

ПРИМЕР 7.3. Построить линию пересечения пирамиды и призмы (рисунок 7.7).

РЕШЕНИЕ. Призма **KLMN** расположена в частном положении и её грани представляют из себя горизонтально-проецирующие плоскости. В связи с этим на горизонтальной проекции можно найти точки пересечения ребер пирамиды **SB** и **SC** с гранями призмы (точки **1**$^{/}$**, 2**$^{/}$**, 7**$^{/}$ **и 8**$^{/}$). Ребра призмы являются горизонтально-проецирующими прямыми. Ребра **K** и **N** пересекают грани пирамиды **ABS** и **ACS**. Точки пересечения ребер **K** и **N** с указанными гранями найдем как точки, принадлежащие граням **ABS** и **ACS**, с помощью вспомогательных прямых, соединяющих вершину пирамиды **S**$^{/}$ с точками **N**$^{/}$ и **K**$^{/}$ на горизонтальной проекции. В результате найдем точки **3**,**4** и **5**,**6**.

Далее соединим полученные точки в последовательности **1-2-3-5-7-8-6-4-1**, которая определяется по горизонтальной проекции. Видимость проекций определим методом конкурирующих прямых.

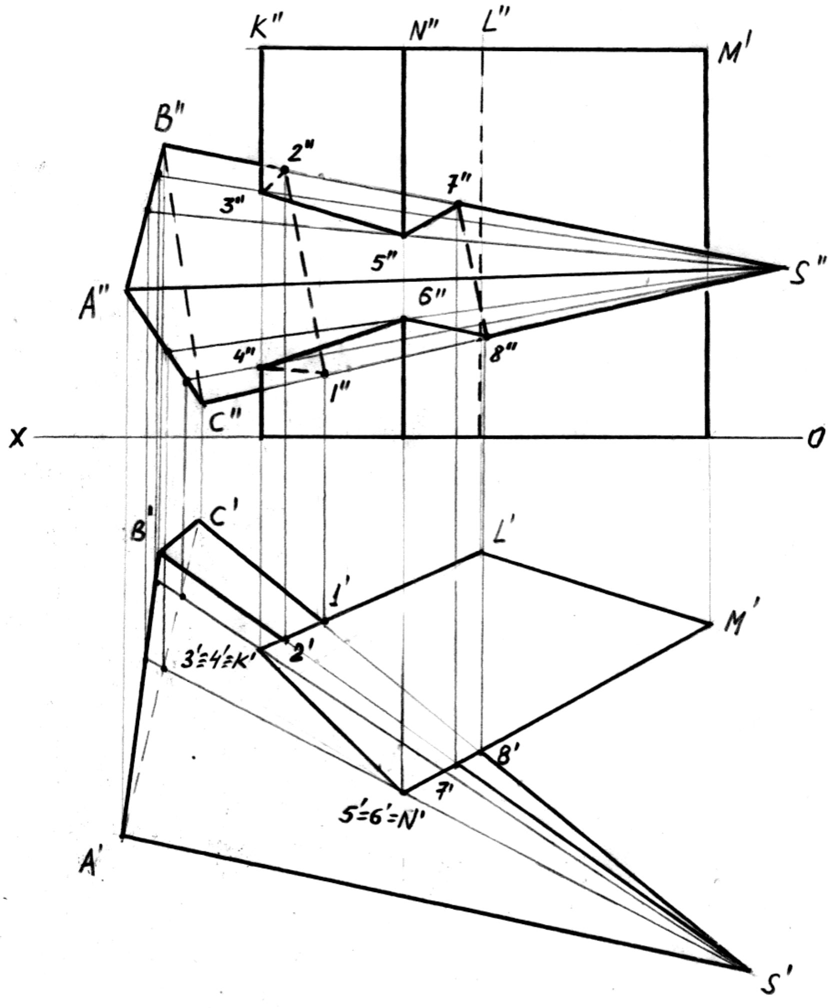


Рисунок 7.7

7.4 Развертки многогранников

Любая техническая конструкция, имеющая форму многогранника (бункеры, короба, основания, полые перекрытия и т.д.), может быть изготовлена из листового материала, в связи с чем необходимо иметь развертку поверхности многогранника для раскроя и вырезки материала.

Разверткой поверхности называется геометрически закономерное преобразование поверхности в плоскость. Наиболее распространенными способами построения разверток поверхностей являются метод нормального сечения и метод раскатки. Прежде чем воспользоваться этими методами, необходимо определить натуральную величину ребер и оснований многогранника.

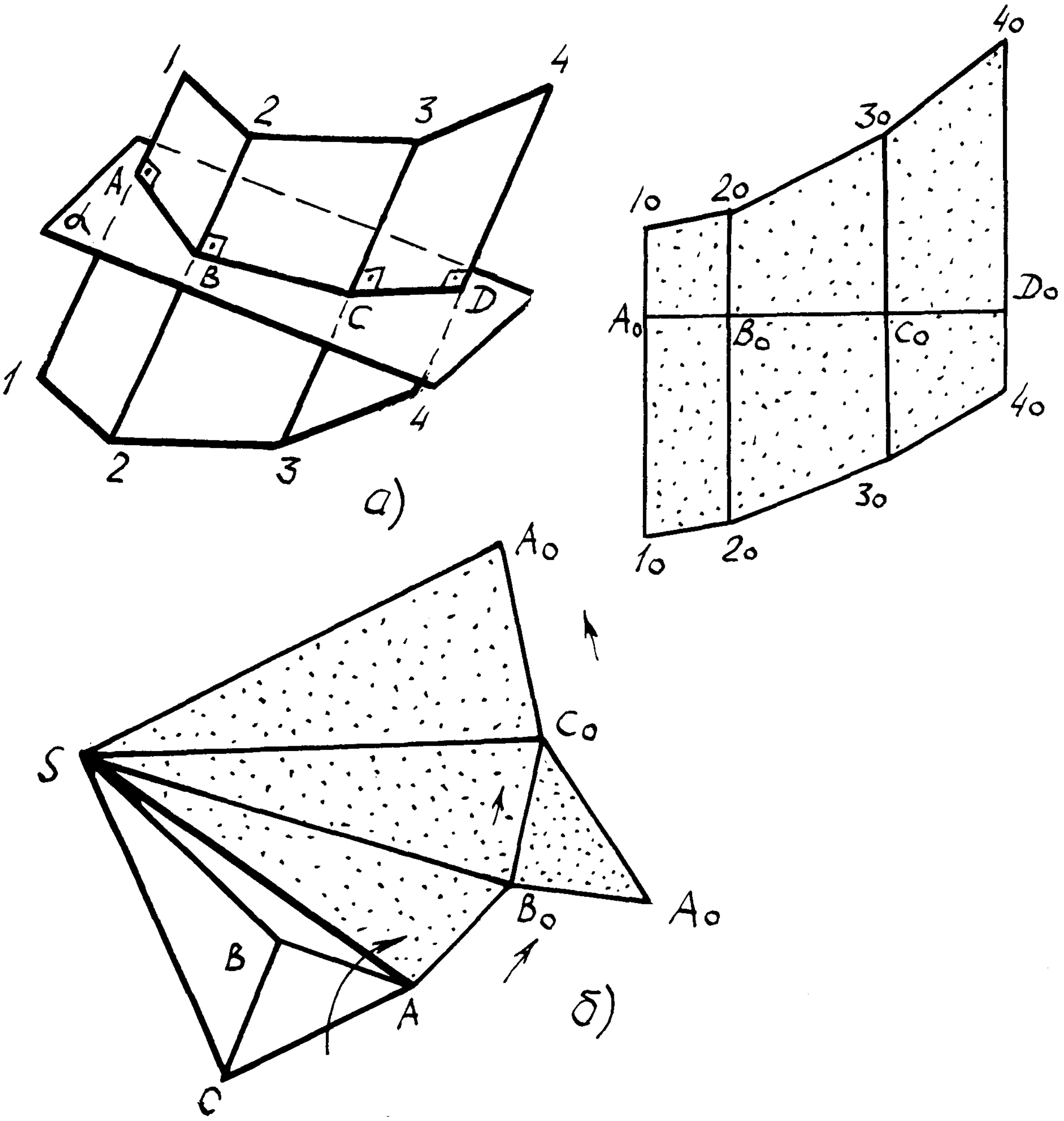


Рисунок 7.8 – Построение развёрток многогранников

Метод нормального сечения (рисунок 7.8а) заключается в том, что поверхность многогранника (например, призмы) рассекают плоскостью, перпендикулярной ребрам, определяют натуральную величину сечения, совмещают стороны сечения в одну линию и к ней перпендикулярно пристраивают ребра по обе стороны линии.

Метод раскатки заключается в том, что к одной произвольной грани пристраивают поочередно соседние грани и основания, предварительно определив НВ ребер и оснований (рисунок 7.8б). В примере 7.2 приведено построение развертки пирамиды методом раскатки (см. рисунок 7.5).

8 КРИВЫЕ ЛИНИИ

Кривой линией называется траектория точки, перемещающейся в пространстве по какому-либо закону. Однако, имеются кривые линии, не описываемые какой-либо закономерностью (незакономерные кривые линии). Кривая линия может быть также определена как однопараметрическое множество точек.

На рисунке 8.1 представлена классификация кривых линий.

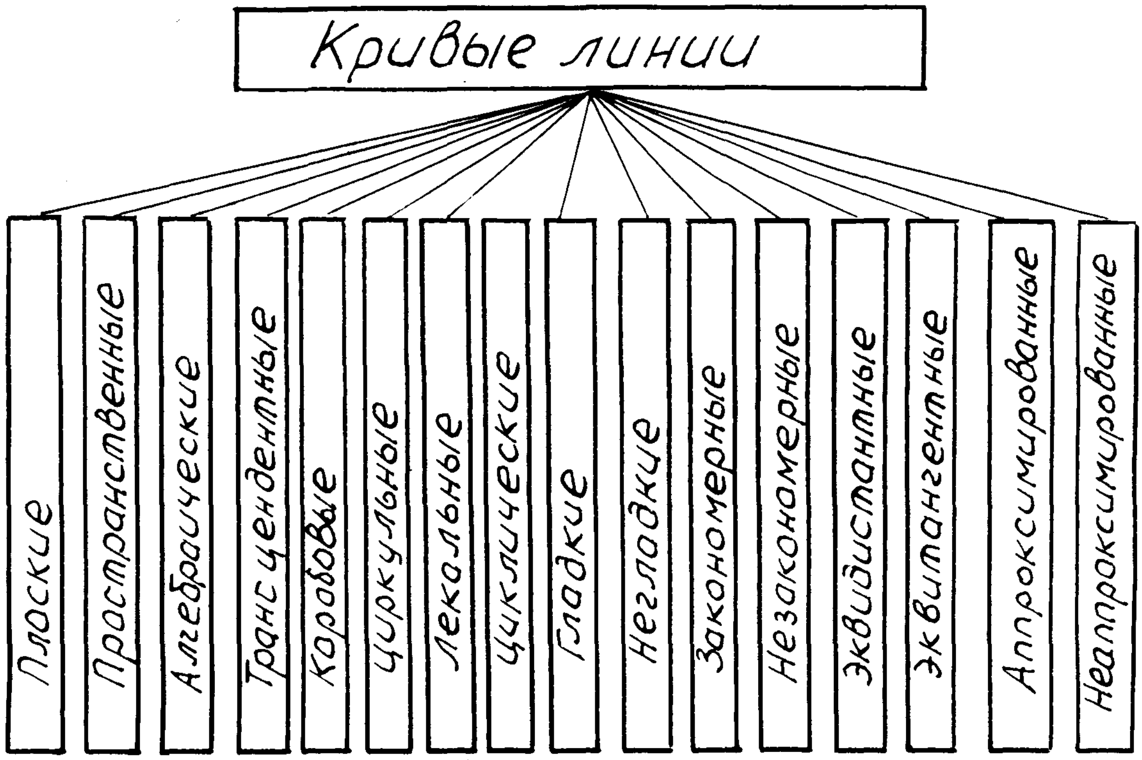


Рисунок 8.1 – Классификация кривых линий

Плоской кривой линией называется линия, каждая точка которой принадлежит одной плоскости. В противном случае кривая линия называется пространственной (винтовая линия, линии пересечения двух поверхностей, из которых хотя бы одна является кривой поверхностью).

Закономерные линии описываются уравнениями и делятся на алгебраические второго и высшего порядков и трансцендентные, описываемые тригонометрическими функциями. Порядок кривой линии – это степень её уравнения или количество точек пересечения кривой линии с прямой линией (для плоских кривых) или количество точек пересечения с плоскостью (для пространственных линий). Кривые второго порядка иногда называются кониками.

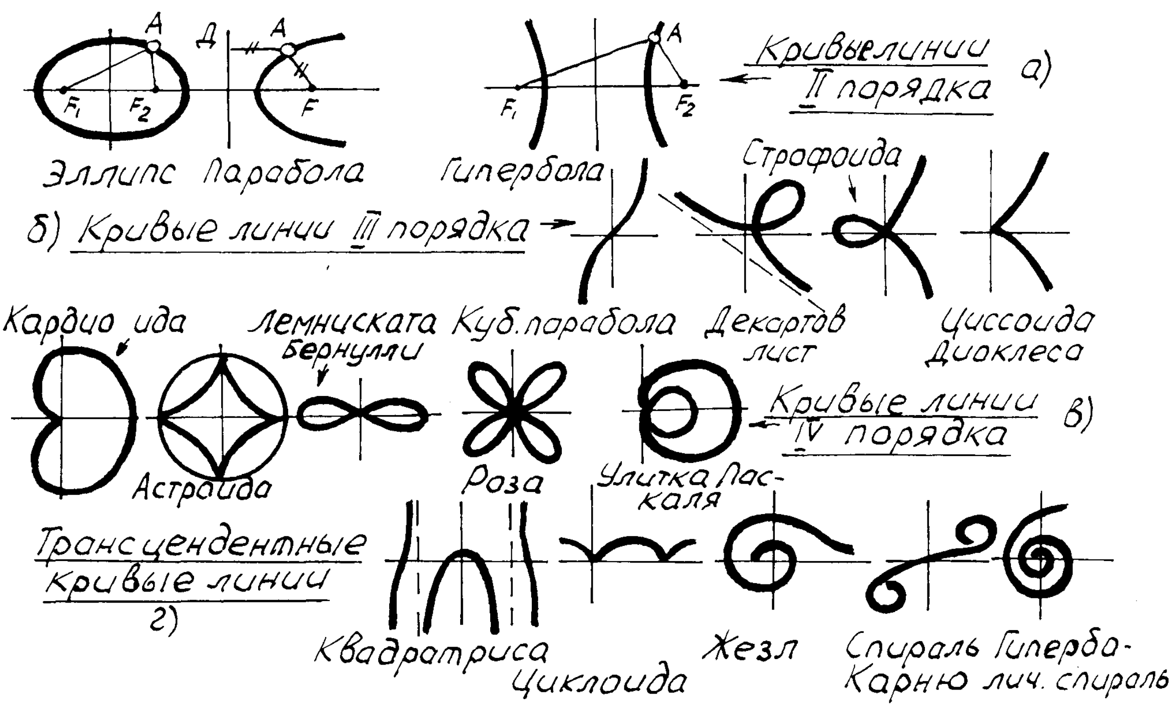


Рисунок 8.2 – Примеры лекальных кривых

Коробовыми линиями (или обводами) называются составные кривые линии, дуги которых последовательно определены парами точек обвода. Если на стыках можно построить общую касательную, то обвод называется гладким. Циркульными линиями называются линии, построение которых можно осуществить циркулем (овал, овоид, завиток и др.).

Лекальными кривыми называются плоские закономерные линии, при вычерчивании которых используются лекала (эллипс, парабола, гипербола и др.). Циклические кривые линии – это линии, повторяющиеся в процессе образования (циклоида, эпициклоида, гипоциклоида и др.).

Гладкие кривые линии состоят из обыкновенных точек. Обыкновенные точки кривой линии – это точки, в которых можно построить только одну касательную к кривой линии. Если кривая линия содержит особые точки (см. далее), то линия называется негладкой.

Эквидистантные и эквитангентные линии – это линии, равноудаленные от некоей кривой линии и повторяющие её форму. Аппроксимированные линии – это линии, приближенно замененные другими более удобными для вычерчивания линиями (например, эллипс иногда заменяют овалом).

Кривые линии могут быть образованы движением точки в пространстве, пересечением кривой поверхности плоскостью (кривые Персея), взаимным пересечением двух поверхностей. Кривые Персея, например, образуются при пересечения торовых поверхностей плоскостью.

На рисунке 8.2 представлены некоторые алгебраические кривые линии второго, третьего и четвертого порядков, а также трансцендентные кривые линии.

Наиболее часто в технике применяются лекальные кривые линии, которые могут быть плоскими и пространственными. К ним относятся эллипс, парабола, гипербола, эвольвента, циклоида, винтовая линия и другие, примеры которых приведены на рисунке 8.3. Способы построения лекальных кривых обычно рассматривается в курсе технического черчения.

Эвольвента – траектория точки касательной, перекатываемой без скольжения по окружности. Иногда её неправильно называют разверткой окружности.

Синусоида – кривая линия, описываемая уравнением **$y = \sin x$.**

Гипербола – геометрическое место точек, разность расстояний которых от двух точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Винтовая линия – траектория точки, перемещающейся по образующей цилиндра, конуса или тора, в то время как сама образующая равномерно вращается вокруг оси упомянутых поверхностей.

Эллипс – геометрическое место точек, сумма расстояний которых до двух точек, называемых фокусами, есть величина постоянная.

Парабола – геометрическое место точек, равноудаленных от некоторой точки, называемой фокусом, и некоторой прямой, называемой директрисой.

Циклоида – траектория точки окружности, перекатываемой без скольжения по прямой линии. При построении эпи- и гипоциклоиды окружность перекатывают по окружности.

На рисунке 8.4 представлены особые точки кривых линий. Особыми точками называются точки, в которых можно провести не одну, а две и более касательных или в которых изменяется направление движения точки или вращения касательной.

На эпюре кривые линии задаются множеством точек, принадлежащих линии (рисунок 8.5). Возможны табличный и аналитический способы задания.

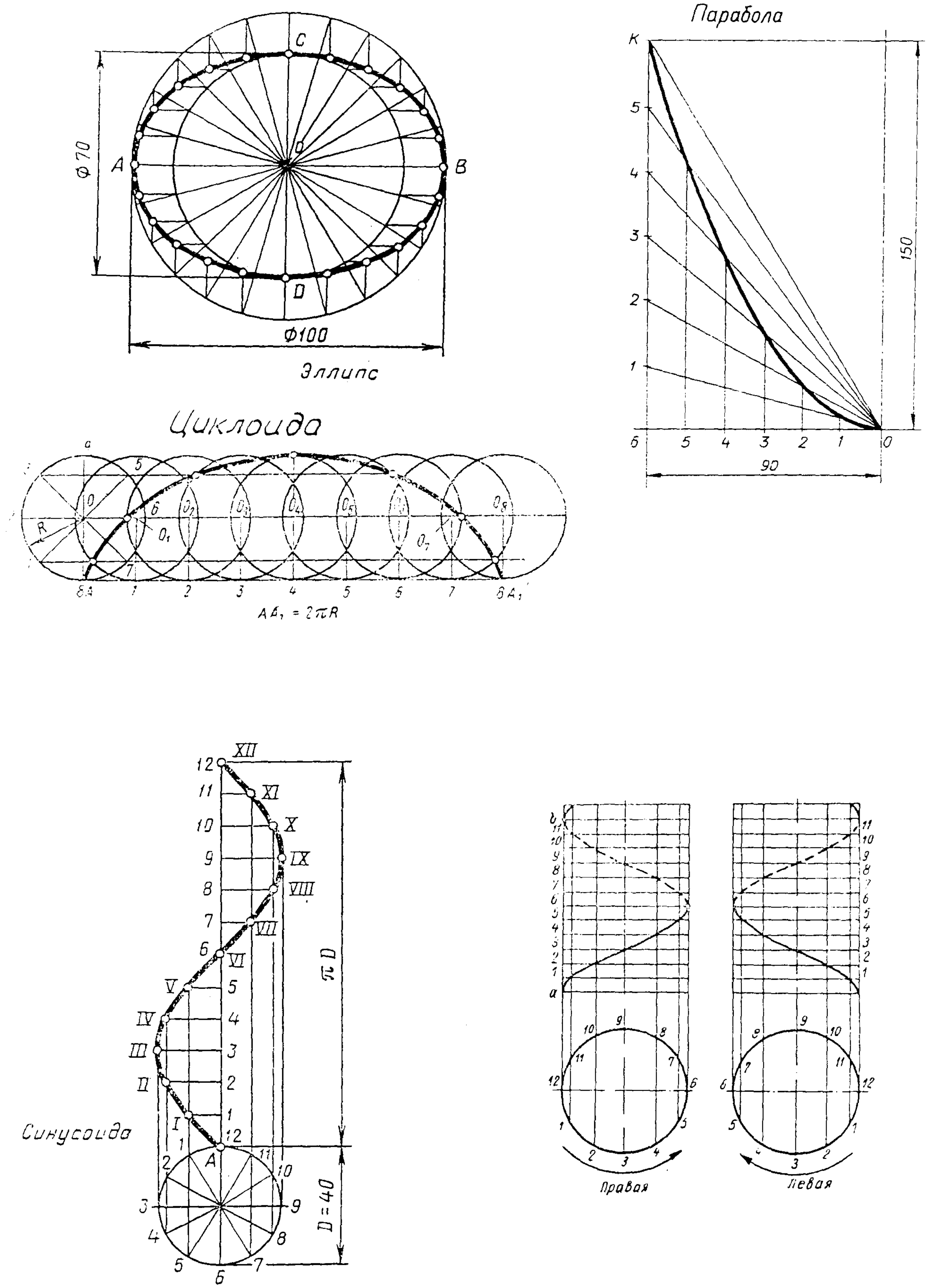


Рисунок 8.3 – Примеры лекальных кривых

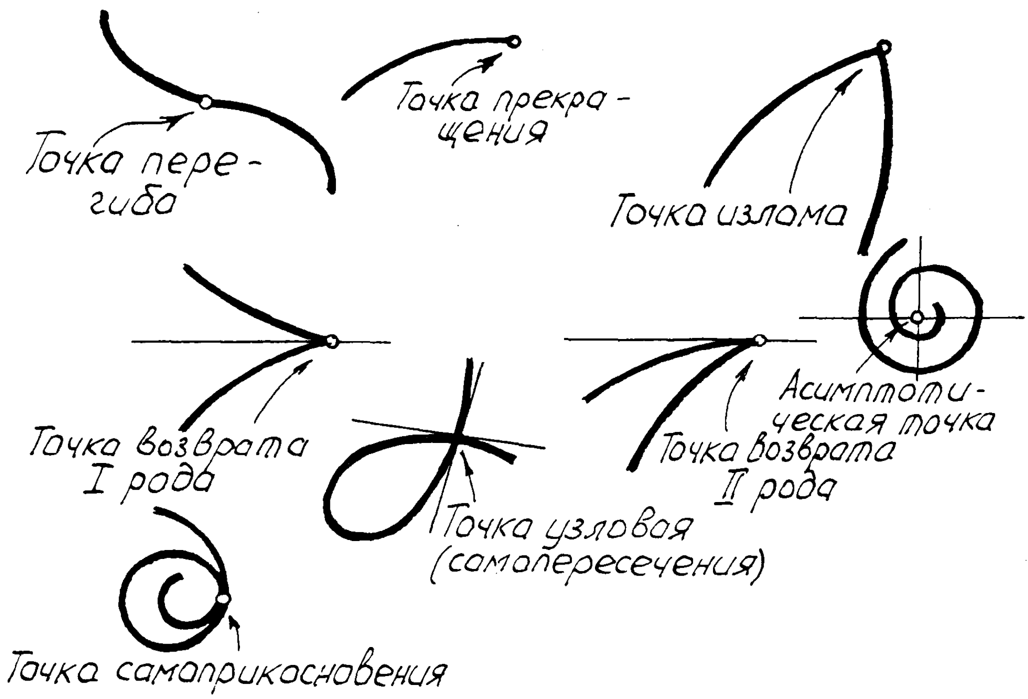


Рисунок 8.4 – Особые точки кривых линий

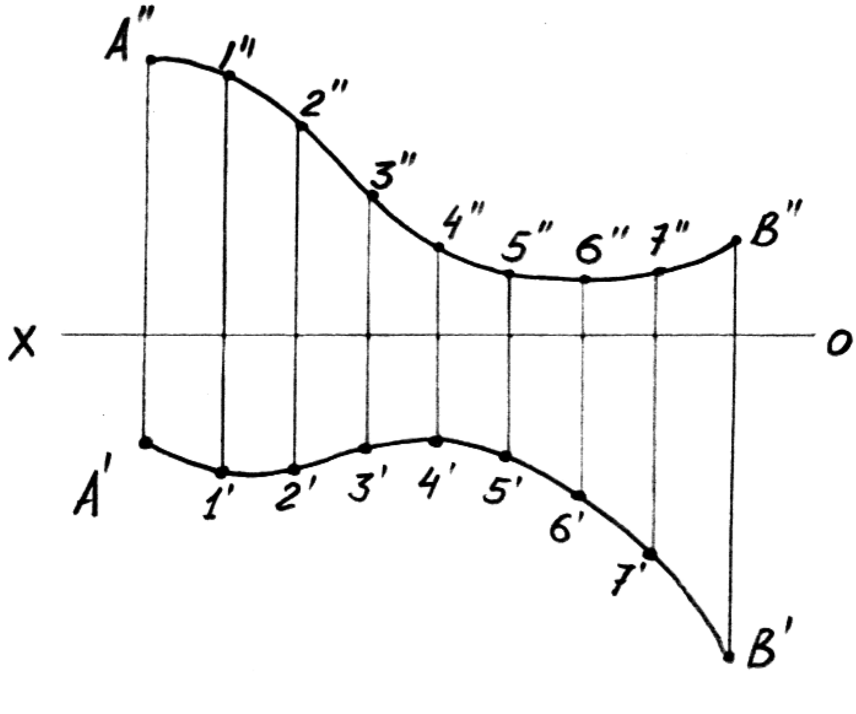


Рисунок 8.5 – Построение проекций кривой линии

Проекции кривой линии имеют следующие свойства:

1) В общем случае проекция кривой линии есть кривая линия;

2) Если точка принадлежит кривой линии, то её проекции принадлежат одноименным проекциям кривой;

3) Касательная к кривой линии проецируется в касательную к проекциям кривой линии.

ПРИМЕР 8.1. Построить проекции правой цилиндрической винтовой линии, проходящей через точку поверхности цилиндра.

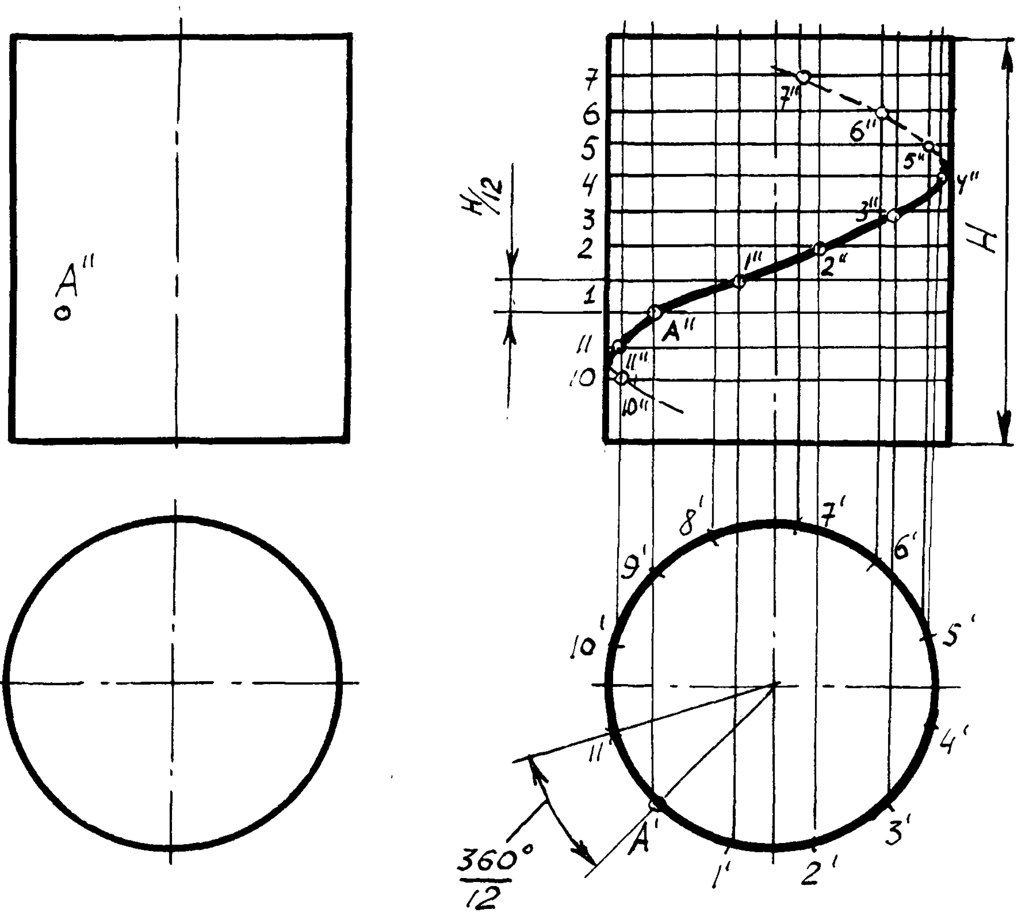


Рисунок 8.6

РЕШЕНИЕ. Находим точку $\mathbf{A}^{/}$. Начиная с точки $\mathbf{A}^{/}$, делим окружность основания цилиндра на 12 частей. Высоту цилиндра **H** делим на 12 частей, начиная с точки $\mathbf{A}^{//}$. На пересечении вертикальных и горизонтальных одноименных линий находим точки винтовой линии, которые плавно соединяем (рисунок 8.6).

9 КРИВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Кривые поверхности широко применяются в различных областях техники, архитектуры, строительства и т.д. Начертательная геометрия изучает кривые поверхности, способы их образования, позиционные, метрические и другие их свойства.

9.1 Общие положения

Под поверхностью подразумевают непрерывное множество точек, если между координатами точек может быть установлена зависимость, определяемая уравнением вида **F (x, y, z) = 0**, где F (x, y, z) – многочлен n-ой степени или в форме какой-либо трансцендентной функции. В первом случае поверхности называются алгебраическими, во втором – трансцендентными.

Порядок поверхности равняется степени её уравнения. Порядок поверхности может быть определен также числом точек пересечения произвольной прямой с поверхностью, при этом считаются и мнимые и действительные точки. Порядок линии пересечения двух поверхностей равняется произведению порядков пересекающихся поверхностей.

Иногда поверхность трактуют как непрерывное двупараметрическое множество точек.

В начертательной геометрии поверхность рассматривается как совокупность последовательных положений перемещающейся в пространстве линии. Линия, которая перемещается, называется образующей. Линия, по которой перемещается образующая, называется направляющей. При своем перемещении образующая может оставаться параллельной какому-либо направлению, какой-либо плоскости или перемещаться по двум, трем направляющим. Общий случай образования поверхности путем поступательного перемещения образующей в соответствии с наложенными на неё условиями показан на рисунке 9.1а.

9.2 Классификация поверхностей

На рисунке 9.2 приведена общая приближенная схема классификации кривых поверхностей по различным признакам. При этом следует сказать, что систематизация поверхностей при их величайшем многообразии является сложной математической и геометрической задачей. Тот факт, что одна и та же поверхность может быть образована различными способами, превносит в любую схему классификации относительную приблизительность.

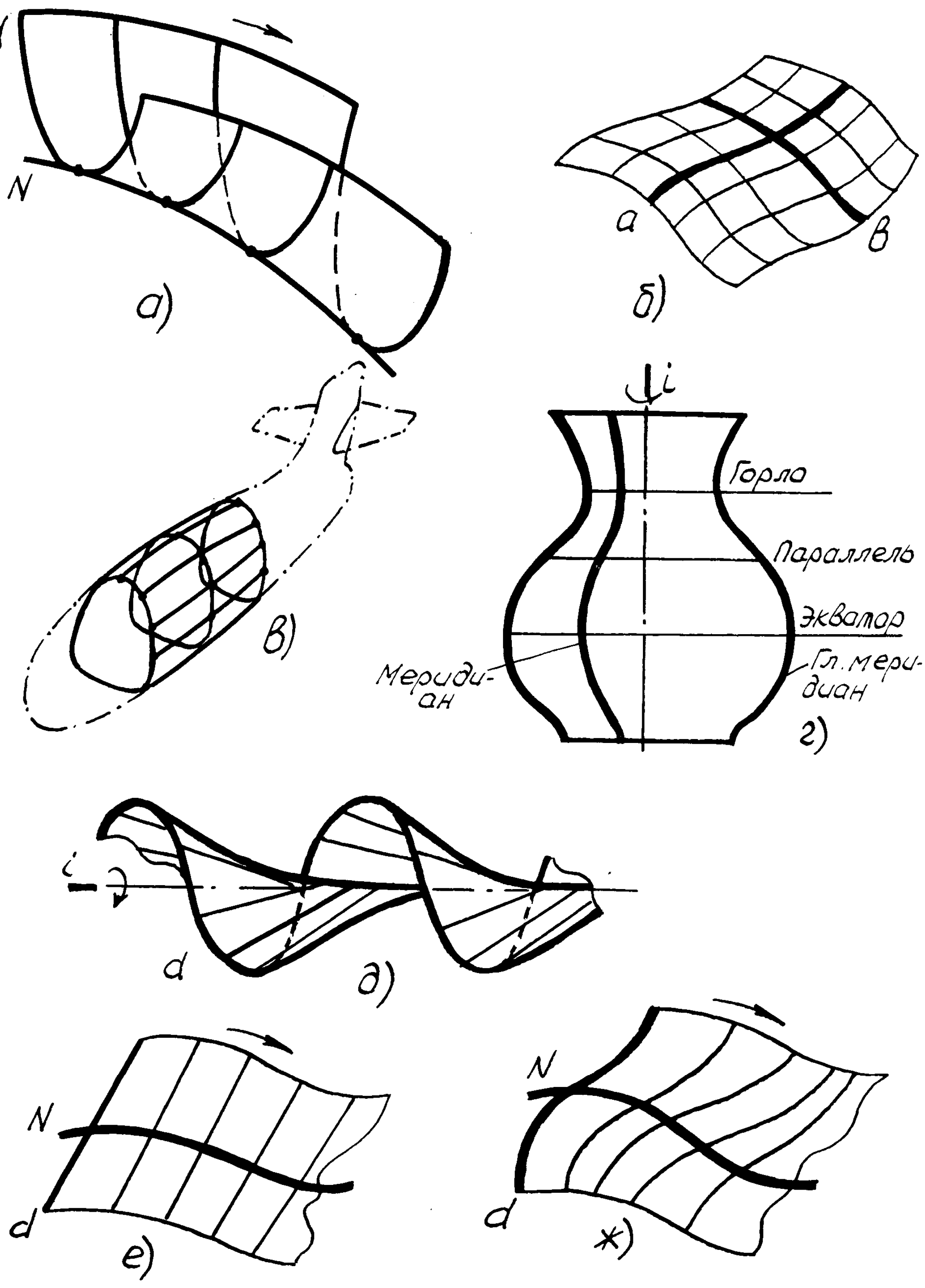


Рисунок 9.1 Образование поверхностей

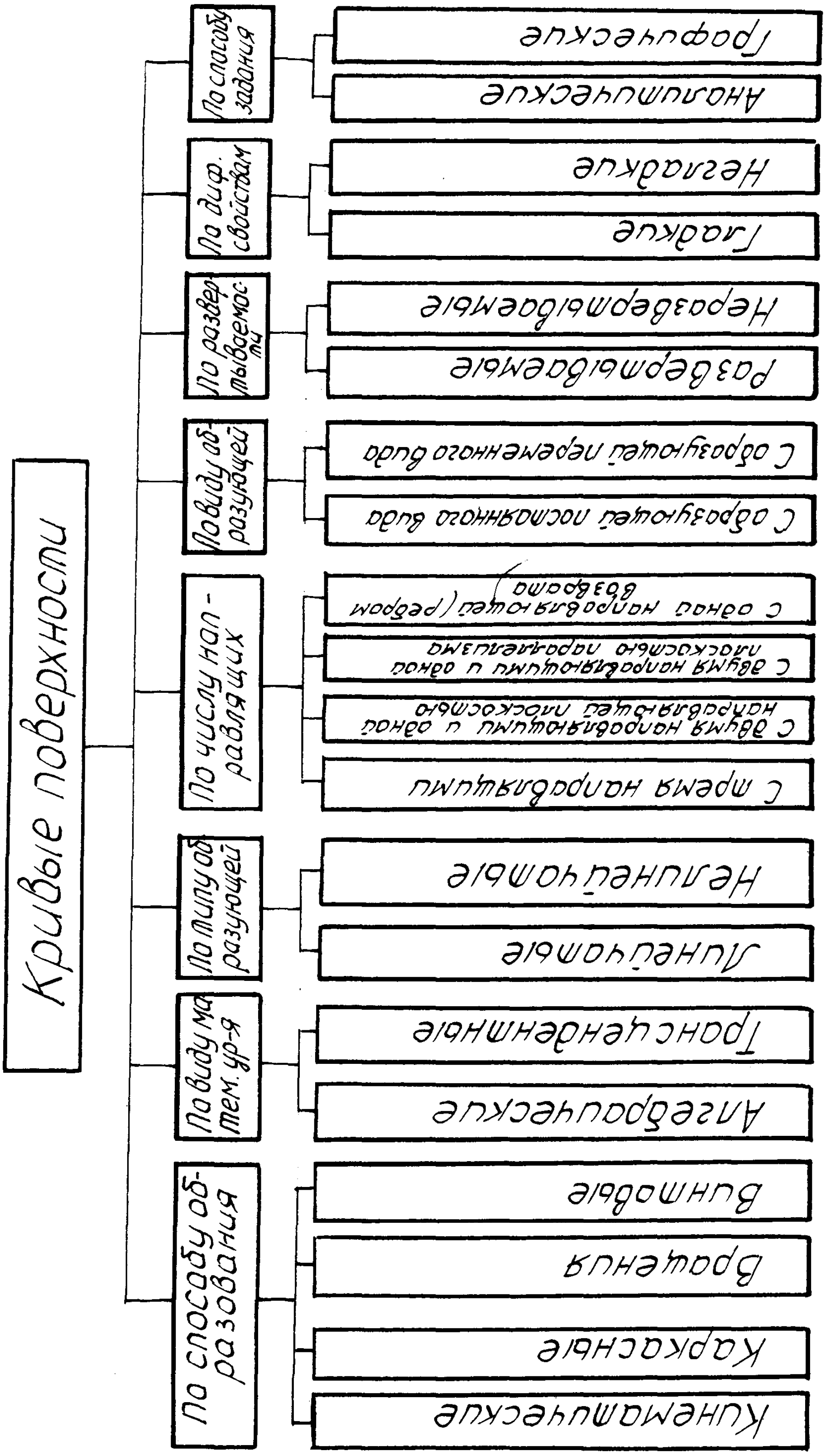


Рисунок 9.2 – Классификация поверхностей

Поверхности в общем случае могут быть образованы путем поступательного перемещения в пространстве образующей (кинематический способ), путем задания её каркасом (каркасный способ), путем особого винтового перемещения образующей (винтовой способ), Поверхности в соответствии с конкретным способом образования могут называться кинематическими, каркасными, поверхностями вращения, винтовыми поверхностями. Однако некоторые виды поверхностей могут быть образованы как теми, так и другими способами.

Каркасный способ образования и задания поверхностей осуществляется множеством точек или линий, принадлежащих поверхности. Множество точек или линий, определяющих поверхность, называется каркасом. Каркасы подразделяются на точечные и линейные. Наиболее распространены линейные каркасы. На рисунке 9.1б показан каркас поверхности, состоящий из двух ортогонально расположенных семейств линий. На рисунке 9.1в показан каркас фюзеляжа самолета. Поверхности вращения – это поверхности, которые образуются какой-либо образующей при вращении её вокруг неподвижной оси в соответствии с рисунком 9.1г. Каждая точка образующей при вращении вокруг оси описывает окружность с центром на оси вращения. Эти окружности называются параллелями. Наибольшую и наименьшую параллели называют соответственно экватором и горлом.

Плоскости, проходящие через ось вращения, называют меридиональными, а линии, по которым они пересекают поверхности, - меридианами. Меридиан в плоскости, параллельной фронтальной плоскости проекций, называется главным меридианом или очерковой образующей.

Винтовые поверхности – это поверхности, которые образуются винтовым перемещением образующей в соответствии с рисунком 9.1д. Винтовые поверхности могут быть образованы как криволинейной, так и прямолинейной образующей. Непременным условием образования винтовой поверхности является условие перемещения образующей по винтовой линии.

В качестве образующих поверхности используются прямые и кривые линии. Если образующей является прямая, то поверхность называется линейчатой, если кривая линия – нелинейчатой (рисунок 9.1е, ж).

Поверхности можно классифицировать по числу направляющих. Линейчатая поверхность в общем случае однозначно определяется тремя направляющими линиями. Следовательно, чтобы задать линейчатую поверхность на эпюре Монжа, достаточно указать проекции трех её направляющих. Третью направляющую при этом необходимо задать так, чтобы она находилась внутри конгруэнции прямых, определяемой двумя уже взятыми направляющими.

Поверхность может быть образована двумя направляющими и одной направляющей плоскостью, при этом образующая составляет с направляющей плоскостью какой-либо угол, сохраняемый при перемещении образующей. Если образующая всегда будет параллельна направляющей плоскости, то в этом случае направляющая плоскость называется плоскостью параллелизма.

Линейчатые поверхности, образованные одной направляющей, называются торсами. Торсом называют линейчатую поверхность, которую можно совместить всеми её точками с плоскостью без складок и разрывов.

Это свойство линейчатых поверхностей характеризует их возможность развертываться в плоскость.

Образующая кривой поверхности может быть постоянной и переменной. Переменная образующая может менять свои размеры и форму в процессе перемещения. По этому признаку поверхности делятся на поверхности с постоянной и поверхности с переменной образующей.

Поверхности, в каждой точке которых можно провести одну касательную плоскость, называются гладкими поверхностями. Если в некоторых точках поверхности можно провести несколько касательных плоскостей или, если в этих точках меняется направление касательной плоскости, то такие поверхности называются негладкими.

Поверхности, которые подчиняются какому-либо уравнению, называются аналитическими или закономерными. Поверхности, которые нельзя описать уравнениями, можно задать только графически. Такие поверхности называются графическими или конструкторскими.

Приведем примеры поверхностей, приведенных в схеме классификации. К поверхностям, полученным тремя направляющими, можно отнести косой цилиндр, дважды косой цилиндроид, однополостный гиперболоид и др. Представителями нелинейчатых поверхностей с переменной образующей являются каналовые и циклические поверхности. Среди нелинейчатых поверхностей с постоянной образующей можно отметить трубчатые поверхности.

К линейчатым поверхностям с двумя направляющими и одной направляющей плоскостью относятся косой цилиндроид, косой коноид. Если образующая параллельна плоскости параллелизма, то образуется прямой цилиндроид, прямой коноид, косая плоскость.

К линейчатым поверхностям с одной направляющей относятся поверхность с ребром возврата, цилиндрическая и коническая поверхности.

9.3 Линейчатые поверхности

Линейчатая поверхность в общем случае однозначно определяется тремя направляющими линиями.

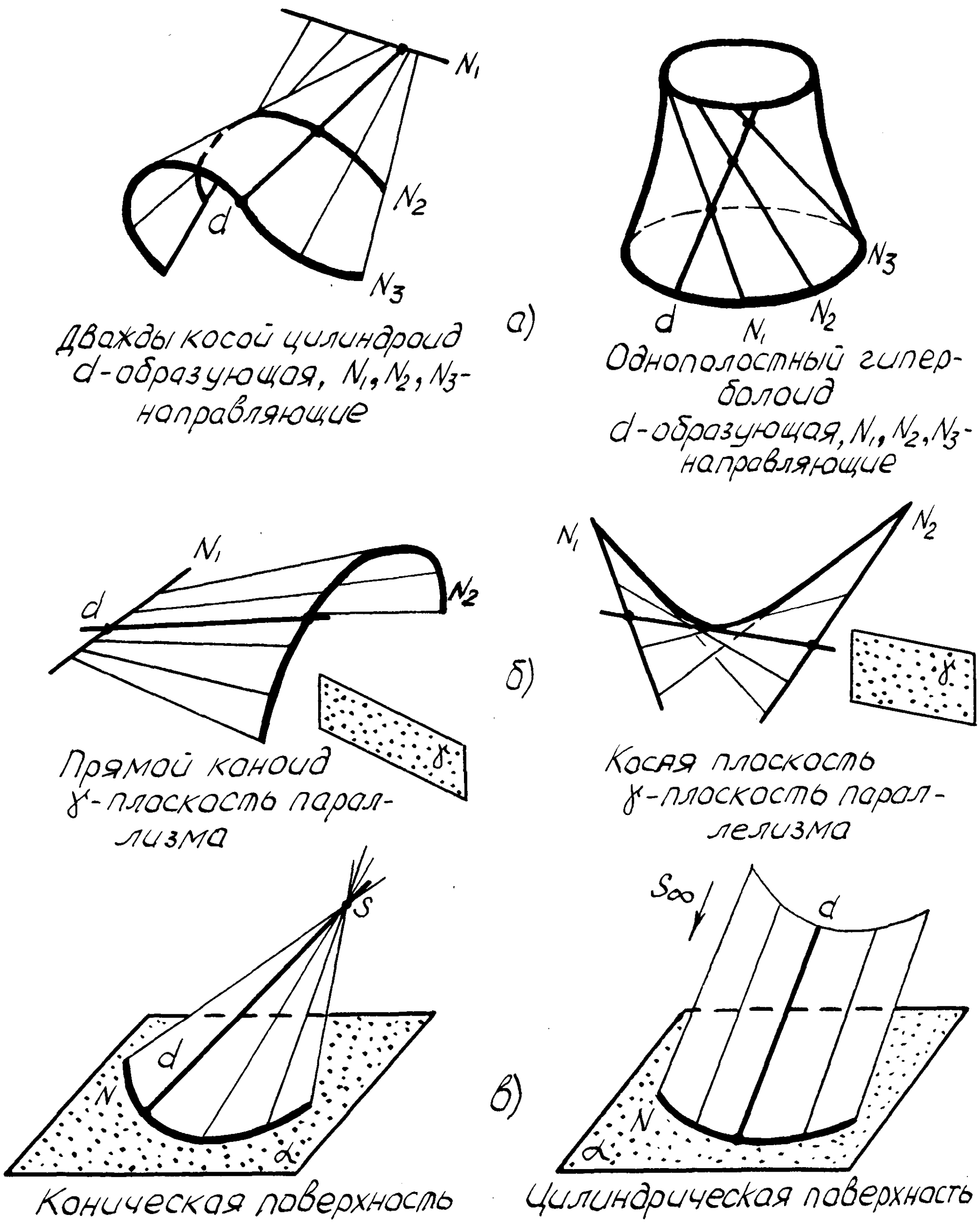


Рисунок 9.3 – Линейчатые поверхности

Поверхность дважды косого цилиндроида (рисунок 9.3а) образуется в том случае, когда две из трех направляющих – кривые линии, в третья – прямая линия. Поверхность однополостного гиперболоида может быть получена при движении прямолинейной образующей по трем скрещивающимся прямым, не параллельным одной плоскости. Очерковой образующей такой поверхности будет являться гипербола. Примером практического использования гиперболоидов в технике является башня инженера Шухова.

Поверхность прямого коноида (рисунок 9.3б) может быть получена в том случае, когда из двух направляющих одна является прямой линией. Для задания на эпюре прямого коноида необходимо указать проекции кривой и прямой направляющих и плоскости параллелизма. Косая плоскость или гиперболический параболоид может быть получен при скольжении прямой по двум скрещивающимся прямолинейным направляющим, при этом образующая все время остается параллельной плоскости параллелизма в соответствие с рисунком 9.3б.

Линейчатые поверхности с одной направляющей (торсы) образуются, когда образующая (прямая линия) движется по кривой направляющей. Если образующая параллельна какому-либо направлению или пересекается с другими положениями образующей в несобственной точке, то образуются цилиндрические поверхности (рисунок 9.3в). Если все прямолинейные образующие пересекаются в собственной точке **S**, то образуются конические поверхности (рисунок 9.3в).

9.4 Нелинейчатые поверхности

Как было указано, нелинейчатыми поверхностями называются поверхности с криволинейными образующими. Она может быть постоянной или переменной.

Среди поверхностей с переменной образующей можно выделить каналовые поверхности (рисунок 9.4а). Каналовая поверхность образована непрерывным каркасом замкнутых плоских сечений, определенным образом ориентированных в пространстве. Площади этих сечений монотонно изменяются в процессе их перемещения по направляющей. Плоскости образующих могут быть параллельны какой-либо плоскости параллелизма или перпендикулярны к направляющей линии (прямые каналовые поверхности). Каналовые поверхности используются при создании переходных участков трубопроводов от одного диаметра и сечения к другим.

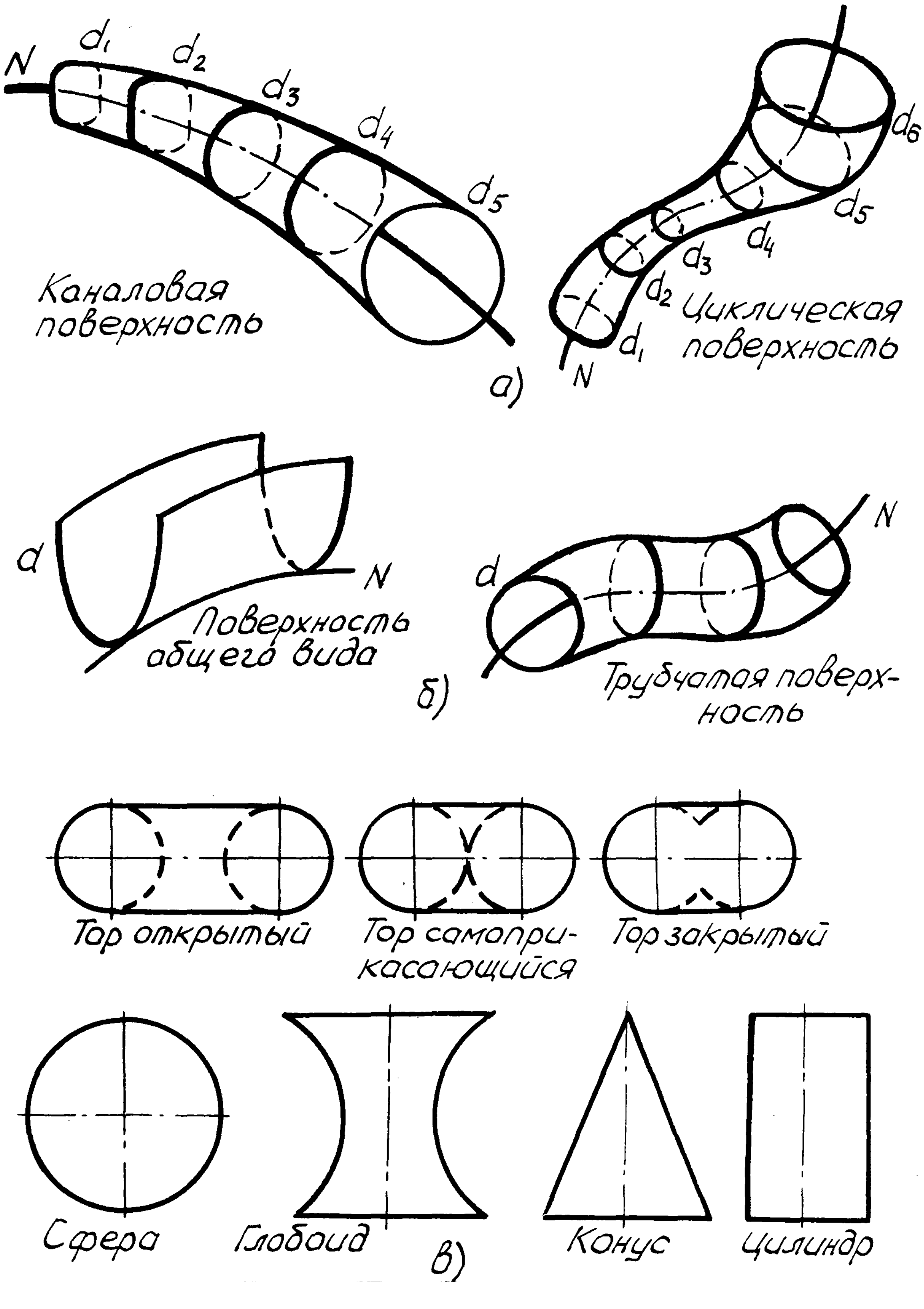


Рисунок 9.4 – Нелинейчатые поверхности

Циклические поверхности образуются с помощью окружностей разного диаметра, центр которых перемещается по криволинейной направляющей в соответствии с рисунком 9.4а.

При постоянной криволинейной образующей могут быть образованы поверхности общего вида и трубчатые поверхности (рисунок 9.4б).

Поверхность общего вида образуется произвольной кривой линией, характер перемещения которой определяется формой и положением направляющей и дополнительными условиями, составляющими содержание.

Трубчатая поверхность является частным случаем циклической и каналовой поверхностей. Диаметр образующей окружности при перемещении по криволинейной направляющей не изменяется.

9.5 Поверхности вращения

Широкое применение в технике нашли поверхности вращения. Среди поверхностей вращения можно особо выделить торы, сферу, глобоид, конусы вращения, цилиндры вращения, эллипсоид вращения, параболоид вращения, однополостный и двухполостный гиперболоиды (рисунки 9.4в и 9.5а).

Тор – поверхность вращения, образованная вращением окружности (дуги окружности) вокруг компланарной с ней прямой (оси тора). Ось вращения тора не совпадает с центром окружности. Если центр окружности принадлежит оси вращения, то образуется сферическая поверхность.

Торы характеризуются большим многообразием форм. На рисунке 9.4в приведены лишь торы, образуемые вращением полной окружности вокруг оси, не совпадающей с её центром (открытый, самоприкасающийся и закрытый торы).

Глобоид является частным случаем тора. Конические и цилиндрические поверхности вращения образуются при вращении прямой линии вокруг оси. Если образующая пересекается с осью, то образуется прямой круговой конус, если она параллельна оси, то образуется прямой круговой цилиндр. При вращении эллипса, параболы и гиперболы вокруг осей образуются соответственно эллипсоид, параболоид, одно- и двухполостный гиперболоиды вращения.

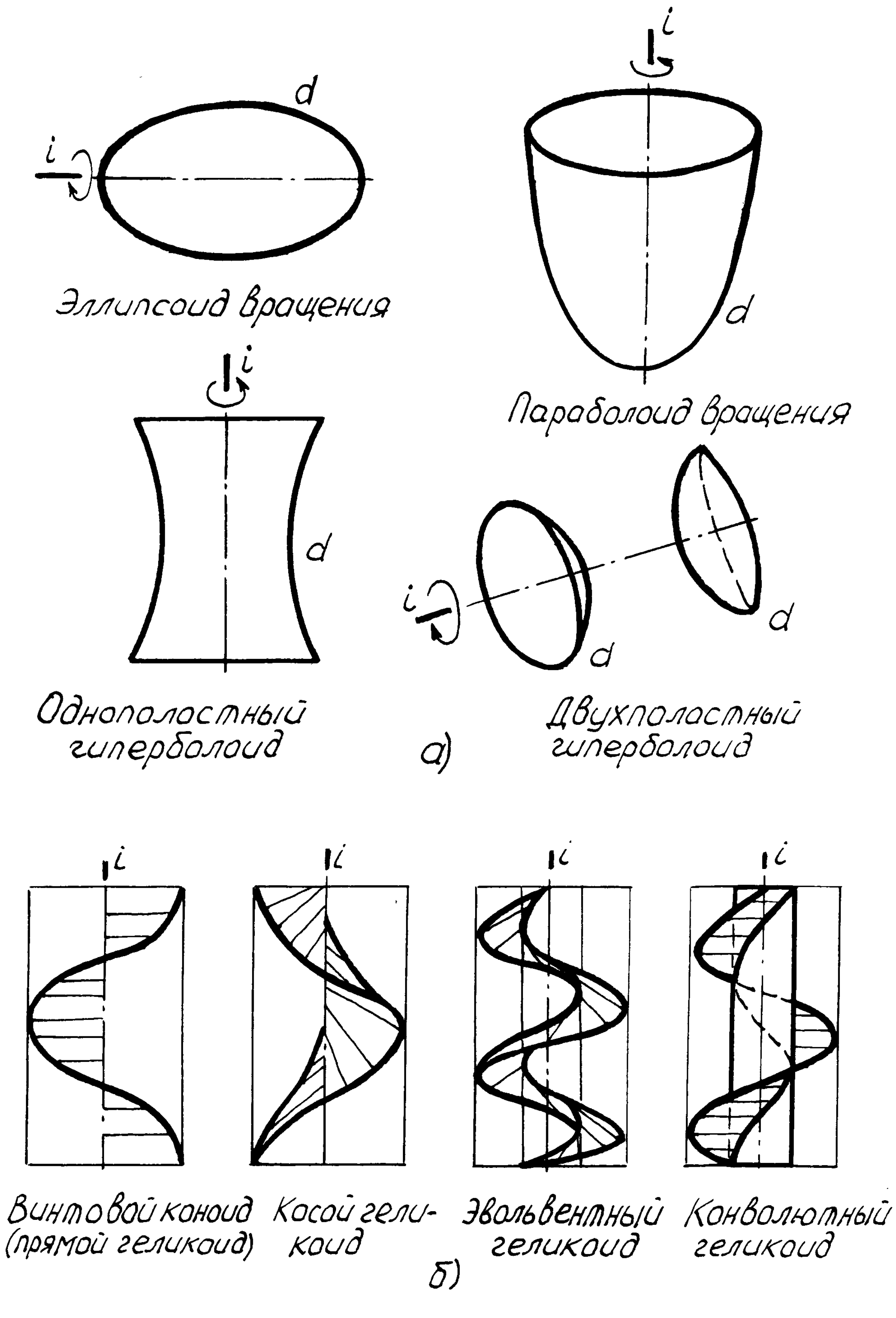


Рисунок 9.5 – Поверхности вращения

9.6 Винтовые поверхности

Среди винтовых поверхностей можно выделить винтовой коноид (прямой геликоид), косой геликоид, эвольвентный геликоид и конволютный геликоид в соответствии с рисунком 9.5б. Принцип образования упомянутых винтовых поверхностей ясен из приведенных рисунков.

Прямой геликоид получается в результате движения прямой образующей, которая, пересекая ось под прямым углом, вращается вокруг оси по винтовой линии. Косой геликоид (Архимедов геликоид) получается в результате движения образующей, которая пересекает ось под углом, не равным 90 градусов.

Эвольвентный геликоид образуется, когда образующая во всех своих положениях остается касательной к цилиндрической винтовой линии. Угол наклона образующей к плоскости **H** равен углу подъема винтовой линии.

Конволютный геликоид образуется, когда образующая скользит по винтовой линии, оставаясь касательной к цилиндру. Угол наклона образующей к плоскости **H** не равен углу подъема винтовой линии.

9.7 Точка на поверхности

В связи с тем, что в технике поверхности вращения широко применяются, то дальнейшие геометрические операции целесообразно производить применительно к поверхностям вращения.

Аналогично условию принадлежности точки плоскости можно утверждать, что точка принадлежит поверхности, если она принадлежит прямой или кривой линии, находящейся на этой поверхности. На рисунке 9.6а точка **C** принадлежит поверхности, так как принадлежит одной из образующих поверхности. В другом примере точка **A** принадлежит поверхности вращения **Ф**, так как принадлежит окружности, находящейся на поверхности.

На этом же рисунке представлены различные положения точки на поверхности прямого кругового конуса. Построение проекций точек производится с учетом следующих правил:

1) Если фронтальная проекция точка совпадает с осью, то по крайней мере одна из других проекций точки находится на образующей. В этом случае точка $\mathbf{2}^{/}$ находится по свойству эпюра Монжа: ордината точки на профильной проекции равна ординате точки на горизонтальной проекции;

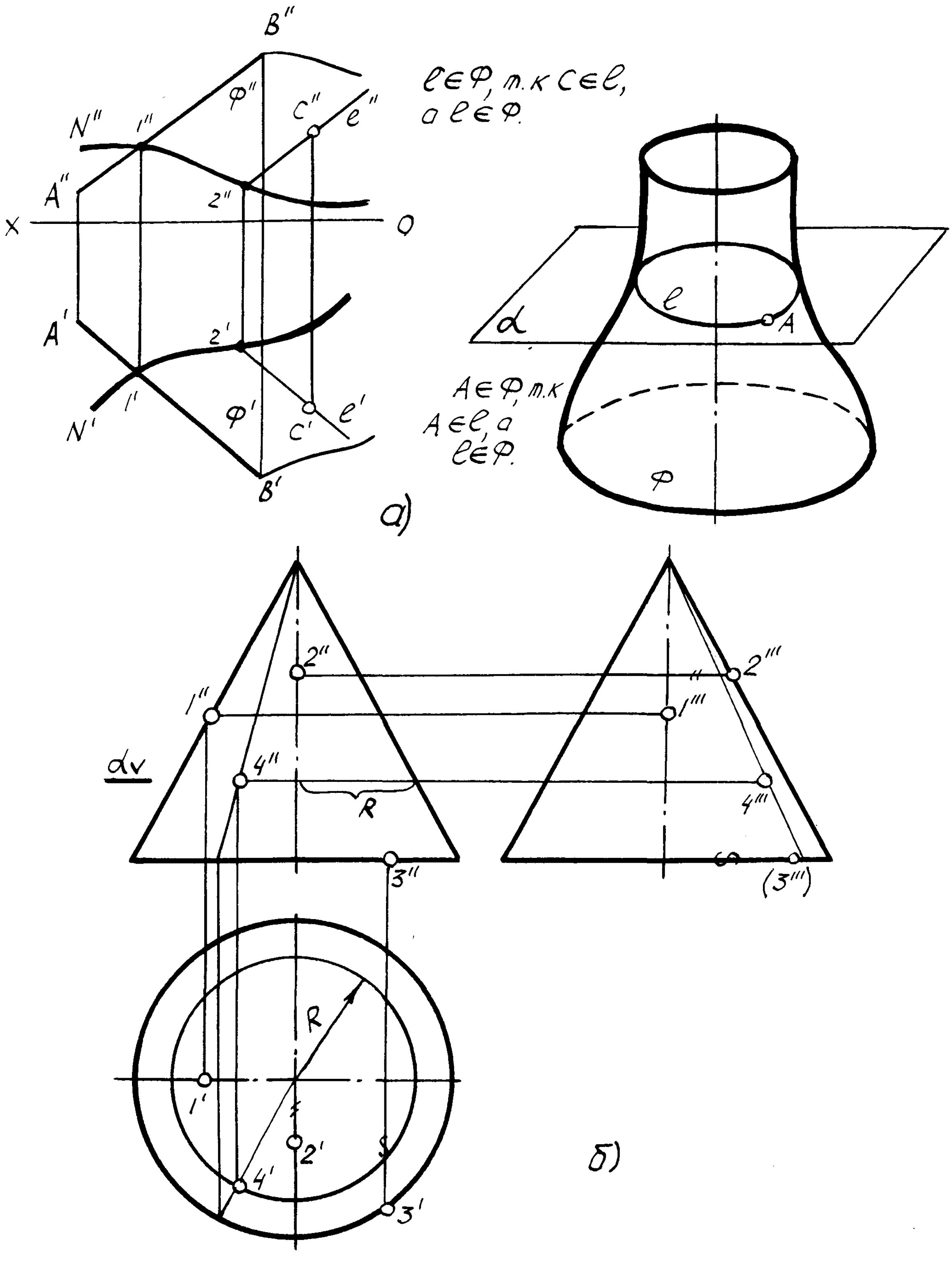


Рисунок 9.6 – Точка на поверхности

2) Если фронтальная проекция точки находится на образующей, то две другие проекции точки будут находиться на осях;

3) Точки, не находящиеся на оси или образующей, могут быть построены с помощью образующих или методом секущих вспомогательных плоскостей. Метод заключается в следующем. Через точку $\mathbf{4}^{//}$ проведем секущую вспомогательную плоскость частного положения (например, горизонтальную плоскость α). В качестве вспомогательной плоскости берут такую плоскость, которая давала бы в сечении исходной поверхности простую фигуру (прямые линии, окружность известного радиуса и т.д.).

В сечении конуса вспомогательной плоскостью будет окружность радиуса **R**. На горизонтальной проекции конуса строим окружность сечения и на ней находим точку $\mathbf{4}^{/}$. Точку $\mathbf{4}^{///}$ находим по упомянутому свойству эпюра Монжа.

Точки **1**, **2**, **3** на рисунке 9.6 называются характерными. Построение проекций этих точек не вызывает затруднений.

9.8 Сечение поверхностей плоскостями

Сечение поверхностей плоскостями частного и общего положения является одной из главных тем начертательной геометрии. Основой этой темы являются конические, цилиндрические, сферические и торовые сечения. Наглядное изображение сечений упомянутых поверхностей представлено на рисунке 9.7.

Самой интересной поверхностью, с точки зрения разнообразия сечений, является поверхность прямого кругового конуса.

Если секущая плоскость проходит параллельно основанию, то в сечении получается окружность, радиус которой равен расстоянию от оси конуса до образующей вдоль следа секущей плоскости.

Если секущая плоскость не параллельна основанию и пересекает обе очерковые образующие, то в сечении получается эллипс. Плоскость, параллельная оси конуса, в сечении образует гиперболу.

Если секущая плоскость пересекает одну из образующих и угол её наклона равен углу наклона образующей, то в сечении образуется парабола.

Плоскость, проходящая через вершину конуса, в сечении образует треугольник.

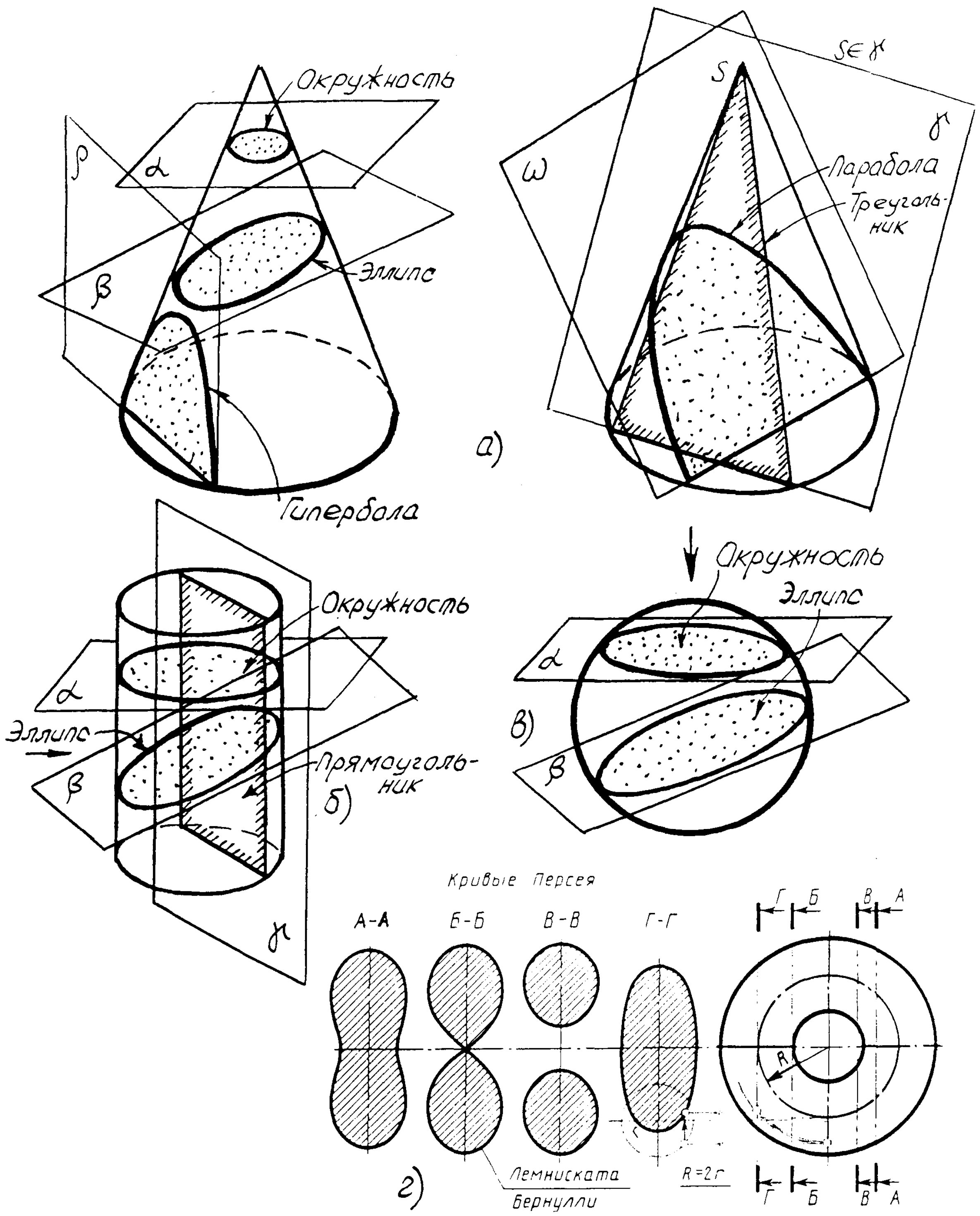


Рисунок 9.7 – Сечения поверхностей

Цилиндрические сечения менее разнообразны. Наклонное сечение цилиндра является эллипсом, сечение плоскостью, параллельной оси, представляет из себя прямоугольник. В сечении цилиндра плоскостью, перпендикулярной оси, образуется окружность.

Всякое сечение сферы есть окружность, если проецирование происходит в направлении, перпендикулярном плоскости сечения, и эллипс, если это не соблюдается.

Возможные сечения открытого тора представлены на рисунке 9.7г. Одно из сечений является лемнискатой Бернулли (сечение Б-Б), другие кривые линии являются графическими линиями и называются кривыми Персея.

Сечение поверхностей вращения плоскостью частного положения на примере сферы представлено на рисунке 9.8. Построение сечения начнем с поиска характерных точек. Это точки $\mathbf{1}^{//}$, $\mathbf{3}^{//}$, $\mathbf{4}^{//}$, $\mathbf{6}^{//}$ на фронтальной проекции. Остальные проекции точек находим по методике, рассмотренной ранее (см. тему "Точка на поверхности"). Далее намечаем промежуточные точки $\mathbf{2}^{//}$ и $\mathbf{5}^{//}$. Проводим через указанные точки вспомогательные плоскости β и γ. На горизонтальной проекции строим окружности сечений радиусами $\mathbf{R_1}$ и $\mathbf{R_2}$. Там, где линии связи точек **2** и **5** пересекают контуры сечений получаем горизонтальные проекции точек $\mathbf{2}^{/}$ и $\mathbf{5}^{/}$, а затем строим их профильные проекции. Полученные точки соединяем плавной линией.

На рисунке 9.8б представлено построение сечения конуса плоскостью общего положения, заданной следами. Характерными точками являются точки **1** и **8**, в которых горизонтальный след плоскости пересекает окружность основания конуса, так как они лежат в одной плоскости проекций **H**. Далее задача по построению сечения заключается в нахождении следующих точек: наивысшей точки на фронтальной проекции, точки касания кривой линии сечения с очерковой образующей конуса, промежуточных точек.

Наивысшую точку найдем с помощью вспомогательной горизонтально-проецирующей плоскости β, перпендикулярной заданной плоскости и проходящей через вершину конуса. Сначала найдем линию пересечения заданной и вспомогательной плоскостей, затем построим сечение конуса вспомогательной плоскостью (треугольник) и там, где указанные элементы пересекаются, найдем точку $\mathbf{4}^{//}$, которая и будет наивысшей.

Точку касания будущего сечения конуса с очерковой образующей найдем с помощью вспомогательной фронтальной плоскости γ. Точка касания **5** находится в месте пересечения линии пересечения плоскостей α и γ и очерковой образующей конуса.

Промежуточные точки **2**, **3**, **6**, **7** найдем методом секущих вспомогательных плоскостей, для чего используем горизонтальные плоскости **ω** и **q** . Полученные точки соединяем плавной линией.

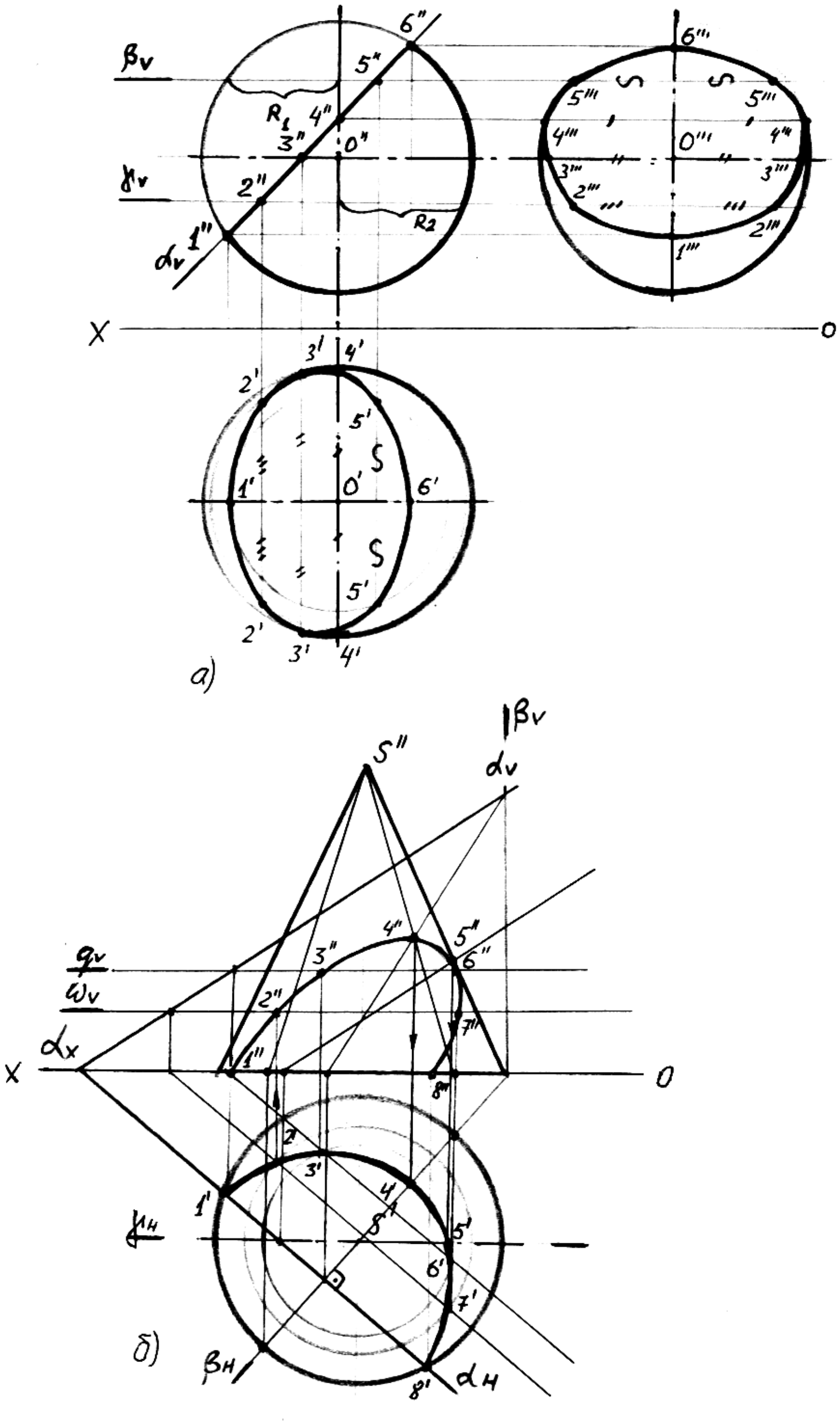


Рисунок 9.8 – Построение сечений поверхностей вращения

9.9 Пересечение прямой с поверхностью

Задача пересечения прямой с поверхностью решается аналогично задаче о пересечении прямой с поверхностью многогранников. Отличие состоит в том, что в сечении кривой поверхности вспомогательной плоскостью в большинстве случаев образуются кривые линии. Общая методика решения задачи представлена на рисунке 9.9а.

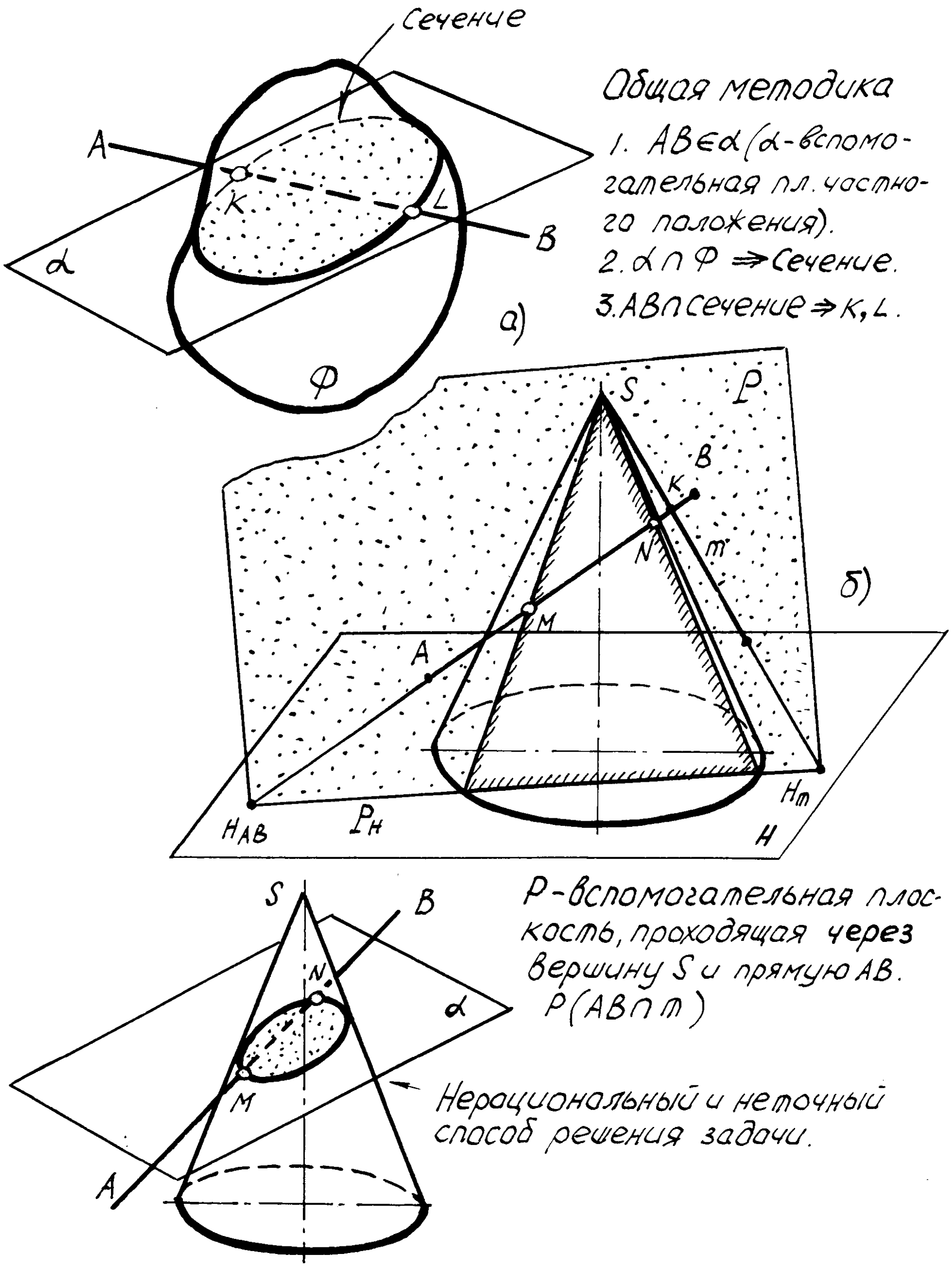


Рисунок 9.9 – Пересечение прямой с поверхностью

Если прямая находится в частном положении, то задача значительно упрощается. В некоторых случаях для упрощения решения применяют методы преобразования с тем, чтобы получить в сечении более удобные для построения кривые линии, например, окружность известного радиуса.

В случае пересечения прямой общего положения с конусом в качестве вспомогательной плоскости используют плоскость общего положения, проходящую через вершину конуса. Вспомогательную плоскость задают двумя пересекающимися прямыми **AB** и **m**. В сечении конуса такой вспомогательной плоскостью образуется треугольник. Использование в качестве вспомогательных плоскостей горизонтально- или фронтально-проецирующих плоскостей нерационально, так как они в сечениях образуют эллипс и гиперболу, построение которых связано с большой трудоемкостью и неточностью (рисунок 9.9б).

ПРИМЕР 9.1 Найти точки встречи прямой частного (а) и общего (б) положения с поверхностью конуса.

РЕШЕНИЕ. На рисунке 9.10 представлено решение задач.

В первой задаче прямая является горизонталью. Проведем через прямую горизонтальную вспомогательную плоскость α. В сечении конуса на горизонтальной проекции будет окружность радиуса **R**. Там, где прямая пересекается с окружностью найдем точки встречи прямой с поверхностью (точки **1** и **2**).

Вторую задачу решим с помощью вспомогательной плоскости, проходящей через вершину конуса **S**. Возьмем на прямой **AB** любую точку **K** и соединим её с вершиной конуса **S**. Две прямые **AB** и **m** являются пересекающимися прямыми и, следовательно, задают плоскость, проходящую через прямую **AB** и вершину **S**. В сечении конуса этой плоскостью получится треугольник. Чтобы треугольник построить, необходимо найти горизонтальный след вспомогательной плоскости.

Находим горизонтальные следы прямых **AB** и **m** и, соединив их, получим горизонтальный след плоскости. След пересекается с основанием конуса в точках $\mathbf{1}^{/}$ и $\mathbf{2}^{/}$. Соединив точки с вершиной **S**, получим сечение конуса в виде треугольника $\mathbf{S}^{/}\mathbf{1}^{/}\mathbf{2}^{/}$. В местах пересечения прямой **AB** с контуром треугольника находим искомые точки **M** и **N**.

ПРИМЕР 9.2. Построить точки встречи прямой **AB** с поверхностью сферы (Рис.9.11).

РЕШЕНИЕ. Прямая **AB** является прямой общего положения. Применение проецирующих вспомогательных плоскостей частного положения в этой задаче нецелесообразно, так как в сечениях сферы образуются эллипсы.

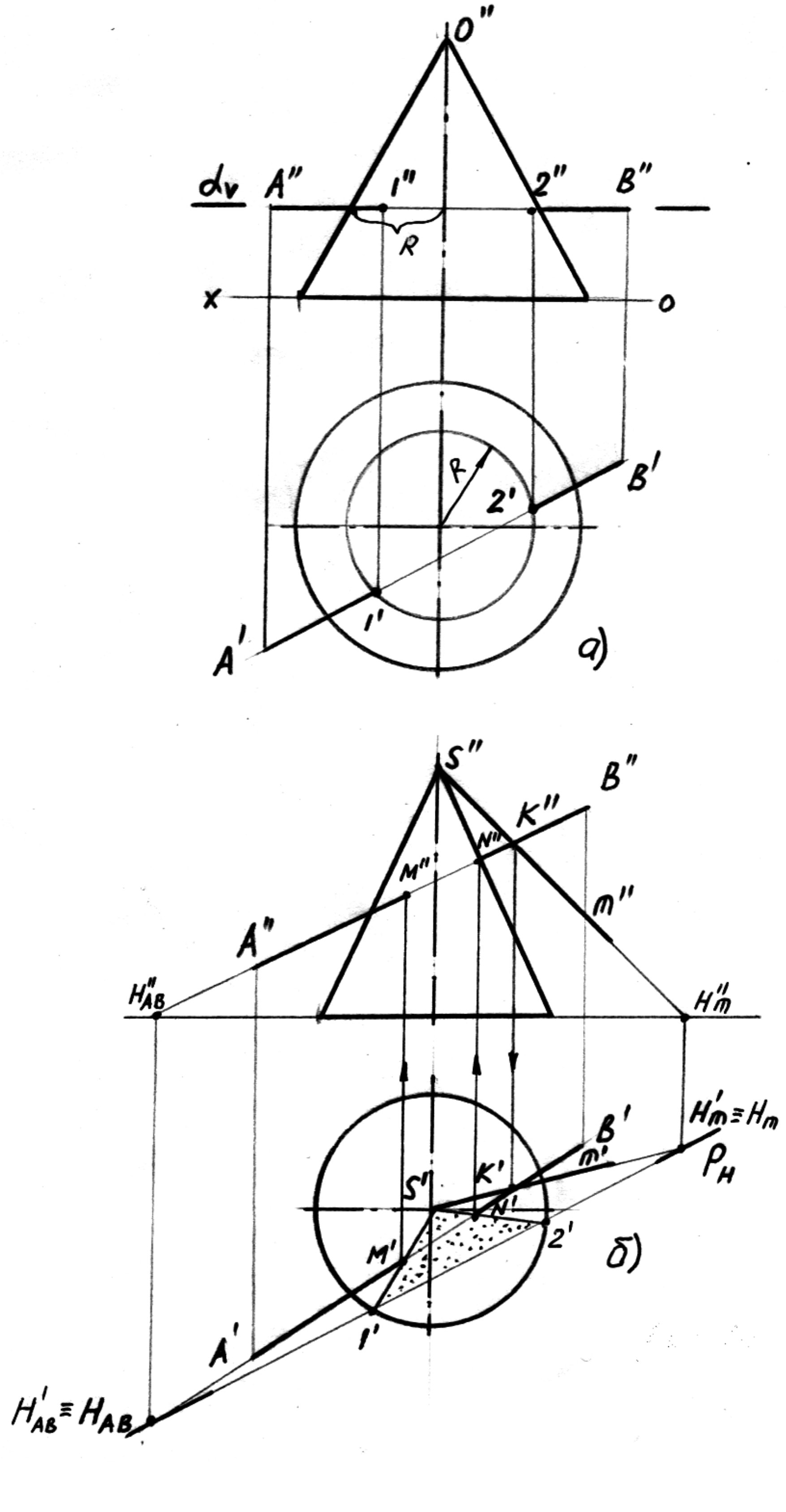

O''
α_V
A''
1''
2''
B''
R
x
o
R
2'
B'
1'
A'
а)
S''
B''
K''
N''
M''
m''
A''
H''_{AB}
H''_m
$H'_m \equiv H_m$
B'
m'
P_H
S'
K'
N'
2'
M'
б)
1'
A'
$H'_{AB} \equiv H_{AB}$

Рисунок 9.10

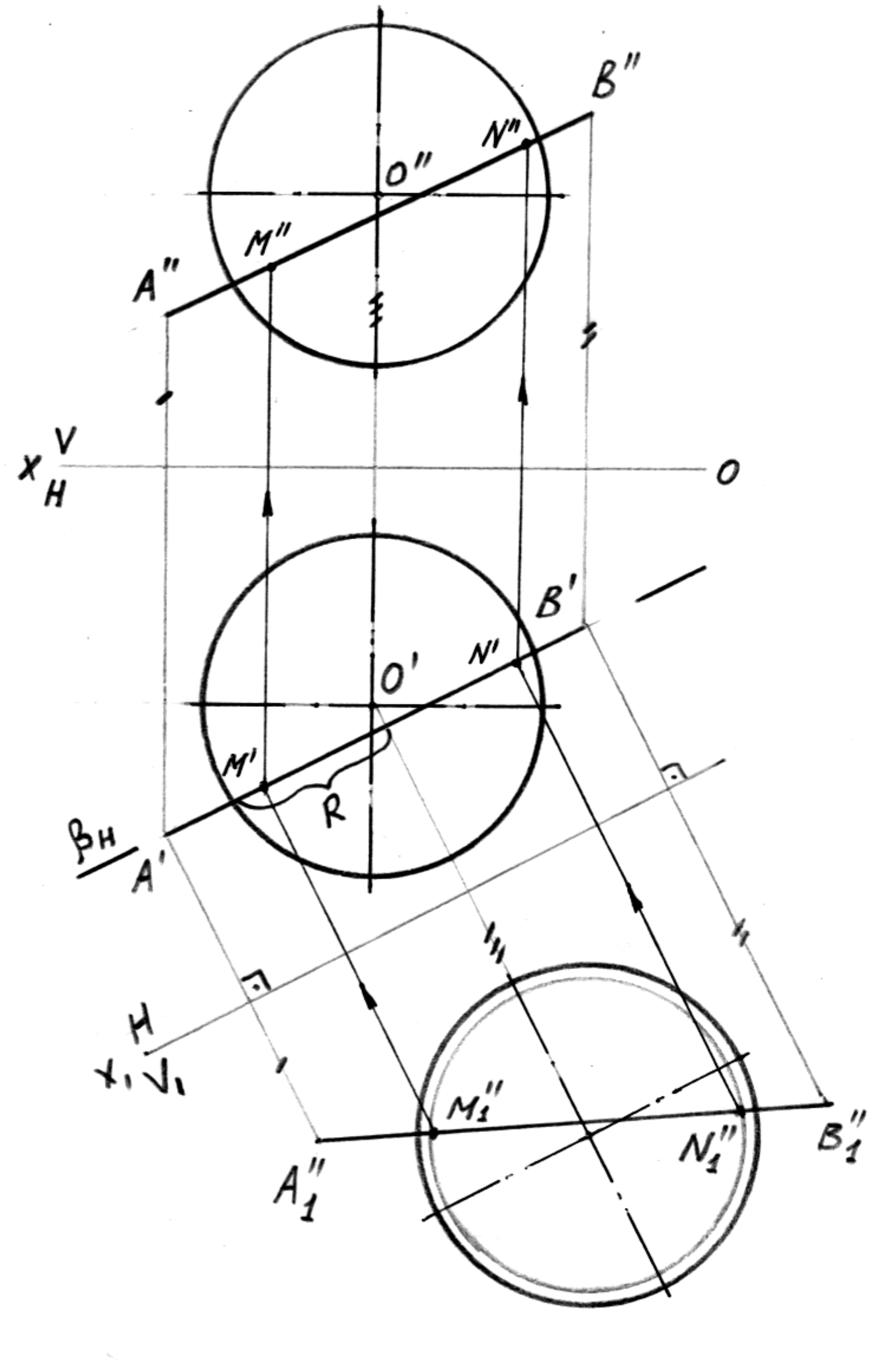


Рисунок 9.11

Решим задачу с использованием метода замены плоскостей проекций. Заменой фронтальной плоскости проекций переведем прямую **AB** из общего положения в частное (в положение фронтали). После построений в образованной новой системе плоскостей проекций через прямую проведем вспомогательную фронтальную плоскость β. В сечении сферы вспомогательной плоскостью будет окружность радиуса **R**. Там, где прямая пересекается с контуром окружности, получаем искомые точки **M** и **N**.

9.10 Пересечение поверхностей

Задача о пересечении поверхностей является наиболее значительной в курсе начертательной геометрии как с теоретической, так и с практической точек зрения. Основные методики решения упомянутой задачи широко используются в различных отраслях промышленности.

Линия, общая для обеих пересекающихся поверхностей, называется линией пересечения. Построение линий пересечения и их разметка на различных металлоконструкциях является одной из главных и сложных инженерных задач.

Существуют различные частные случаи пересечения поверхностей, обусловленные геометрическими и математическими закономерностями (рисунок 9.12а).

Две цилиндрические поверхности с параллельными осями пересекаются по прямым линиям, соединяющим точки пересечения оснований цилиндров. Две конические поверхности с общей вершиной пересекаются по прямым линиям, соединяющим вершину и точки пересечения оснований. Соосные поверхности вращения второго порядка пересекаются по окружностям, фронтальная проекция которых является прямыми линиями.

Соосные со сферой тела вращения пересекаются по окружностям, фронтальная или горизонтальная проекции которых являются прямыми линиями.

Если две поверхности второго порядка описаны вокруг одной и той же сферы, то линия их пересечения распадается на две кривые линии второго порядка, плоскости которых проходят через прямую, соединяющую точки пересечения линий касания (теорема Монжа). Сказанное означает, что на одной из проекций линии пересечения являются прямыми линиями, соединяющими противоположные характерные точки. Характерными точками являются точки пересечения образующих линий поверхностей.

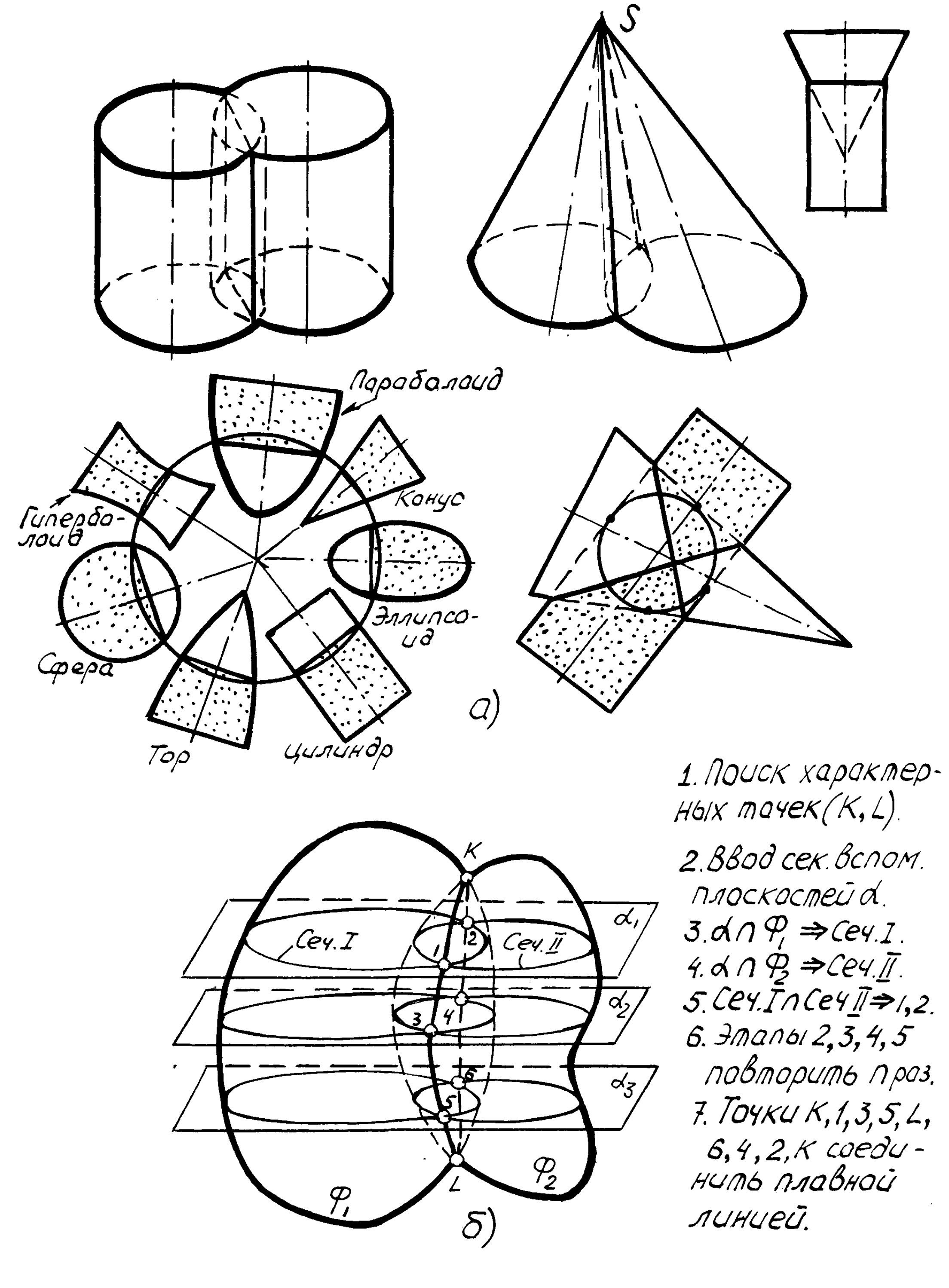


Рисунок 9.12 – Частные случаи пересечения поверхностей (а) и построение линии пересечения методом секущих вспомогательных плоскостей (б)

В начертательной геометрии разработано множество методов построения линий пересечения поверхностей. Самыми распространенными методами являются метод секущих вспомогательных плоскостей и метод концентрических сфер.

Сущность метода вспомогательных секущих плоскостей заключается в том, что при помощи секущих плоскостей находятся общие точки, принадлежащие пересекающимся поверхностям. Наглядно суть метода представлена на рисунке 9.12б. Он содержит общий порядок решения:

1) Поиск характерных точек и построение их проекций (точки **K** и **L**);

2) Ввод секущей вспомогательной плоскости. В качестве вспомогательных плоскостей берут плоскости частного положения, которые образуют в сечениях поверхностей простые фигуры (принцип простых сечений);

3) Строят сечения поверхностей вспомогательной плоскостью (Сеч.I и Сеч.II);

4) Находят общие точки обоих сечений (точки 1 и 2);

5) Пункты 2, 3, 4 повторяют несколько раз (в учебных чертежах 5-7 раз) с новыми вспомогательными плоскостями;

6) Полученные точки соединяют плавной линией с учетом видимости проекций.

Метод концентрических сфер основан на частном случае пересечения поверхностей (пересечение тел вращения со сферой, когда ось тел проходит через центр сферы) (рисунок 9.12а). Сущность метода сфер заключается в том, что поверхности пересекают не плоскостями, а сферами. Это объясняется тем, что всякая сфера с центром на оси поверхности вращения пересекает любую поверхность вращения по окружности, т.е. по линии, построение которой не вызывает затруднений. Далее находят линии пересечения поверхностей с проведенной сферой, после чего находят общие точки линий пересечения. Полученные точки являются точками линии пересечения поверхностей.

Центр сфер, как правило, выбирают в точке пересечения осей поверхностей (рисунок 9.13). Максимальный радиус сфер равен расстоянию от центра сфер до наиболее удаленной характерной точки. Минимальный радиус сфер равен максимальной нормали, проведенной из центра сфер на боковую поверхность пересекающихся объектов.

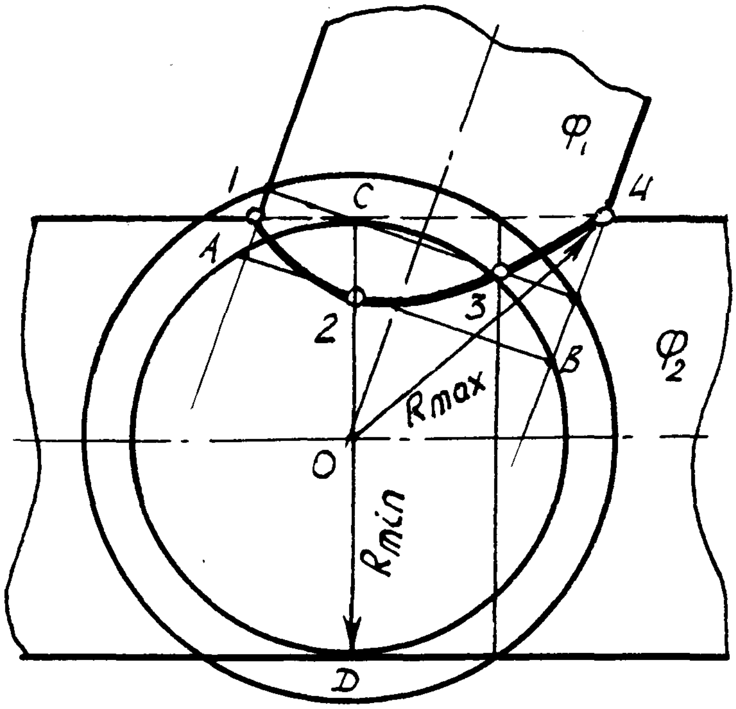


Рисунок 9.13 – Метод концентрических сфер

9.11 Прикладные методы разметки линии пересечения

Сочленение двух поверхностей или технических форм является сложной инженерной задачей. Традиционно задача о разметке линии пересечения технических форм и обрезке форм перед стыковкой решается поэтапно следующим образом:

1) Разработка чертежей с построением линии пересечения соединения технических форм (желательно в масштабе 1:1);

2) Выполнение разверток пересекающихся технических форм и нанесение линии пересечения на развертки;

3) Изготовление шаблонов по полученным разверткам;

4) Нанесение линии пересечения на обе пересекающиеся технические формы и обрезка перед стыковкой;

5) Стыковка технических форм и сварка изделия.

Традиционный метод разметки соединения технических форм отличается большой трудоемкостью и неточностью.

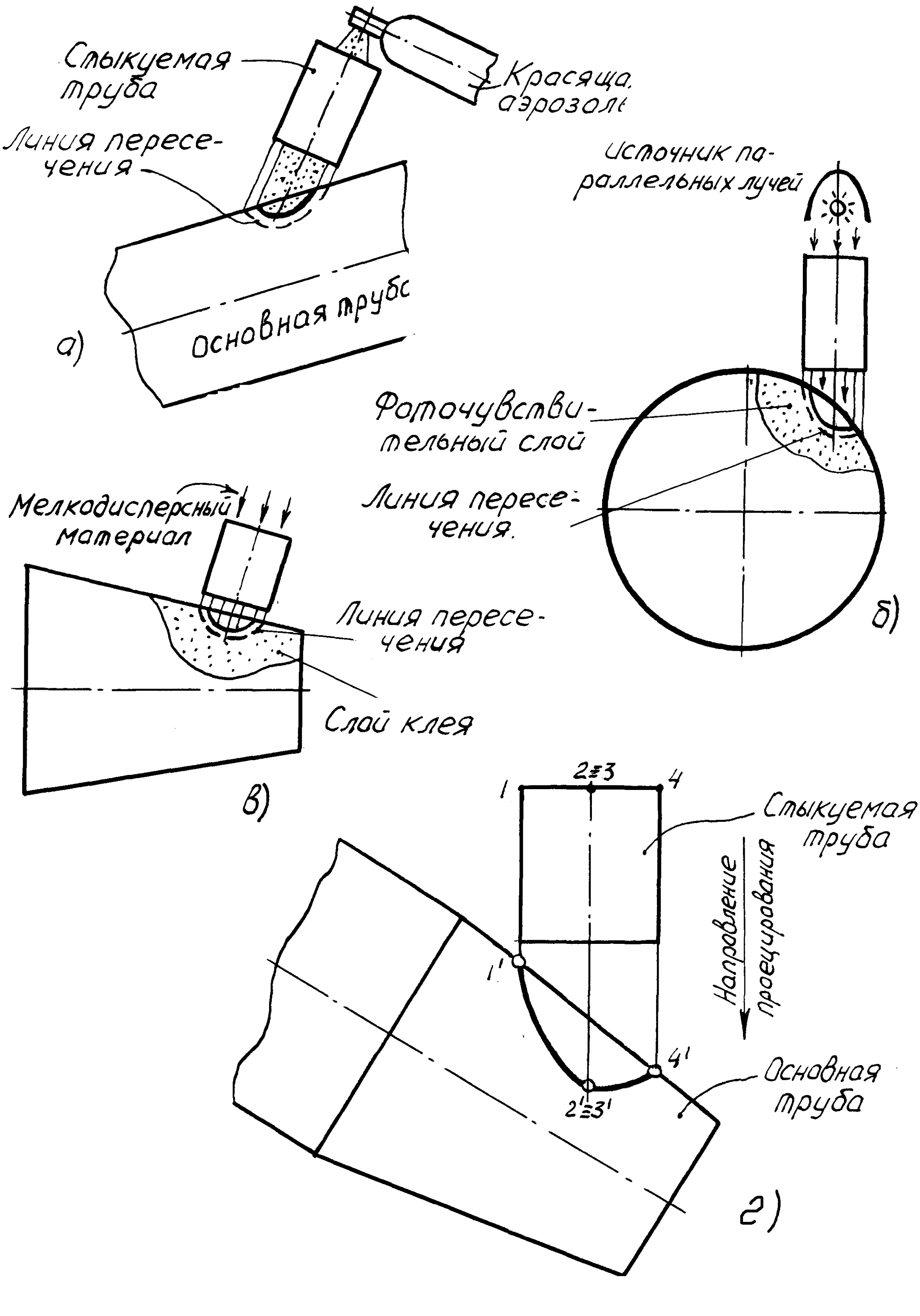


Рисунок 9.14 – Прикладные методы разметки линии пересечения

Профессором Кириным Е.М.А разработано несколько прикладных методов разметки линии пересечения непосредственно на деталях, минуя стадию разработки чертежей и изготовления шаблонов (способы разметки защищены авторскими свидетельствами и патентами).

Новая технология разметочных работ при изготовлении трубного соединения основана на том, что линия пересечения двух поверхностей, одна из которых является цилиндрической или призматической, является параллельной проекцией цилиндра или призмы на поверхность другого объекта, входящего в состав соединения (рисунок 9.14г). Из этого следует: для того, чтобы построить линию пересечения, например, трубного соединения, необходимо стыкуемую трубу параллельно спроецировать на основную трубу в направлении оси стыкуемой трубы. Вопрос состоит лишь в том, как получить проекцию стыкуемой трубы на основную непосредственно на трубах. Автором предложено несколько технических решений.

В одном из них (рисунок 9.14а) линия пересечения получается путем нанесения на основную трубу красящей аэрозоли, распыляемой через стыкуемую трубу. На основной трубе образуется разметочная зона в виде окрашенного пятна. По этой зоне с припуском на толщину стыкуемой трубы размечается линия пересечения, эквидистантная разметочной зоне. По линии пересечения в основной трубе вырезается отверстие, в которое вставляется стыкуемая труба. Затем стыкуемая труба размечается по контуру отверстия и обрезается. Затем трубы свариваются. Трудоемкость разметки трубного соединения уменьшается в несколько раз, соединение получается точным, плотным и герметичным.

По другому способу в соответствии с рисунком 9.14б разметочная зона образуется за счет взаимодействия пучка параллельных лучей с фоточувствительным слоем, нанесенным на основную трубу. На рисунке 9.14в показано получение разметочной зоны за счет прилипания мелкодисперсного материала к клеевому слою на основной трубе.

9.12 Развертки кривых поверхностей

Общие сведения о развертках были даны в разделе 7.14 "Развертки многогранников". Развертки развертываемых кривых поверхностей также могут производиться методом нормального сечения и методом раскатки.

По возможности развертываться в плоскость кривые поверхности делятся на развертываемые и условно-развертываемые. Развертки условно-развертываемых поверхностей могут быть произведены только приближенно.

Разверткой прямого кругового конуса является сектор окружности с радиусом, равным длине образующей конуса и углом при вершине конуса.

Разверткой прямого кругового цилиндра является прямоугольник шириной, равной высоте цилиндра и длиной, равной длине окружности основания. В примерах к данной теме показано построение разверток некоторых поверхностей.

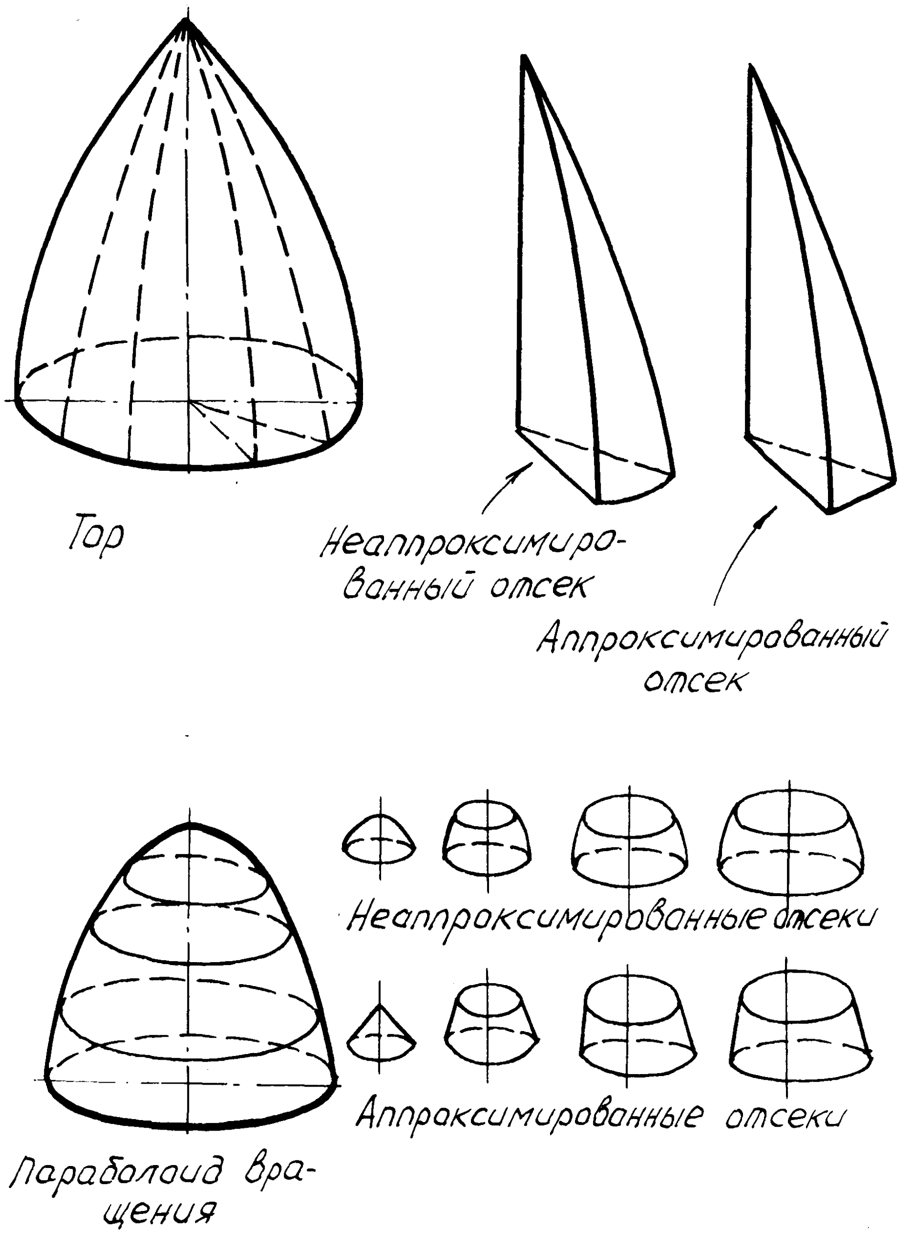


Рисунок 9.15 – Образование отсеков неразвёртываемых поверхностей

Развертки неразвертываемых (условно-развертываемых) поверхностей могут быть осуществлены путем аппроксимации отсеков поверхностей. Аппроксимация – это приближенная замена отсеков неразвертываемой поверхности отсеками развертывемой поверхности. В качестве аппроксимирующих поверхностей используют плоскости, конические и цилиндрические поверхности. На рисунке 9.15 представлена аппроксимация поверхности тора и параболоида вращения цилиндрическими и коническими поверхностями.

Пример условно-приближенной развертки торовой поверхности представлен на рисунке 10.16. Решение задачи заключается в том, что поверхность тора делят на несколько равных отсеков (например, на 12 отсеков) и неразвертываемую поверхность отсека заменяют развертываемой цилиндрической поверхностью. Далее поверхность элементарного отсека развертывают в плоскость.

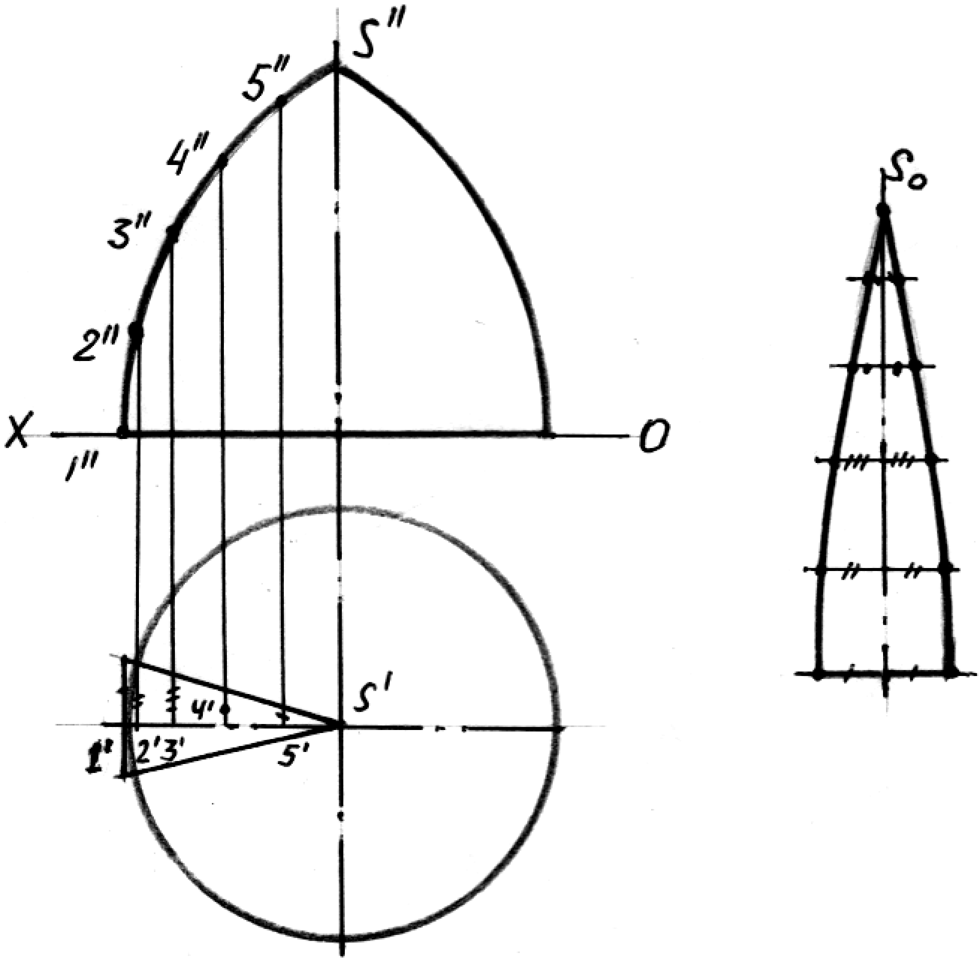


Рисунок 9.16 – Условно-приближённая развёртка тора

ПРИМЕР 10.3. Построить проекции усеченного конуса, натуральную величину сечения и развертку усеченной части конуса с нанесением на ней линии сечения (рисунок 9.17).

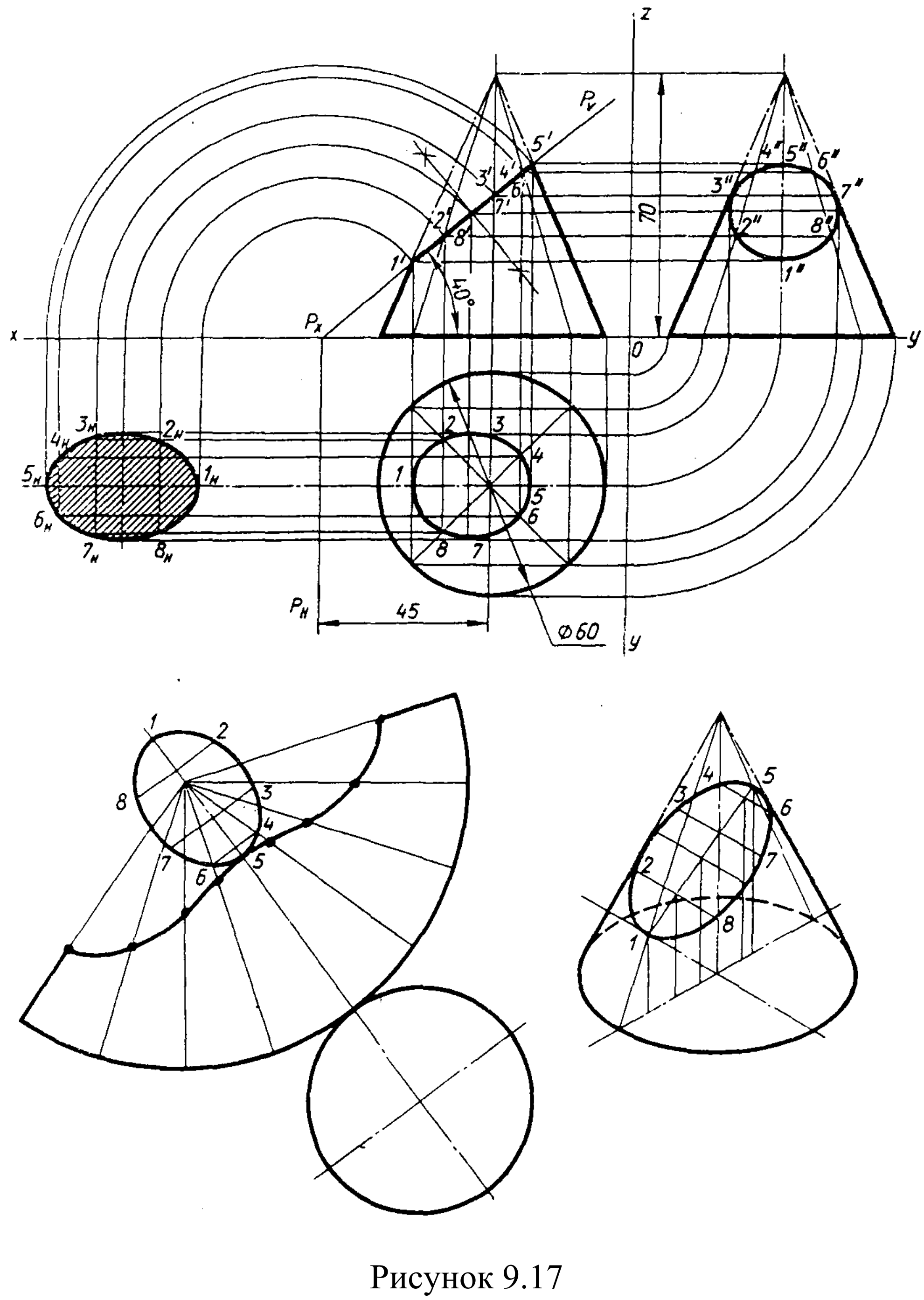


Рисунок 9.17

РЕШЕНИЕ. Точки сечения **1**, **3**, **5** построим как характерные точки. Промежуточные точки **4**, **6** и **2**, **8** построим с помощью образующих. Натуральную величину сечения построим методом совмещения (см. тему "Метод совмещения").

Развертку поверхности усеченного конуса построим методом раскатки, разделив основание конуса на восемь частей.

ПРИМЕР 10.4. Построить линию пересечения конуса с цилиндром и развертку конуса с нанесением на неё линии пересечения (Рис.9.18).

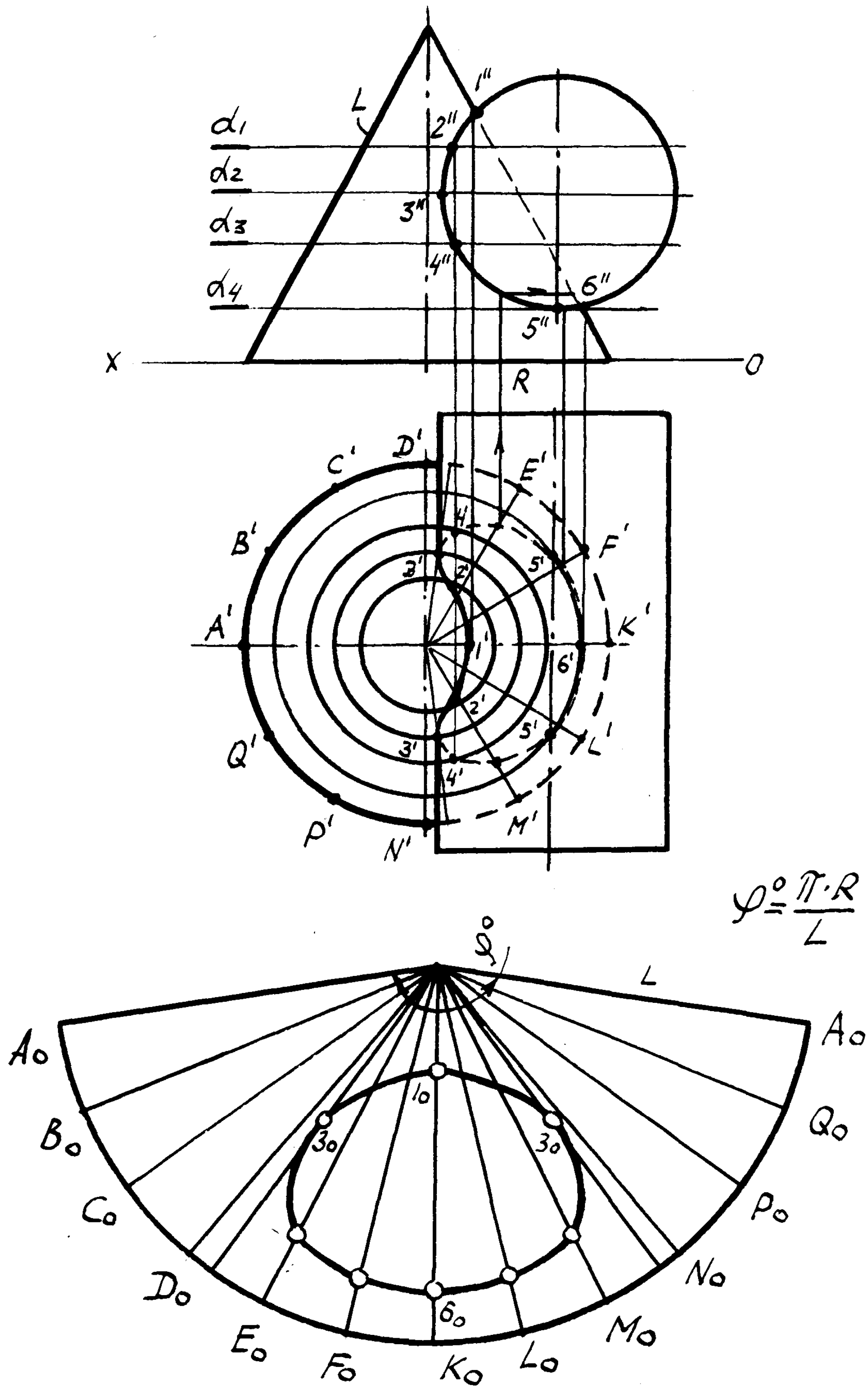


Рисунок 9.18

РЕШЕНИЕ. Линию пересечения конуса с цилиндром построим методом секущих вспомогательных плоскостей. В качестве вспомогательных плоскостей используем горизонтальные плоскости. Развертку конуса построим методом раскатки (см. тему "Развертка пирамиды").

В заключении темы "Кривые поверхности" отметим, что кривые поверхности находят широкое использование в технике, архитектуре и строительстве. На рисунке 9.19 представлены примеры их использования в технике.

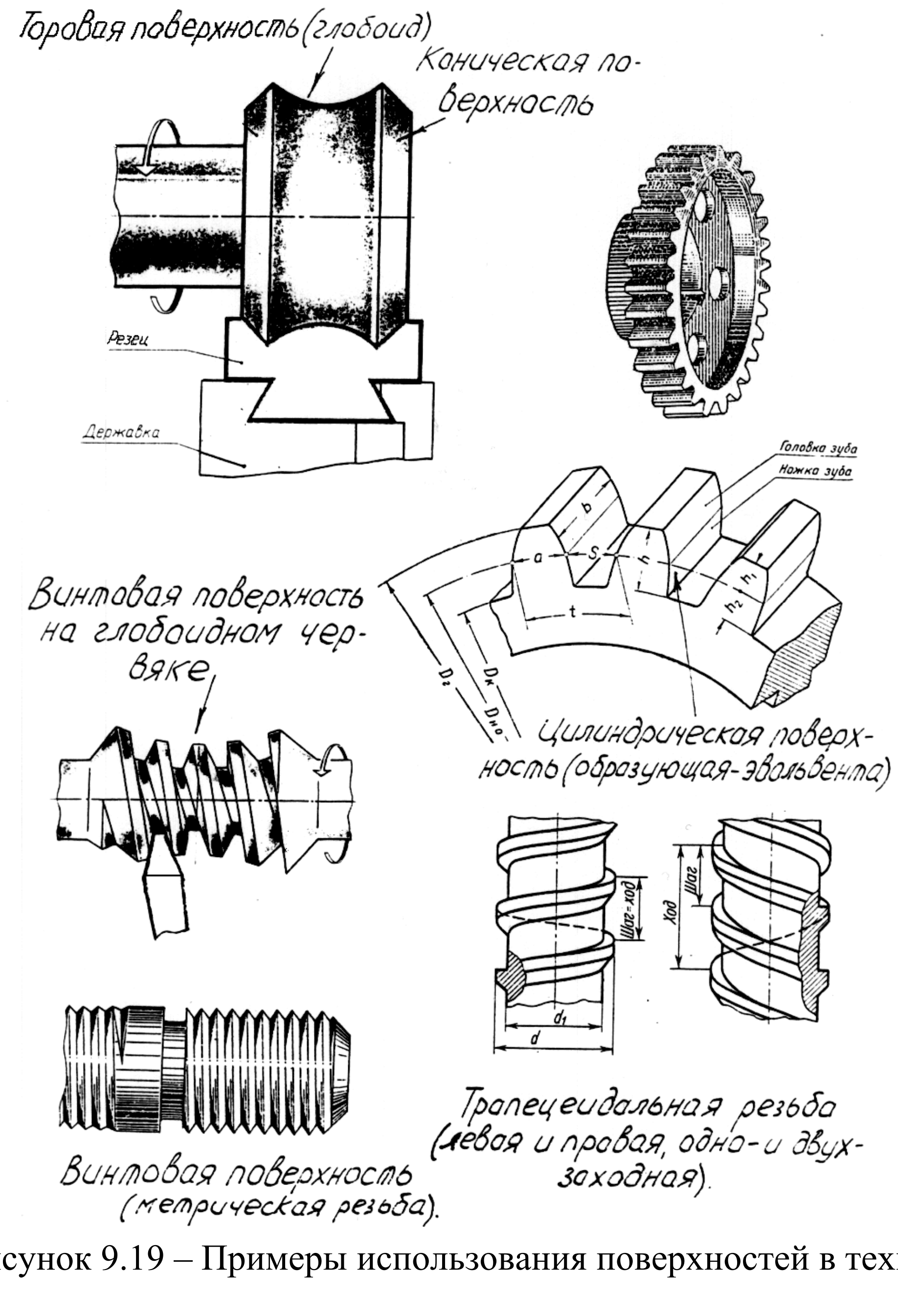


Рисунок 9.19 – Примеры использования поверхностей в технике

10 КАСАТЕЛЬНЫЕ ПЛОСКОСТИ

При изображении кривых поверхностей иногда требуется проведение касательных плоскостей. Касательные плоскости широко используются в теории и практике зубчатого зацепления.

Плоскостью, касательной к поверхности в некоторой её точке, называют плоскость, образованную касательными, проведенными к всевозможным кривым, принадлежащим поверхности и проходящим через ту же точку.

Касательная плоскость может иметь с поверхностью одну или множество общих точек. Элементами касания в соответствии с рисунком 10.1 могут быть точка, прямая линия, кривая линия общего вида, окружность.

Если касательная плоскость имеет с поверхностью только одну общую точку, то все линии поверхности, проходящие через эту точку, будут расположены по одну сторону от касательной плоскости. Такие точки касания называются эллиптическими.

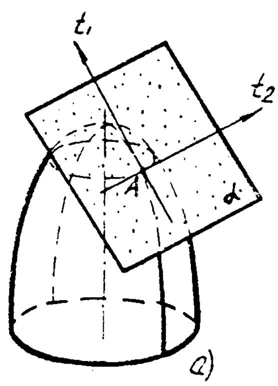
Если плоскость касается поверхности по прямой образующей, то точки касания называются параболическими.

В случае, если имеются точки поверхности, касательная к которым пересекает поверхность, то такие точки называются гиперболическими.

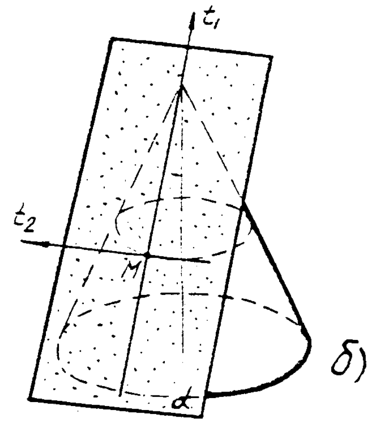
На рисунке 10.3 приведен пример проведения касательной плоскости к сфере в точке **A**. Касательная плоскость проведена с помощью вспомогательных плоскостей α и β, проведенных через точку **A**.

В сечениях сферы вспомогательными плоскостями (горизонтальная и фронтальная плоскости) образуются окружности, проходящие через точку **A**.

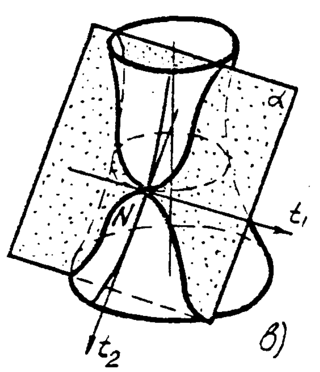
Проводим в точках $\mathbf{A}^{/}$ и $\mathbf{A}^{//}$ две касательные прямые к окружностям и получаем касательную плоскость, заданную двумя пересекающимися прямыми.



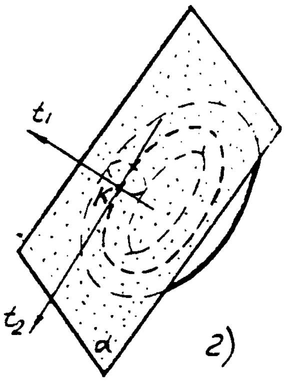
а) Эллиптическая точка касания
Элемент касания-точка



б) Параболическая точка касания
Элемент касания - прямая



в) Гиперболическая точка касания
Элемент касания - кривая линия



г) Частный случай касания по окружности
α - касательная плоскость;
t_1, t_2 - касательные прямые.

Рисунок 10.2 – Примеры касательных плоскостей

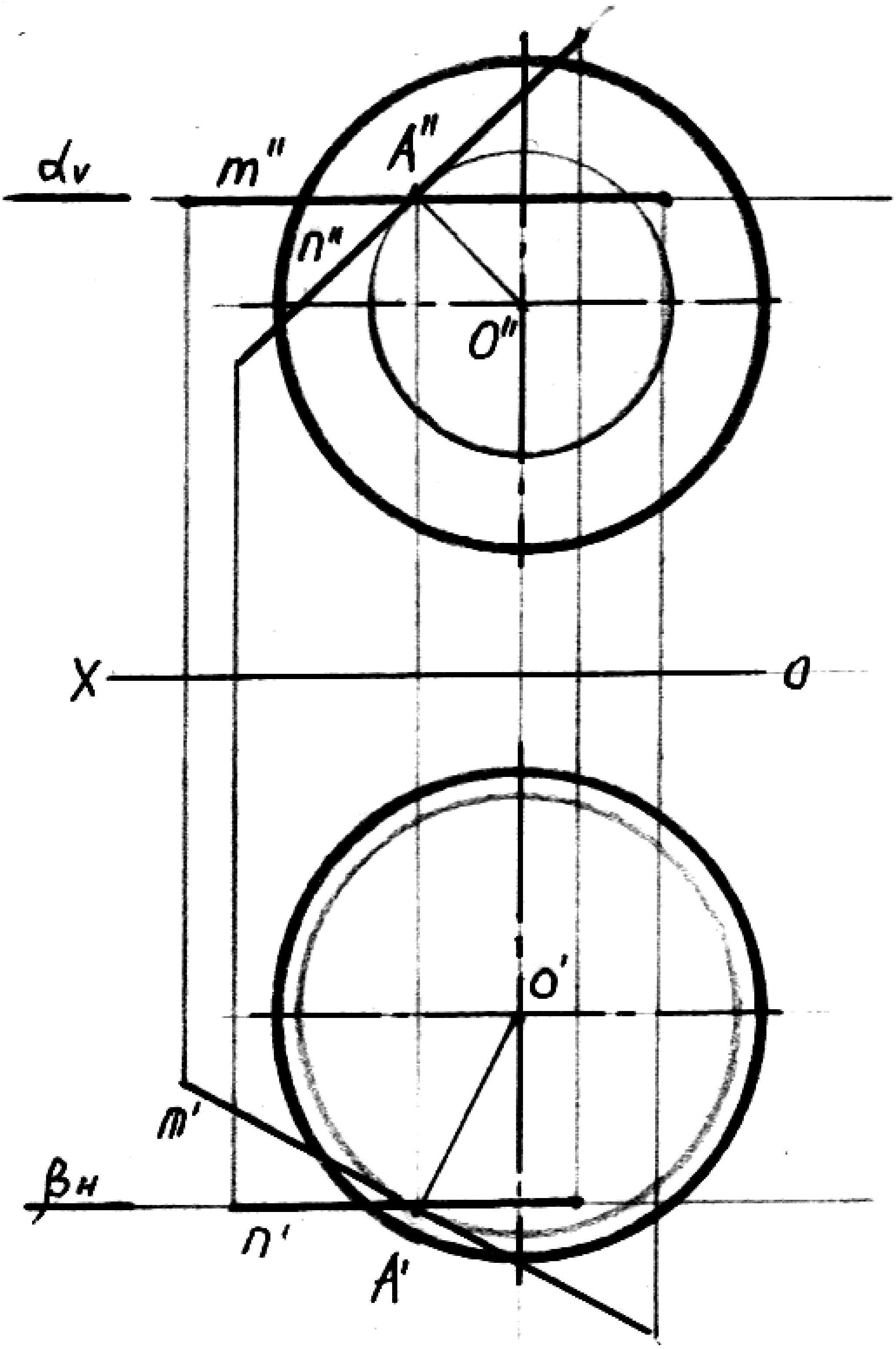


Рисунок 10.3 – Касательная плоскость к сфере

11 АКСОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПРОЕКЦИИ

Аксонометрические изображения обладают большей наглядностью, чем ортогональные проекции, и являются дополнительными к основному проекционному чертежу.

Аксонометрические изображения образуются путем проецирования геометрического объекта вместе с ортогональной системой плоскостей проекций и осей на некую аксонометрическую плоскость, называемую картинной. На рисунке 11.1 изображена схема получения аксонометрических проекций.

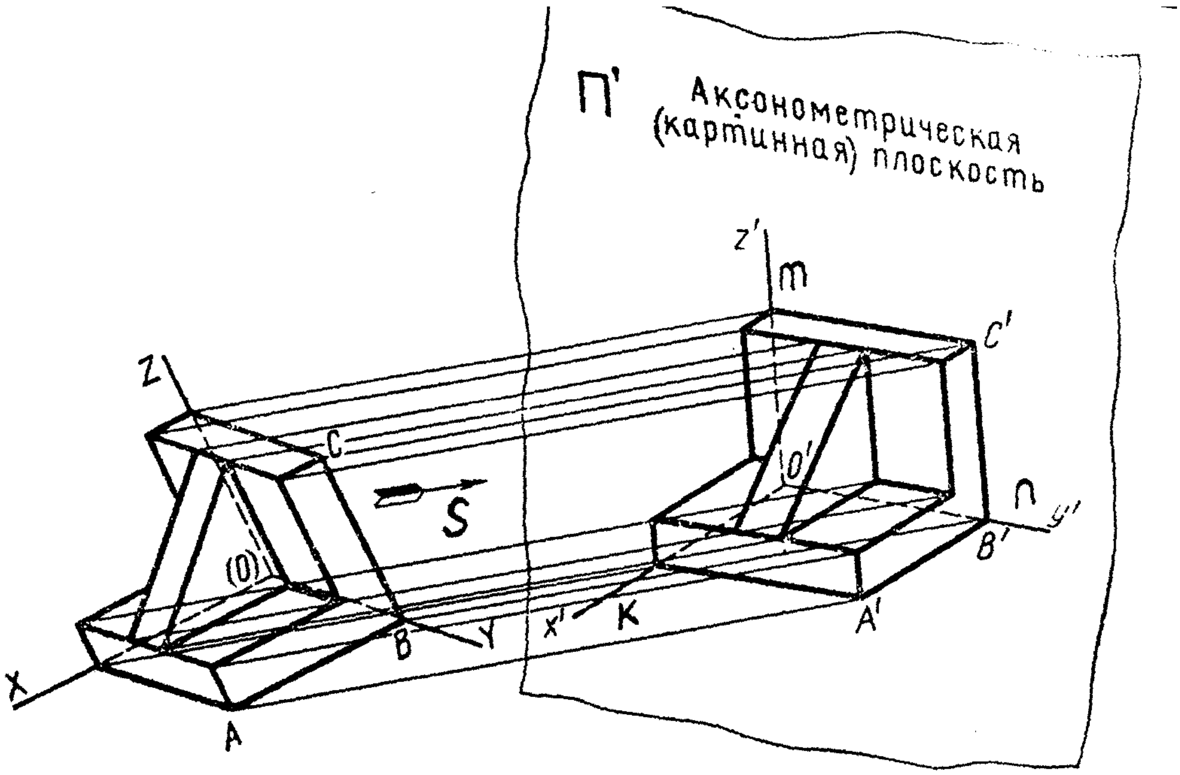


Рисунок 11.1 – Образование аксонометрической проекции

Размеры проецируемого тела на аксонометрической проекции искажаются, что учитывается коэффициентами искажения **k**, **m** и **n**. В зависимости от соотношения коэффициентов аксонометрии делятся на изометрию, диметрию и триметрию.

Аксонометрических изображений может быть получено великое множество. Однако, стандартом (ГОСТ 2.317-69) предусмотрены только пять аксонометрических проекций:

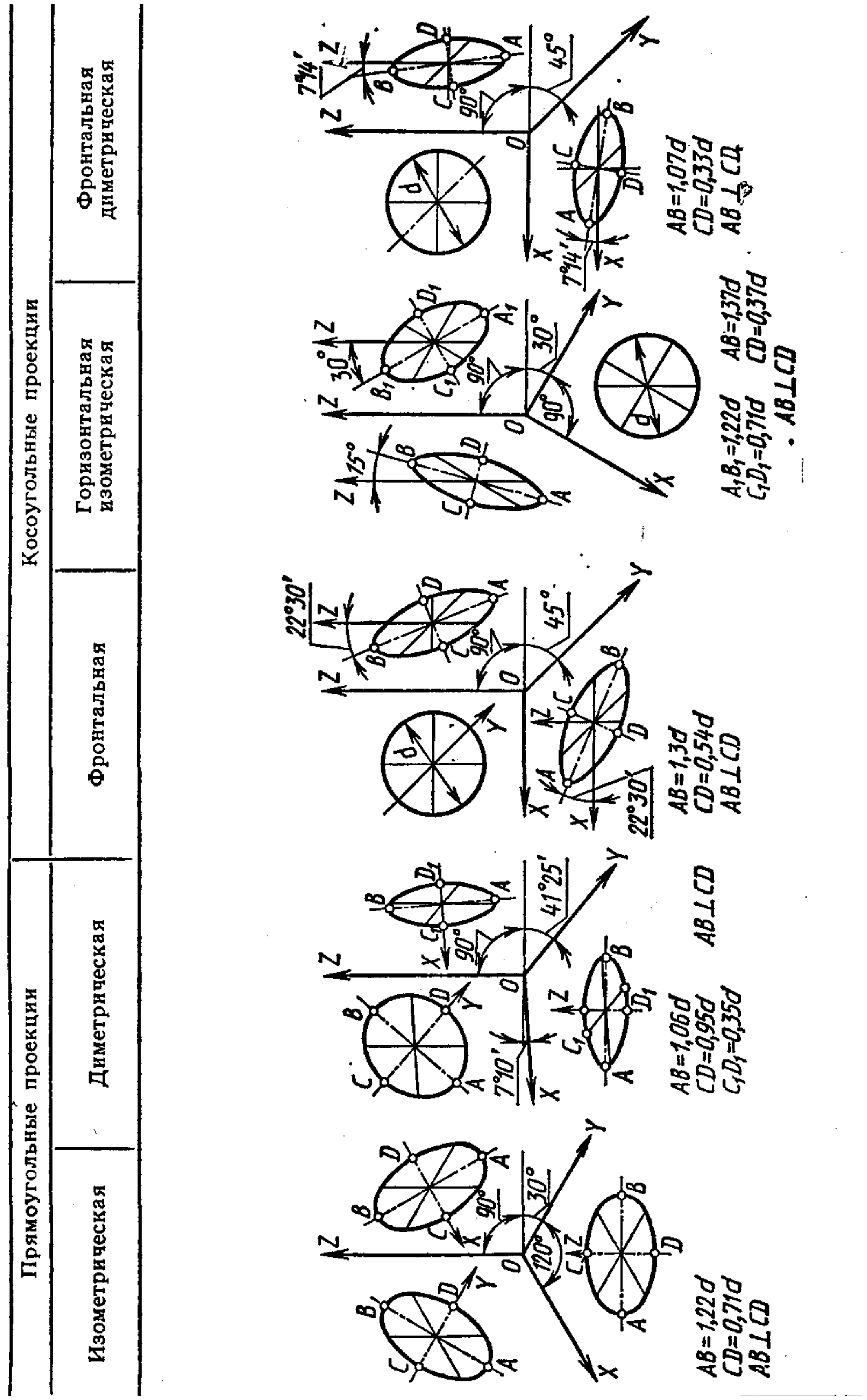


Рисунок 11.2 Виды аксонометрических проекций

1) Прямоугольная изометрия;

2) Прямоугольная диметрия;

3) Косоугольная фронтальная изометрия;

4) Косоугольная фронтальная диметрия;

5) Косоугольная горизонтальная изометрия.

Самое широкое распространение в конструкторской практике получили прямоугольная изометрия, прямоугольная диметрия и косоугольная фронтальная диметрия.

Рассмотрим прямоугольную изометрию. Она строится в аксонометрических осях OX, OY, OZ, располагаемых под углом 120 градусов. Коэффициенты искажения по осям одинаковы и равны 1:1. Это означает, что размеры детали переносятся с проекционного чертежа на аксонометрию без искажения и пересчета.

В диметрических аксонометрических проекциях (прямоугольная диметрия, косоугольная фронтальная диметрия) оси OX, OY, OZ располагаются под различными углами друг к другу. Коэффициенты искажения по осям OX,OZ одинаковы и равны 1:1. Коэффициент искажения по оси OY равен 1:2. Это означает, что размеры детали по оси OY, взятые с проекционного чертежа, необходимо пересчитать, прежде чем переносить на аксонометрию. На рисунке 11.2 показано направление аксонометрических осей в различных видах аксонометрий и вычерчивание окружностей в аксонометрических плоскостях XOZ, XOY, и ZOY.

На рисунке 11.3 показано направление линий штриховки, если на аксонометрической проекции выполнен разрез (чаще всего на аксонометрической проекции выполняют вырез части детали, например, одной четверти).

Прямоугольные проекции		Косоугольные проекции		
Изометрическая	Диметрическая	Фронтальная	Горизонтальная изометрическая	Фронтальная диметрическая

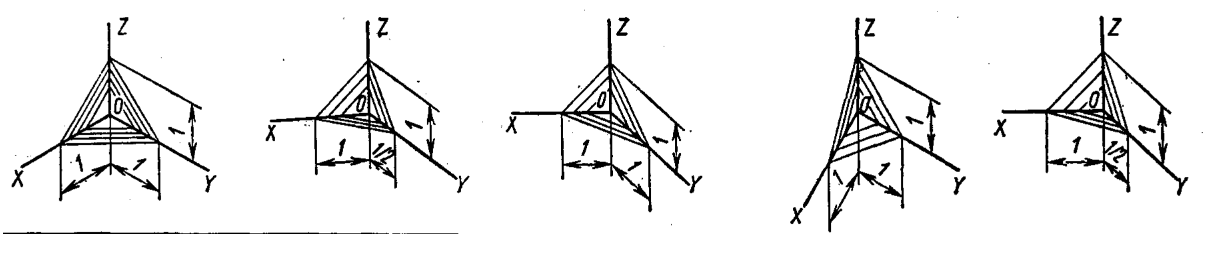


Рисунок 11.3 – Штриховка сечений в аксонометрических проекциях

На рисунке 11.4 приведены примеры различных аксонометрических проекций детали. На рисунке 11.5 приведен пример чертежа узла в прямоугольной изометрии с вырезом одной четверти.

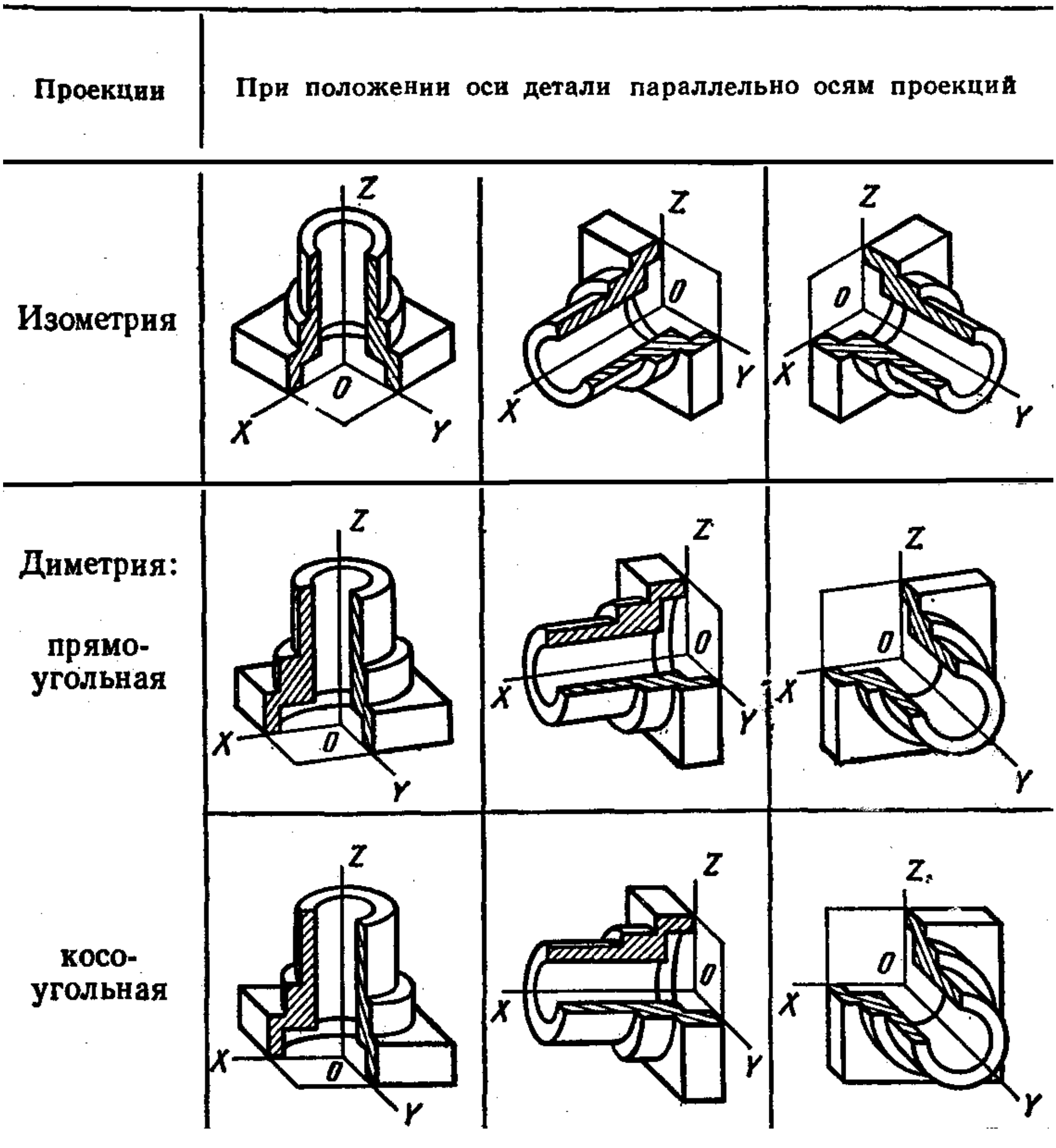


Рисунок 11.4 – Примеры аксонометрических проекций

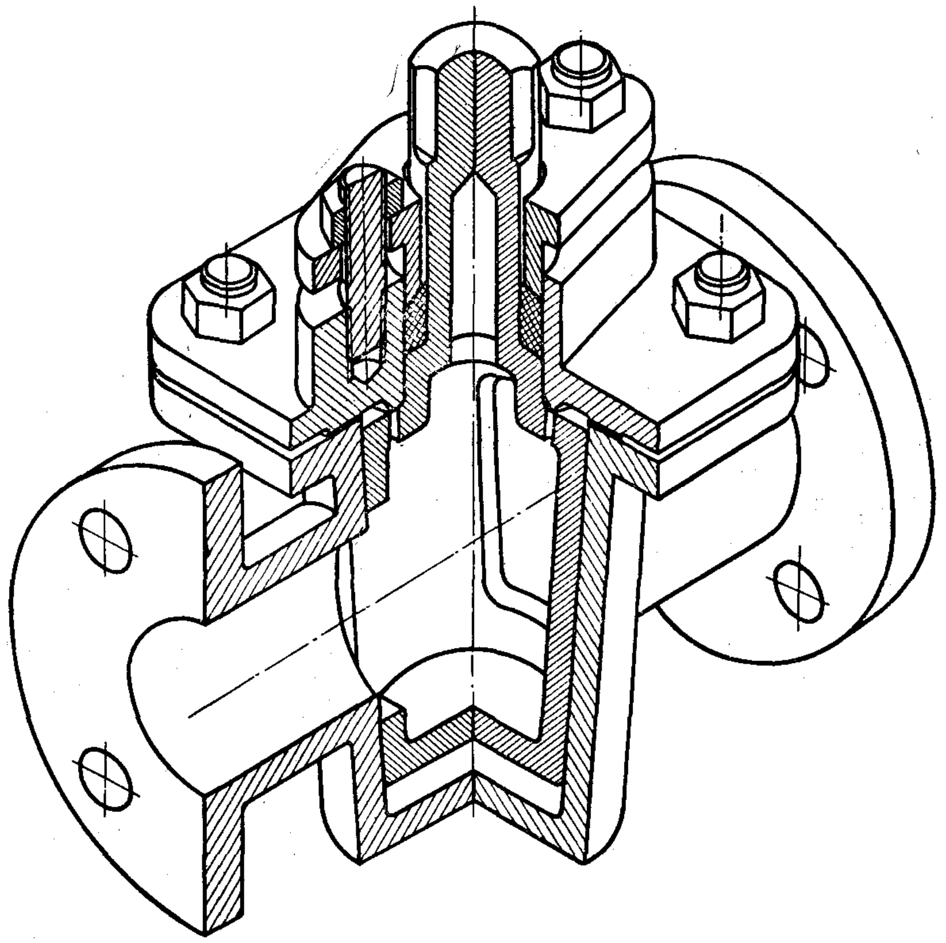


Рисунок 11.5 – Аксонометрическая проекция узла

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящем пособии в кратком доступном изложении даны основные темы курса начертательной геометрии и представлены примеры и задачи, в которых реализованы основные методики решения геометрических задач.

Изложение курса начертательной геометрии подкреплено большим количеством пространственных чертежей, что позволяет лучше освоить излагаемый материал и решать геометрические задачи с полным осознанием хода и смысла проводимых построений. Это обстоятельство поможет студентам в самостоятельной работе над курсом.

В пособии представлены практические примеры использования содержания курса начертательной геометрии в различных отраслях производства. Этим самым показана связь геометрии с жизнью.

При возникновении затруднений при освоении некоторых тем начертательной геометрии по данному пособию необходимо обратиться к учебной литературе, где более полно рассмотрен учебный материал.