

Б.С. Окрепкий, Ф.М. Мигович

ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТІ ДЛЯ СИСТЕМИ ДВОХ КОНТАКТУЮЧИХ ШАРІВ

Побудовано розв'язок осесиметричної температурної задачі для системи двох ізотропних шарів скінченної товщини з урахуванням ідеального теплового контакту.

Одержано формули для визначення температури в будь-якій точці системи двох тіл. Досліджено вплив коефіцієнтів теплообміну із зовнішнім середовищем і теплопровідності на розподіл температурних полів по товщині двох шарів.

Ключові слова: теплопровідність, теплообмін, осесиметрична температурна задача, ізотропні матеріали, шар, ідеальний тепловий контакт.

Рис. 4. Форм. 20. Літ. 5.

Б.С. Окрепкий, Ф.М. Мигович

ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ДЛЯ СИСТЕМЫ ДВУХ КОНТАКТИРУЮЩИХ СЛОЕВ

Построено решение осесиметричной температурной задачи для системы двух изотропных слоев конечной толщины с учетом идеального теплового контакта.

Получены формулы для определения температуры в любой точке системы двух тел. Исследовано влияние коэффициентов теплообмена с внешней средой и теплопроводности на распределение температурных полей по толщине двух слоев.

Ключевые слова: теплопроводность, теплообмен, осесиметричная температурная задача, изотропные материалы, слой, идеальный тепловой контакт.

B.S. Okrepkiy, F.M. Mugovuh

PROBLEM OF THERMAL CONDUCTIVITY FOR TWO CONTACT LAYERS

The solution of the axes-symmetric temperature task for system of two isotropic layers taking into account ideal thermal contact between the bodies was built.

Formulas for determination of the temperature in the arbitrary point of the system bodies have been obtained.

Investigation was made on the influence of the coefficients heat exchange with the outside medium and heat conductivity on distributing of the temperature fields over thickness of two layers.

Keywords: axes-symmetric, temperature, isotropic materials, layer, ideal contact, heat conductivity, heat exchange.

Постановка проблеми. Проблема визначення контактних деформацій і напружень, з урахуванням температурних полів, є важливою задачею для дослідження міцності деталей машин і елементів конструкцій у місцях їхньої взаємодії, при розрахунку конструкцій на пружній основі з метою раціонального використання матеріалу конструкції і несучої здатності основи.

Аналіз остатніх досліджень і публікацій. В праці [1] досліджено вплив температурних факторів на характер контактної взаємодії тіл. Зокрема в роботах [2,3] розв'язані задачі теплопровідності для системи двох контактуючих циліндрів як для ізотропних так і трансверсально ізотропних матеріалів. Проте недостатньо вивченими є задачі теплопровідності для системи двох контактуючих шарів.

Мета роботи. Побудувати розв'язок осесиметричної температурної задачі для системи двох контактуючих ізотропних шарів скінченної товщини з урахуванням ідеального теплового контакту. Дослідити вплив коефіцієнтів теплопровідності і теплообміну на розподіл температурного поля в системі тіл.

Постановка задачі. Нехай задано два ізотропні шари скінченної товщини L і L_1 , які знаходяться в ідеальному тепловому контакті. На вільних поверхнях шарів здійснюється теплообмін із зовнішнім середовищем по закону Ньютона. При заданих припущеннях необхідно визначити температурне поле в будь-якій точці системи тіл.

Введемо циліндричну систему координат r, θ, z , центр якої лежить на нижній основі верхнього шару, а вісь OZ спрямована вертикально вгору вздовж осі симетрії. Всі величини, які позначені верхнім індексом «1» відносяться до нижнього шару, без індексів – до верхнього.

Таким чином запропонована задача розв'язується при наступних граничних умовах.

Граничні умови для температури мають вигляд:

$$\frac{\partial T}{\partial z} + H(T - T_c) = 0 \quad (z = L; 0 \leq r \leq \infty); \quad (1)$$

$$\frac{\partial T^1}{\partial z} + H_1(T_c^1 - T^1) = 0 \quad (z = -L_1, \quad 0 \leq r \leq \infty); \quad (2)$$

$$T = T^1 \quad (z = 0; \quad 0 \leq r \leq \infty); \quad (3)$$

$$\lambda_z \frac{\partial T}{\partial z} = \lambda_z^1 \frac{\partial T^1}{\partial z} \quad (z = 0; \quad 0 \leq r \leq \infty); \quad (4)$$

Тут λ_z , λ_z^1 - коефіцієнти теплопровідності; H , H_1 - коефіцієнти теплообміну; T_c , T_c^1 - температура зовнішнього середовища.

Розв'язування крайової задачі для рівняння теплопровідності.

Відомо [4], що в осесиметричному випадку температурне поле для стаціонарного ізотропного тіла визначається із рівняння:

$$\nabla^2 T = 0. \quad (5)$$

Для визначення температурного поля в шарі введемо транс форманту Ганкеля функції $T(r, z)$ нульового порядку:

$$\overline{T(\xi, z)} = \int_0^\infty r T(r, z) J_0(\xi r) dr, \quad (6)$$

за допомогою якої знаходимо вираз для $T(\rho, \zeta)$ через дві довільні функції $\varphi_1(\eta)$ і $\varphi_2(\eta)$ для верхнього шару:

$$T(\rho, \zeta) = \int_0^\infty [\varphi_1(\eta) e^{\eta \zeta} + \varphi_2(\eta) e^{-\eta \zeta}] J_0(\eta \rho) d\eta \quad (7)$$

і через дві довільні функції $\psi_1(\eta)$, $\psi_2(\eta)$ для нижнього шару:

$$T^1(\rho, \zeta) = \int_0^\infty [\psi_1(\eta) e^{\eta \zeta} + \psi_2(\eta) e^{-\eta \zeta}] J_0(\eta \rho) d\eta. \quad (8)$$

Задовільнивши граничні умови (1) – (4) з урахуванням (7), (8), одержимо систему інтегральних рівнянь відносно функцій $\varphi_1(\eta)$, $\varphi_2(\eta)$ і $\psi_1(\eta)$, і $\psi_2(\eta)$:

$$\int_0^\infty [(K + \eta) e^\eta \varphi_1(\eta) + (K - \eta) e^{-\eta} \varphi_2(\eta)] J_0(\eta \rho) d\eta = K T_c, \quad (9)$$

$$\int_0^\infty [(K_1 - \eta) e^{-\eta l_1} \psi_1(\eta) + (K_1 + \eta) e^{\eta l_1} \psi_2(\eta)] J_0(\eta \rho) d\eta = K_1 T_c^1, \quad (10)$$

$$\int_0^\infty [\varphi_1(\eta) + \varphi_2(\eta)] J_0(\eta \rho) d\eta = \int_0^\infty [\psi_1(\eta) + \psi_2(\eta)] J_0(\eta \rho) d\eta, \quad (11)$$

$$\lambda_z \int_0^\infty \eta [\varphi_1(\eta) - \varphi_2(\eta)] J_0(\eta \rho) d\eta = \lambda_z^1 \int_0^\infty \eta [\psi_1(\eta) - \psi_2(\eta)] J_0(\eta \rho) d\eta \quad (0 \leq \rho < \infty), \quad (12)$$

де $K = HL$, $K_1 = H_1 L$, $l_1 = \frac{L_1}{L}$.

Застосувавши формулу обернення інтегрального перетворення Ганкеля [5] до рівнянь (9)-(12), одержимо систему рівнянь відносно функцій $\varphi_i(\eta)$, $\psi_i(\eta)$ ($i = 1, 2$):

$$\begin{aligned} (K + \eta) e^\eta \varphi_1(\eta) + (K - \eta) e^{-\eta} \varphi_2(\eta) &= K T_c \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta(\eta - \Delta), \\ (K_1 - \eta) e^{-\eta l_1} \psi_1(\eta) + (K_1 + \eta) e^{\eta l_1} \psi_2(\eta) &= K_1 T_c \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta(\eta - \Delta), \\ \varphi_1(\eta) + \varphi_2(\eta) &= \psi_1(\eta) + \psi_2(\eta), \\ \lambda_z [\varphi_1(\eta) - \varphi_2(\eta)] &= \lambda_z^1 [\psi_1(\eta) - \psi_2(\eta)], \end{aligned} \quad (13)$$

де $\delta(\alpha - \beta) = \alpha \int_0^\infty \xi J_m(\alpha \xi) J_m(\beta \xi) d\xi$ - дельта-функція Дірака.

Із системи рівнянь (13) одержимо:

$$\varphi_2(\eta) = -\frac{K + \eta}{K - \eta} e^{2\eta} \varphi_1(\eta) + \frac{K T_c}{K - \eta} e^\eta \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta(\eta - \Delta), \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \psi_2(\eta) &= -\frac{K_1 - \eta}{K_1 + \eta} e^{-2\eta l_1} \psi_1(\eta) + \frac{K_1 T_c^1}{K_1 + \eta} e^{-\eta l_1} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta(\eta - \Delta), \\ \frac{e^\eta}{K - \eta} (\eta \operatorname{ch} \eta + K \operatorname{sh} \eta) \varphi_1(\eta) + \frac{e^{-\eta l_1}}{K_1 + \eta} (\eta \operatorname{ch} \eta l_1 + K_1 \operatorname{sh} \eta l_1) \psi_1(\eta) &= \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{K T_c}{K - \eta} e^\eta - \frac{K_1 T_c^1}{K_1 + \eta} e^{-\eta l_1} \right) \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta(\eta - \Delta), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\lambda_z e^\eta}{K - \eta} (\eta \operatorname{sh} \eta + K \operatorname{ch} \eta) \varphi_1(\eta) - \frac{\lambda_z^1}{K_1 + \eta} e^{-\eta l_1} (\eta \operatorname{sh} \eta l_1 + K_1 \operatorname{ch} \eta l_1) \psi_1(\eta) &= \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_z K}{K - \eta} T_c e^\eta - \frac{\lambda_z^1}{K_1 + \eta} K_1 T_c^1 e^{-\eta l_1} \right) \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta(\eta - \Delta). \end{aligned} \quad (16)$$

Розв'язок систем рівнянь (16) матиме вигляд:

$$\varphi_1(\eta) = \frac{\Delta_1(\eta)}{\Delta(\eta)}, \quad \psi_1(\eta) = \frac{\Delta_2(\eta)}{\Delta(\eta)}, \quad (17)$$

де

$$\begin{aligned} \Delta(\eta) &= \frac{4 e^{(1-l_1)\eta} \lambda_z^1}{(K - \eta)(K_1 + \eta)} Q(\eta), \\ Q(\eta) &= (\eta \operatorname{ch} \eta + K \operatorname{sh} \eta) (K_1 \operatorname{ch} \eta l_1 + \eta \operatorname{sh} \eta l_1) + \frac{\lambda_z}{\lambda_z^1} (K_1 \operatorname{sh} \eta l_1 + \eta \operatorname{ch} \eta l_1) (K \operatorname{ch} \eta + \eta \operatorname{sh} \eta), \\ \Delta_1(\eta) &= \frac{2e^{-\eta l_1} \lambda_z^1}{K_1 + \eta} P(\eta), \quad \Delta_2(\eta) = \frac{2e^\eta \lambda_z^1}{K - \eta} \frac{\lambda_z}{\lambda_z^1} P_1(\eta), \\ P(\eta) &= A_1(\eta) (K_1 \operatorname{ch} \eta l_1 + \eta \operatorname{sh} \eta l_1) + A_2(\eta) (\eta \operatorname{ch} \eta l_1 + K_1 \operatorname{sh} \eta l_1), \\ P_1(\eta) &= \frac{\lambda_z}{\lambda_z^1} A_1(\eta) (K \operatorname{ch} \eta + \eta \operatorname{sh} \eta) - A_2(\eta) (K \operatorname{sh} \eta + \eta \operatorname{ch} \eta), \\ A_1(\eta) &= \frac{K_1 (K - \eta) e^{-\eta l_1} T_c^1 - K (K_1 + \eta) e^\eta T_c}{(K_1 + \eta)(K - \eta)} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta(\eta - \Delta), \\ A_2(\eta) &= \frac{\frac{\lambda_z}{\lambda_z^1} K (K_1 + \eta) e^\eta T_c - K_1 (K - \eta) e^{-\eta l_1} T_c^1}{(K_1 + \eta)(K - \eta)} \lim_{\Delta \rightarrow 0} \delta(\eta - \Delta). \end{aligned} \quad (18)$$

Температурне поле в системі тіл, згідно (7), (8), (14), (17), (18) знаходиться за формулами:

а) температура у верхньому шарі:

$$\begin{aligned} T(\rho, \eta) &= T_c + \int_0^\infty \frac{G(\eta, \zeta)}{K - \eta} \frac{\Delta_1(\eta)}{\Delta(\eta)} J_0(\eta \rho) d\eta = \\ &= T_c + \frac{K_1 (T_c - T_c^1)}{(K + 1) K_1 + \frac{\lambda_z}{\lambda_z^1} (1 + K_1 l_1) K} [K(\zeta - 1) - 1] \quad (0 \leq \zeta \leq 1, \quad 0 \leq \rho < \infty), \end{aligned} \quad (19)$$

де $G(\eta, \zeta) = e^\eta [K \operatorname{sh}(\zeta - 1)\eta - \eta \operatorname{ch}(\zeta - 1)\eta]$;

б) температура в нижньому шарі:

$$T^1(\rho, \zeta) = T_c^1 + \int_0^\infty \frac{G_1(\eta, \zeta)}{K_1 + \eta} \frac{\Delta_2(\eta)}{\Delta(\eta)} J_0(\eta \rho) d\eta =$$

$$= T_c + \frac{K \frac{\lambda_z}{\lambda_z^1} (T_c - T_c^1)}{K_1(1+K) + \frac{\lambda_z}{\lambda_z^1} (1+K_1 l_1) K} [K_1(\zeta + l_1) + 1] \quad (-l_1 \leq \zeta \leq 0, \quad 0 \leq \rho < \infty), \quad (20)$$

де $G_1(\eta, \zeta) = e^{-\eta l_1} [K_1 \operatorname{sh}(\zeta + l_1) \eta + \eta \operatorname{ch}(\zeta + l_1) \eta]$.

Зроблено числові підрахунки і побудовано графіки для температур $\frac{T}{T_0}$, $\frac{T^1}{T_0}$ (пунктирною лінією для позначення $\frac{T^1}{T_0}$) при фіксованих значеннях: $T_c = T_0$, $T_c^1 = 0$, $l_1 = \frac{1}{2}$.

На рис. 1 показано розподіл температури по товщині шарів при фіксованих $\frac{\lambda_z}{\lambda_z^1} = 0,5$; $K_1 = \infty$, $K = \infty$.

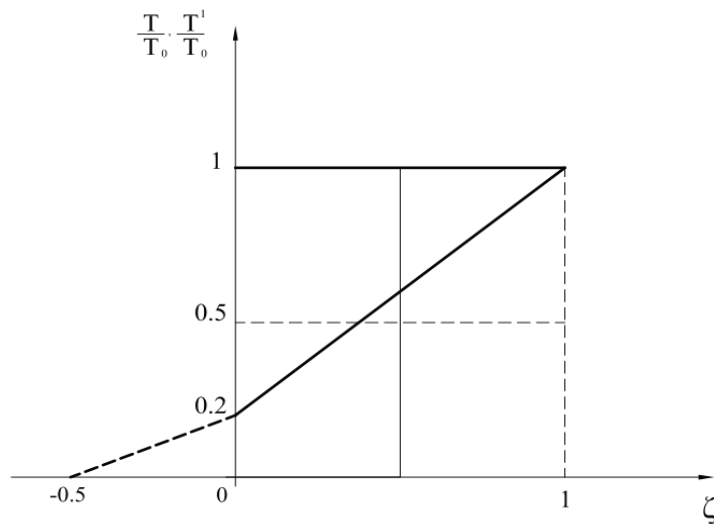


Рис. 1. Розподіл температури по товщині шарів

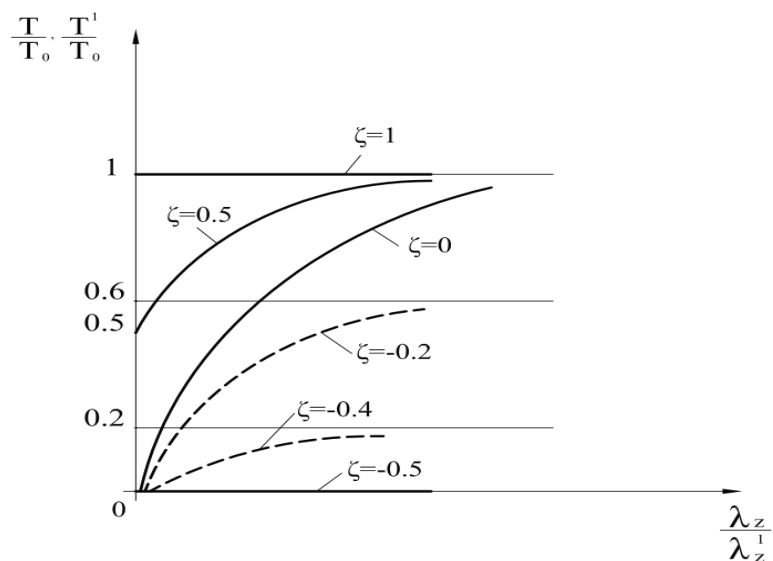


Рис. 2. Розподіл температури по товщині шарів в залежності від параметра $\frac{\lambda_z}{\lambda_z^1}$

На рис. 2 відображає розподіл температури по товщині шарів при фіксованому $K_1 = \infty$, $K = \infty$ в залежності від параметра $\frac{\lambda_z}{\lambda_z^1}$.

На рис. 3 показано розподіл температури по товщині шарів при фіксованих $\frac{\lambda_z}{\lambda_z^1} = 0,5$, $K_1 = \infty$ в залежності від параметра K .

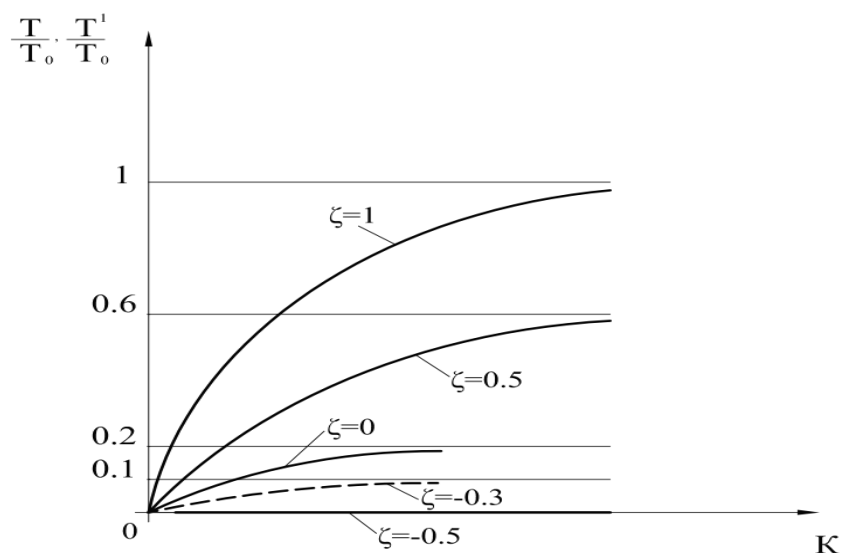


Рис. 3. Розподіл температури по товщині шарів в залежності від параметра K

На рис. 4 відображає розподіл температури по товщині шарів при фіксованому $\frac{\lambda_z}{\lambda_z^1} = 0,5$, $K = \infty$ в залежності від параметра K_1 .

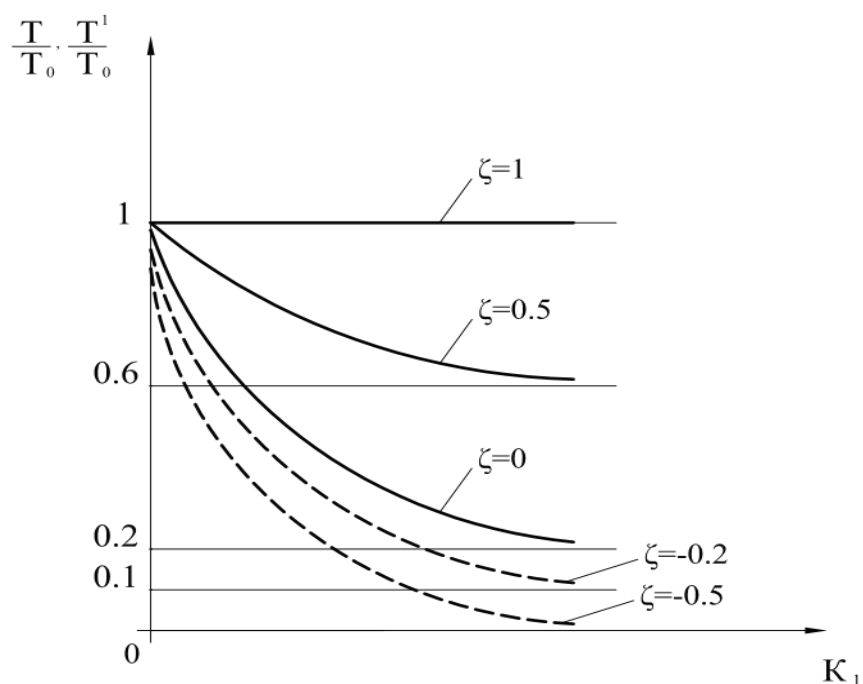


Рис. 4. Розподіл температури по товщині шарів в залежності від параметра K_1

Висновок. Застосовуючи інтегральне перетворення Ганкеля температурна задача зведена до визначення деяких функцій із системи лінійних алгебраїчних рівнянь, через які знаходяться температурні поля в будь-якій точці системи двох тіл.

Результати розрахунків показують, що коефіцієнти теплопровідності і теплообміну значно впливають на розподіл температури в системі двох тіл.

1. Грилицкий Д.В. Осесимметричные контактные задачи теории упругости и термоупругости /Д.В. Грилицкий, Я.М. Кизыма. – Львов: Изд.-во при Львов. ун.те, 1981, – 135 с.
2. Окрепкий Б.С., Новосад І.Я. Осесимметрична температурна задача для системи двох контактуючих циліндрів. // Міжвузівський збірник за напрямом «Інженерна механіка». – ЛНТУ. – Вип. № 28, – Луцьк. – 2010. – С. 367-379.
3. Окрепкий Б.С., Новосад І.Я. Задача теплопровідності для системи двох контактуючих трансверсально-ізотропних циліндричних тіл. // Міжвузівський збірник за напрямом «Інженерна механіка» «Наукові нотатки», ЛНТУ, Вип. №30. Луцьк, 2011. – С. 131-140.
4. Коваленко А.Д. Основы термоупругости / – К.: Наук. думка, 1970, – 304 с.
5. Снеддон И.Н. Преобразование Фурье. – М.: ИЛ., 1956, – 668 с.

Стаття надійшла до редакції 24.02.2014.