Министерство образования и науки, молодёжи и спорта Украины

Государственное учреждение «Луганский национальный университет имени Тараса Шевченко»

С.А. ЦЫГАНКОВА, О.Н. ЛИТВИНОВА

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Часть I

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ АСПЕКТЫ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ

Учебное пособие для студентов экономических

специальностей

Луганск – 2011

УДК: 330.46

Адаменко Е.В. – доктор педагогических наук, профессор, декан факультета допрофессиональной подготовки ЛНУ имени Тараса Шевченко

Матросова Л.Н. – профессор, доктор економических наук, профессор кафедры економической теории и прикладной статистики ЛНУ имени Тараса Шевченко

Цыганкова С.А., Литвинова О.Н.

Экономико-математические методы и модели. Теоретические аспекты экономико-математического моделирования,ч.1 : Учеб. пособие для студентов экономических специальностей \С.А. Цыганкова, О.Н.Литвинова; ГУ «Луганский национальный университет имени Тараса Шевченко». – Луганск: 2011 – 175 с.

Учебное пособие предназначено для изучения современных экономико-математических методов при расчетах в экономике с использованием программного обеспечения фирмы Microsoft - Microsoft Excel. Выбранный программный продукт распространен почти на каждом предприятии и активно используется в практической деятельности.

УДК: 330.46

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ

Цель курса экономико-математические методы и модели в формировании системы знаний по методологии и инструментарию построения и использования разных типов математических моделей для решения экономических задач производства, продажи, транспортировки.

Задание**:** изучение основных принципов и инструментария постановки задач, построение экономико-математических моделей, рассмотрение методов решения детерминированных оптимизационных задач.

Данное учебное пособие является подборкой задач различного типа по экономико-математическому моделированию. Разработчики пособия ни коим образом не претендуют на авторство приведенных задач, а собранный материал является обобщением и систематизацией разработок приведенных в списке литературы.

ТЕМА 1. КОНЦЕПТУАЛЬНЫЕ АСПЕКТЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЭКОНОМИКИ. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ.

Аннотация

Сущность моделирования как метода научного познания. Особенности и принципы математического моделирования. Основные дефиниции экономико-математического моделирования. Особенности экономических наблюдений и измерений. Этапы экономико-математического моделирования.

Общая экономико-математическая модель задачи линейного программирования. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования. Графический метод решения задач линейного программирования.

1.1 Сущность моделирования как метода научного познания

Модель от лат. («modulus» — образец, норма, мера.) — *это объект, который заменяет оригинал и отображает его важнейшие черты и свойства для данного исследования, данной цели исследования по избранной системе гипотез*.

Математическая модель — *это абстракция реальной действительности (мира), в которой отношение между реальными элементами, а именно теми, которые интересуют исследователя, заменены отношениями между математическими категориями. Эти отношения по обыкновению подаются в форме уравнений и/или неравенств, отношениями формальной логики между* *показателями (переменными), которые характеризуют функционирование реальной системы, которая моделируется.*

1.2 Особенности и принципы математического моделирования

Главная особенность моделирования состоит в том, что это метод опосредствованного познания с помощью объектов-заменителей. Именно эта особенность моделирования определяет специфические формы использования абстракций, аналогий, гипотез, других категорий и методов познания.

Сформулируем принципы, которые определяют те общие требования, которым должна удовлетворять правильно построенная математическая модель некоторого объекта (системы).

Принцип 1. Полярность диалектической пары «модель - объект». Эта диалектическая пара всегда полярная, имеет два полюса - «модель» и «объект».

Принцип 2. Первичность объекта. С двух взаимно связанных полюсов диалектической пары «модель - объект» один из них (объект) есть первичным, другой (модель) - производным от него.

Принцип 3. Обусловленность модели объектом. Наличие полюса «модель» предопределяет необходимость наличия полюса «объект».

Принцип 4. Множественность моделей относительно объекта исследования. Как «модель» для объекта, так и «объект» для данной «модели» семантически и интерпретационно многозначные: «объект» описывается не одной, а многими «моделями», «модель» отражает свойства не одного, а многих «объектов».

Принцип 5. Адекватность. Этот принцип предусматривает соответствие модели цели исследования, принятой системе гипотез за уровнем сложности и организации, а также соответствие реальной системе (объекту). Пока не решены вопросы, правильно ли отображает модель исследуемую систему (объект), ценность модели незначительна.

Принцип 6. Простота при условии сохранения существенных (ключевых) свойств объекта (системы). Модель должна быть в некоторых аспектах существенно более простой от прототипа - в этом собственно и заключается смысл моделирования, т.е. модель игнорирует несущественные свойства объекта. Этот принцип может быть назван принципом абстрагирования от второстепенных деталей.

Принцип 7. Блочное построение. При выполнении принципа блочного построения облегчается разработка сложных моделей и появляется возможность использования накопленного опыта и адаптации готовых блоков с минимально необходимыми связями между ними. Выделение блоков происходит с учетом распределения модели по этапам и режимам функционирования объекта (системы).

1.3 Основные дефиниции экономико-математического моделирования

Под экономико-математической моделью понимают концентрированное выражение наиболее существенных экономических взаимосвязей исследуемых объектов (процессов) в виде математических функций, неравенств и уравнений.

Процесс моделирования включает три системообразующих элемента:

- субъект исследования (системный аналитик);
- объект исследования;
- модель, которая опосредует отношения между объектом, который изучается, и субъектом, который познает (системным аналитиком).

1.4 Особенности экономических наблюдений и измерений

В зависимости от моделированных объектов и назначения моделей используемая в них входная информация имеет различный характер и происхождения. Она может быть разделена на две категории: относительно прошлого развития и современного состояния объектов (экономическое наблюдение и обработка); о будущем развитии объектов, которая включает данные об ожидаемых изменениях, внутренних параметрах и внешних условиях (прогнозы). Другая категория информации является результатом самостоятельных исследований, которые также могут проводиться с помощью моделирования.

Методы экономических наблюдений и использование их результатов разрабатываются экономической статистикой. Учитывая это следует определить лишь специфические проблемы экономических наблюдений, которые касаются моделирования экономических процессов. В экономике немало процессов являются массовыми: они характеризуются закономерностями, которые не проявляются на основании лишь одного или нескольких наблюдений. Поэтому моделирование в экономике должны опираться на массовые наблюдения.

1.5 Этапы экономико-математического моделирования

1. Постановка экономической проблемы и разработка концептуальной модели. Главное на этом этапе - четко сформулировать сущность проблемы (цели исследования), предположение, которые принимаются, и те вопросы, на которые необходимо получить ответы. С учетом целей исследования проводится качественный анализ объекта; выделяются, абстрагируясь от второстепенных, важнейшие черты и свойства объекта, который моделируется. Из позиции системного подхода изучаются структура объекта и главные взаимосвязи между его элементами (подсистемами). Избираются и обосновываются основные показатели и система гипотез, которые объясняют поведение и развитие объекта и на основе которых будет происходить дальнейшая формализация.

На этом этапе моделирования широко применяются качественные методы описания систем, знаковые и языковые модели. Такое первичное, приближение изображения системы называют концептуальной моделью.

2. Разработка математических моделей. Это этап формализации экономической проблемы, выражение ее в виде конкретных математических зависимостей и отношений (функций, уравнений, неравенств и т.п.). На этом этапе проводится теоретическое (аналитическое) исследование модели, избираются исследовательский приемы и решения.

Целью теоретического (аналитического) исследования есть выявление общих свойств модели. Важнейший момент - доказательство существования решения для модели. Знание общих свойств модели настолько важно, что часто ради доказательства подобных свойств исследователи сознательно идут на идеализацию первичной модели. В том случае, когда аналитическими методами не удается выяснить общие свойства модели, а простота модели служит причиной недопустимых (неадекватных) результатов, переходят к числовым исследовательский приемов.

3. Реализация модели в виде пакета прикладных программ (ППП) и проведение расчетов. Этот этап включает разработку алгоритмов для числового решение задачи, составление программ на ЭВМ (возможное использование существующих ППП с соответствующей адаптацией) и непосредственное проведение расчетов. Трудности этого этапа обусловленные прежде всего большой размерностью экономических задач, необходимостью обработки значительных массивов информации. Благодаря высокому быстродействию современных ЭВМ удается проводить числовые «модельные» эксперименты, изучая «поведение» модели при разных значениях некоторых условий. Исследования, которые проводятся с помощью числовых методов, могут стать существенным дополнением к результатам аналитического исследования. Класс экономических задач, которые можно решать числовыми методами, значительно более широкий, чем класс задач, доступных аналитическому исследованию.

4. Проверка адекватности модели. Требование адекватности есть противоречащим требованию простоты, и это нужно учитывать, проверяя модель на адекватность. Начальный вариант модели предварительно проверяется по таким основными аспектами: все ли существенные параметры включены в модель; содержит ли модель несущественные параметры; правильно ли отображены функциональные связи между параметрами; правильно ли определены ограничения на значение параметров и т.п..

5. Анализ числовых результатов и принятие соответствующих решений. Результаты исследований подаются в виде, удобмном для изучения, и на основе обработки полученных результатов проводится анализ материалов исследования модели. На этом, завершающему, этапе возникает вопрос о правильности и полноте результатов моделирования, о возможности практического применения последних, и, самое главное, о достижении целей исследования.

1.6. Общая экономико-математическая модель задачи линейного программирования

Общая линейная экономико-математическая модель экономических процессов и явлений - так называемая общая задача линейного программирования подается в виде:

$$\max(\min) Z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \qquad (1)$$

при условиях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \{\le, \ge, =\} b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \{\le, \ge, =\} b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \{\le, \ge, =\} b_m. \end{cases} \qquad (2)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0, \ldots, x_n \ge 0. \quad (3.3)$$

Где нужно найти значение переменных x_1, x_2, …, x_n, которые удовлетворяют условиям (2) и (3), и целевая функция (1) приобретает экстремальный (максимальное или минимальное) значение.

Для общей задачи линейного программирования используются такие понятия.

Вектор $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, координаты которого удовлетворяют системе ограничений (2) и условия неотрицательности переменных (3), называется ***допустимым решением (планом) задачи линейного программирования***.

Допустимый план $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется ***опорным планом*** задачи линейного программирования, если он удовлетворяет не менее, чем m линейно независимых ограничений системы (2) в виде равенств, а также ограничению (3) относительно неотрицательности переменных.

Опорный план $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, называется ***невырожденным***, если он содержит точно m положительных переменных, иначе он ***вырожденный***.

Опорный план $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, при котором целевая функция (1) достигает максимального (минимального ли) значение, называется ***оптимальным решением (планом) задачи линейного программирования***.

Задачу (1)—(3) можно легко свести к канонической форме, т.е. к такому виду, когда в системе ограничений (2) все b_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) неотрицательные, а все ограничения являются равенствами.

Если какое-то b_i отрицательное, то, умножив i-*тое* ограничение на (– 1), получим в правой части соответствующее положительное значение. Когда *i-тое* ограничение имеет вид неравенства $a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n \le b_i$, то последнюю всегда можно свести к равенству, введя ***дополнительную переменную*** x_{n+1}:

$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n+x_{n+1}=b_i$...

Аналогично ограничение вида $a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n \ge b_k$ сводят к равенству, вычитая из левой части ***дополнительную*** переменную x_{n+2}, т.е.:

$a_{k1}x_1 + a_{k2}x_2 + \ldots + a_{kn}x_n - x_{n+2} = b_k$ ($x_{n+1} \geq 0$, $x_{n+2} \geq 0$).

7. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования

Рассмотрим на плоскости x_1Ox_2 совместную систему линейных неравенств:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \leq b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \leq b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 \leq b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0.$$

Каждое неравенство этой системы геометрически определяет полуплоскость с предельной прямой $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 = b_i$ (i=1,2, ..., m). Условия неотрицательности переменных определяют полуплоскости с предельными прямыми $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$. Система совместная, поэтому полуплоскости как выпуклые множества, пересекаясь, образуют общую часть, которая является выпуклым множеством и представляет собой совокупность точек, координаты каждой из которых является решением данной системы (рис.1.1).

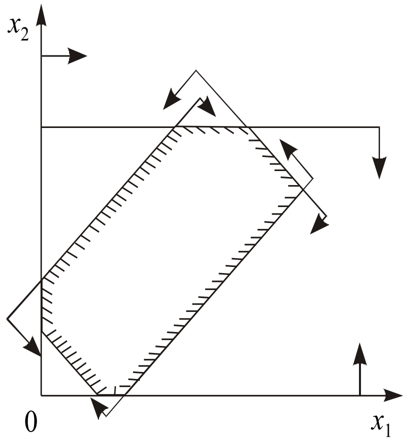


Рисунок 1.1

Совокупность этих точек (решений) называют ***многоугольником решений***, или ***областью допустимых планов (решений) задачи линейного программирования***. Это может быть точка (единое решение), отрезок, луч, многоугольник, неограниченная многоугольная область.

Если в системе ограничений (1) будет три переменных, то каждая неравенство геометрически будет определять полупространство трехмерного просторнства, предельными плоскостями которого будут $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 = b_i$ (i = 1, 2, ..., m), а условия неотрицательности – полупространства с предельными плоскостями x_j=0 (j = 1, 2, 3), где *и* – номер ограничения, а j—– номер переменной. Если система ограничений совместная, то эти полупространства как выпуклые множества, пересекаясь, образуют в трехмерном пространстве общую часть, которая называется ***многогранником решений***. Он может быть точкой, отрезком, лучом, многоугольником, многогранником, многогранной неограниченной областью.

Пусть в системе ограничений (1) количество переменных больше, чем три: x_1, x_2,…x_n; тогда каждая неравенство определяет полупространство n-*мерного* пространства с предельной гиперплоскостью $a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + a_{i3}x_3 + \ldots + a_{in}x_n = b_i$ (i = 1, 2, ..., m). Каждому ограничению вида (1) отвечают гиперплоскость и полупространство, которое лежит с одного стороны этой гиперплоскости, а условия неотрицательности — полупространства с предельными гиперплоскостями $x_j = 0$ (j=1, 2, 3, ..., n).

Если система ограничений совместная, то по аналогии с трехмерным пространством она образует общую часть в n-*мерном* пространстве — выпуклый многогранник допустимых решений.

Итак, геометрически задача линейного программирования представляет собой отыскание координат такой точки многогранника решений, при подстановке которых в целевую линейную функцию последняя достигает максимального (минимального) значения, причем допустимыми решениями являются все точки многогранника решений.

Целевую функцию

$$\begin{cases} -x_2 + 5 = 0, \\ -x_1 - 1/2\,x_2 + 6 = 0. \end{cases}$$

в *n-мерном* пространстве основных переменных можно геометрически интерпретировать как семью параллельных гиперплоскостей, положение каждой из которых определяется значением параметра Z.

Рассмотрим геометрическую интерпретацию задачи линейного программирования на примере. Пусть фермер принял решение выращивать озимую пшеницу и сахарнаю свеклу на площади 20 га, отведя под сахарную свеклу не меньше, чем 5 га. Технико-экономические показатели выращивания этих культур указаны в табл.1.1:

Таблица 1.1 - Показатели выращивания сельскохозяйственных культур

Показатель (из расчета на 1 га)	**Озимая пшеница**	**Са харная свекла**	**Им еющийся ресурс**
Затраты работы, человеко-дней	5	25	270
Затраты работы механизаторов, человеко-дней	2	8	80
Урожайность, тонн	3,5	40	—
Прибыль, тыс. грн	0,7	1	—

Критерием оптимальности является максимизация прибыли.

Запишем экономико-математическую модель структуры производства озимой пшеницы и сахарной свеклы, введя такие обозначения:

x_1 — искомая площадь посева озимой пшеницы, га;

x_2 — искомая площадь посева сахарной свеклы, га.

Задача линейного программирования имеет такой вид:

$$\max Z = 0{,}7x_1 + x_2 \quad (1.8)$$

при условиях:

$$x_1 + x_2 \le 20; \quad (1.9)$$

$$5x_1 + 25x_2 \le 270; \quad (1.10)$$

$$2x_1 + 8x_2 \le 80; \quad (1.11)$$

$$x_2 \ge 5; \quad (1.12)$$

$$x_1 \ge 0,\ x_2 \ge 0. \quad (1.13)$$

Геометрическая интерпретация задачи изображена на рис.1.2.

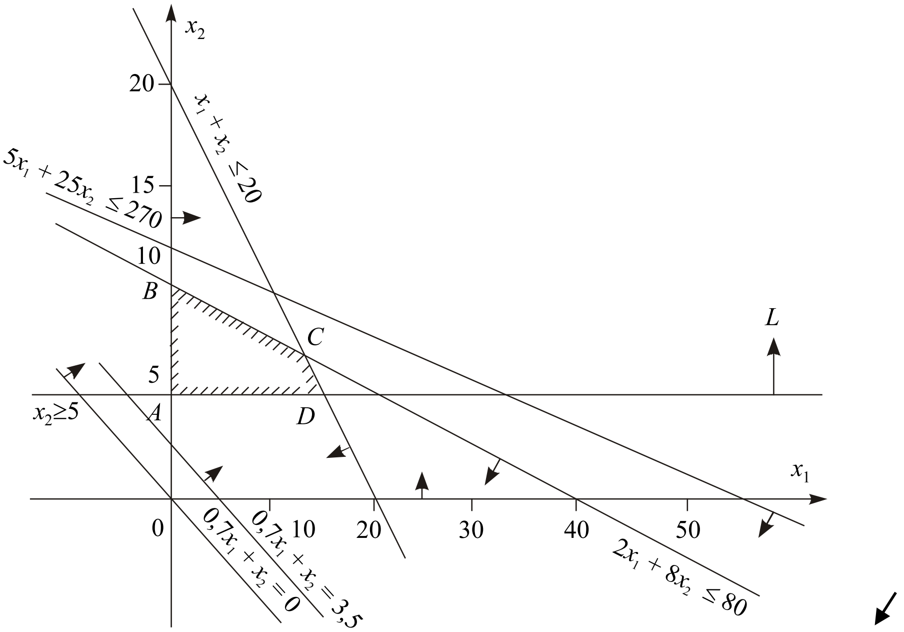


Рисунок 1.2 Область допустимых решений задачи

Область допустимых решений этой задачи получаем так. Каждое ограничение, например $x_1 + x_2 \le 20$, задает полуплоскость с предельной прямой $x_1 + x_2 = 20$. Строим ее и определяем полуплоскость, которая описывается неравенством $x_1 + x_2 \le 20$. С этой целью в неравенство $x_1+x_2 \le 20$ подставляем координаты характерной точки, скажем, $x_1=0$ и $x_2=0$. Убеждаемся, что эта точка принадлежит полуплоскости $x_1+x_2 \le 20$. Этот факт на рис.1.2 иллюстрируем соответствующей направленной стрелкой. Аналогично строим полуплоскости, которые отвечают неравенствам (1.10)—(1.13). В результате сечения этих полуплоскостей образуется область допустимых решений задачи (на рис.1.2 – четырехугольник *ABCD*). Целевая функция $Z = 0{,}7x_1 + x_2$ представляет собой семью параллельных прямых, каждая из которых отвечает определенному значению Z. В частности, если $Z=0$, то имеем $0{,}7x_1 + x_2 = 0$. Эта прямая проходит через начало системы координат. Когда $Z=3{,}5$, то имеем прямую $0{,}7x_1 + x_2 = 3{,}5$.

Лабораторная работа №1.

Тема: Оптимизационные экономико-математические модели. Построение экономико-математической модели. Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования.

Цель: Приобрести навыки для построения математических моделей экономической ситуации. Научиться интерпретировать математическую модель для конкретной экономической ситуации. Научиться решать задачу линейного программирования графически и с помощью надстройки Microsoft Exsel “Solver” (Поиск решений)

Задание лабораторной работы

1. Ознакомиться с теоретическими положениями.

2. Выполнить решение примера.

3. Решить задачи для самостоятельной работы.

ЗАДАЧА 1 (пример)

Построить на плоскости множество решений (многоугольник) системы линейных ограничений-неравенств и геометрически найти максимальное и минимальное значение линейной функции в этом многоугольнике ($x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$).

$$Z = 50x_1 + 30x_2$$

$$\begin{cases} 30x_1 + 15x_2 \leq 2400; \\ 12x_1 + 26x_2 \leq 2160; \\ x_1 - x_2 \leq 30; \\ x_2 \leq 80. \end{cases}$$

$$x_1 \geq 0;\ x_2 \geq 0.$$

Решение

Заданная экономико-математическая модель является моделью задачи линейного программирования, которое содержит лишь две переменные, и потому может быть разрешима графически.

Первый шаг согласно графическому методу заключается в геометрическом изображении допустимых планов задачи, т.е. в определении такой области, где вместе с тем выполняются все ограничения модели. Заменим знаки неравенств на знаки строгих равенств и построим графики соответствующих прямых (рис.1.1.).

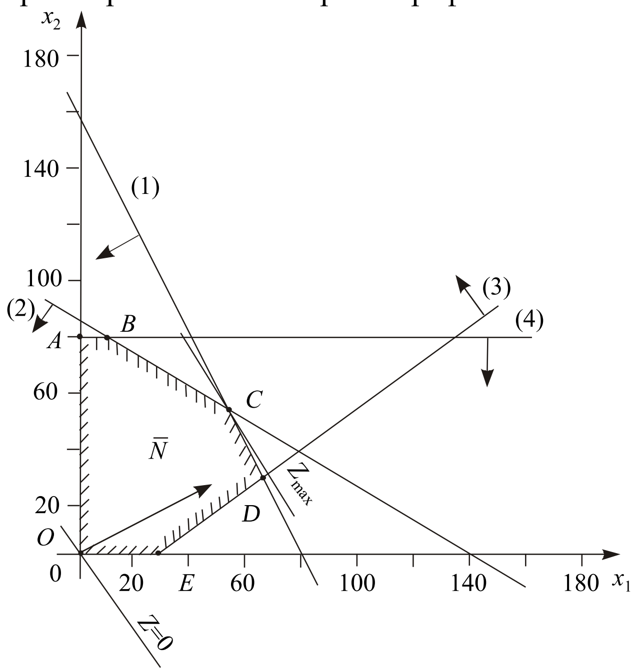


Рисунок 1.1

Каждая из построенных прямых разделяет плоскость системы координат на две полуплоскости. Координаты точек одной из полуплоскостей удовлетворяют рассматриваему неравенству, а другой - нет. Чтобы определить необходимую полуплоскость (на рис.1.1 ее направление обозначено стрелкой), нужно взять любую точку и проверить, удовлетворяют ли ее координаты указанному ограничению. Если удовлетворяют, то полуплоскость, в которой содержится выбранная точка, является геометрическим изображением неравенства. Иначе, таким изображением является другая полуплоскость.

Условие неотрицательности переменных $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ ограничивает область допустимых планов задачи первым квадрантом системы координат. Пересечение всех полуплоскостей определяет область допустимых планов задачи — шестиугольник *OABCDE*. Координаты любой его точки удовлетворяют системе ограничений задачи и условию неотрицательности переменных. Поэтому поставленнуя задача будет разрешима, если мы сможем отыскать такую точку многоугольника *OABCDE*, в которой целевая функция *Z* набирает максимальное и минимальное значения.

Для этого построим вектор $\vec{N} = (c_1;\ c_2)$, координатами которого являются коэффициенты при переменных в целевой функции задачи. Вектор $\vec{N}$ всегда исходит из начала координат и направлен к точке с координатами ($x_1 = c_1$; $x_2 = c_2$). В нашей задаче вектор $\vec{N} = (50;\ 30)$. Он задает направление увеличения значений целевой функции Z, а вектор, противоположный ему, — направление их уменьшения.

Построим линию, которая отвечает, например, значению Z=0. Это будет прямая $50x_1 + 30x_2 = 0$, которая перпендикулярна к вектору $\vec{N}$ и проходит через начало координат. Поскольку в данном примере необходимо определить наибольшее значение целевой функции, то будем передвигать прямую $50x_1 + 30x_2 = 0$ параллельно самой себе согласно направлению вектора $\vec{N}$ до тех пор, пока не определим вершину многоугольника, которая соответствует оптимальному плану задачи.

На рис.1.1 видно, что последней общей точкой прямой целевой функции и многоугольника *OABCDE* есть точка *C*. Координаты этой точки являются оптимальным планом задачи.

Координаты точки *C* являеются решением системы уравнений

$$\max\ Z = 50x_1 + 30x_2 \qquad (1.1)$$

$$\begin{cases} 30x_1 + 15x_2 = 2400; \\ 12x_1 + 26x_2 = 2160, \end{cases} \qquad (1.2)$$

отсюда имеем: $x_1 = 50$; $x_2 = 60$.

Итак, $\max Z = 50 \cdot 50 + 30 \cdot 60 = 4300$.

Исходя из аналогичных соображений, находим, что $\min Z = 50 \cdot 0 + 30 \cdot 0 = 0$, $x_1 = 0$; $x_2 = 0$.

Постановка задачи и решение проблемы с помощью надстройки "Поиск решения"

Надстройка "Поиск решения" является частью набора команд, которые иногда называют средствами анализа "что-если" (Анализ «что-если». Процесс изменения значений ячеек и анализа влияния этих изменений на результат вычисления формул на листе, например изменение процентной ставки, используемой в таблице амортизации для определения сумм платежей.). С помощью этой надстройки можно найти оптимальное значение (максимум или минимум) формулы (Формула. Совокупность значений, ссылок на другие ячейки, именованных объектов, функций и операторов, позволяющая получить новое значение. Формула всегда начинается со знака равенства (=).), содержащейся в одной ячейке, называемой целевой, с учетом ограничений на значения в других ячейках с формулами на листе. Надстройка "Поиск решения" работает с группой ячеек, называемых ячейками переменных решения или просто ячейками переменных, которые используются при расчете формул в целевых ячейках и ячейках ограничения. Надстройка "Поиск решения" изменяет значения в ячейках переменных решения согласно пределам ячеек ограничения и выводит результат в целевой ячейке.

Примечание В более ранних версиях надстройки "Поиск решения" ячейки переменных решения назывались изменяемыми или регулируемыми.

Загрузка надстройки "Поиск решения"

"Поиск решения"(Solver) — это надстройка (Надстройка. Вспомогательная программа, служащая для добавления в Microsoft Office специальных команд или возможностей.) Microsoft Excel, которая становится доступной при установке Microsoft Office или Microsoft Excel. Однако чтобы использовать эту надстройку в Excel, необходимо сначала загрузить ее в 2010 версии Microsoft Excel надо:

1.Откройте вкладку Файл и выберите пункт Параметры.

2.Выберите команду Надстройки, а затем в поле Управление выберите пункт Надстройки Excel.

3.Нажмите кнопку Перейти.

4.В окне Доступные надстройки установите флажок Поиск решения и нажмите кнопку ОК.

1.**Совет**. Если надстройка Поиск решения отсутствует в списке поля Доступные надстройки нажмите кнопку Обзор, чтобы найти ее.

2.Если появится сообщение о том, что надстройка "Поиск решения" не установлена на компьютере, нажмите кнопку Да, чтобы установить ее.

3.После загрузки надстройки "Поиск решения" в группе Анализ на вкладки Данные становится доступна команда Поиск решения.

Решение типового примера.

Проверим правильность решения рассмотренной задачи с помощью MS Excel (см.рис.1.2-1.8).

Сначала введем математическую модель на лист MS Excel.

	A	B	C	D	E	F
1		*Змінні*				
2	*І'мя*	x1	x2			
3	**Значення**	0	0	**Цільова функція**		
4	**Нижнє обмеження**	0	0			
5				**Значення**		
6	**Коефіцієнти ЦФ**	50	30	=СУММПРОИЗВ($B$3:$C$3;B6:C6)		
7						
8				**Обмеження**		
9	**Вид**			**Ліва частина**		**Прав. Частина**
10	**Обмеження1**	30	15	=СУММПРОИЗВ($B$3:$C$3;B10:C10)	<=	2400
11	**Обмеження2**	12	26	=СУММПРОИЗВ($B$3:$C$3;B11:C11)	<=	2160
12	**Обмеження3**	1	-1	=СУММПРОИЗВ($B$3:$C$3;B12:C12)	<=	30
13	**Обмеження4**	0	1	=СУММПРОИЗВ($B$3:$C$3;B13:C13)	<=	80

Рисунок 1.2

В результате должно быть получено следующее.

	A	B	C	D	E	F	G
1		*Змінні*					
2	*І'мя*	x1	x2				
3	**Значення**	0	0	**Цільова функція**			
4	**Нижнє обмеження**	0	0				
5				**Значення**			
6	**Коефіцієнти ЦФ**	50	30	0			
7							
8				**Обмеження**			
9	**Вид**			**Ліва частина**		**Прав. Частина**	
10	**Обмеження1**	30	15	0	<=	2400	
11	**Обмеження2**	12	26	0	<=	2160	
12	**Обмеження3**	1	-1	0	<=	30	
13	**Обмеження4**	0	1	0	<=	80	

Рисунок 1.3

Во вкладке Данные (для MS Excel 2007, 2010) панели Анализ выбираем надстройку «Поиск решений» (Solver). В окно диалога вводим следующие данные.

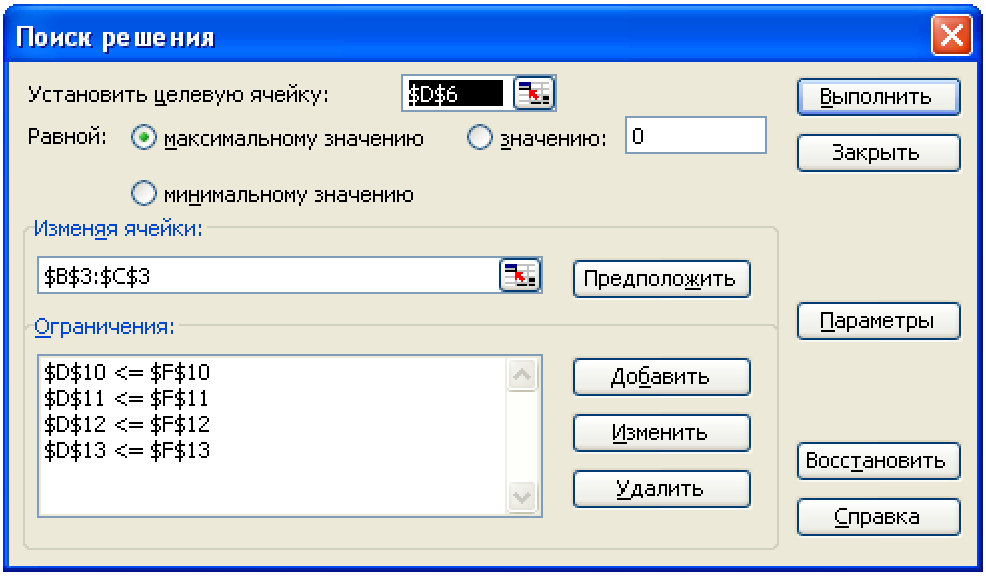


Рисунок 1.4

Используя кнопку «Параметры» устанавливаем следующие параметры для решения:

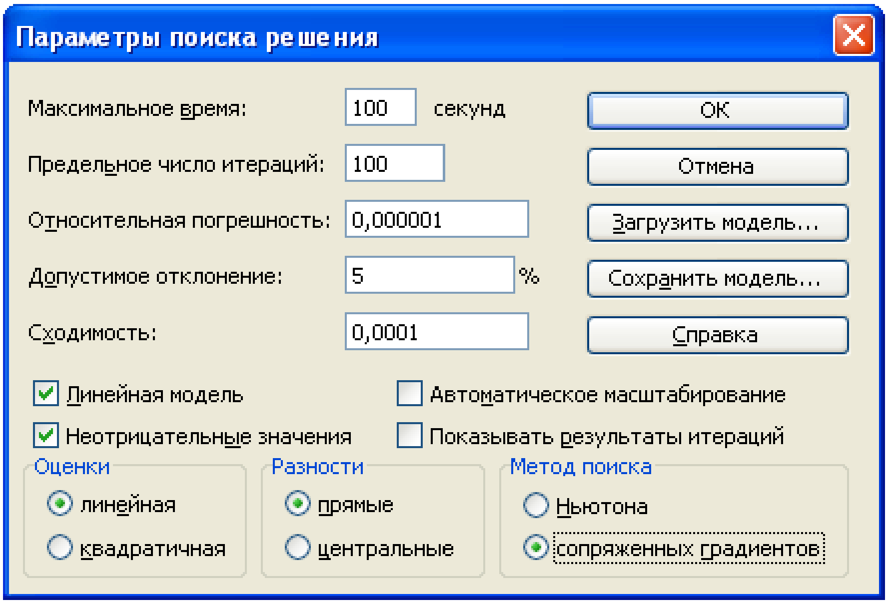


Рисунок 1.5

Если решение выполнялось правильно, то получаем:

	A	B	C	D	E	F
1				**Преременные**		
2	**Имя**	**X1**	**X2**			
3	**Значение**	50	60	**ЦФ**		
4	**Нижн.гр.**	0	0			
5				**Значение**	**Направление**	
6	**Коэф. Цф**	50	30	4300	**max**	
7						
8				**Ограничения**		
9	**Вид**			**Лев. часть**	**Знак**	**Прав.часть**
10	**Огран.1**	30	15	2400	<=	2400
11	**Огран.2**	12	26	2160	<=	2160
12	**Огран.3**	1	-1	-10	<=	30
13	**Огран.4**	0	1	60	<=	80

Рисунок 1.6

Выполняя «Поиск решений» для минимального значения целевой функции получаем решение:

	A	B	C	D	E	F
1				**Преременные**		
2	**Имя**	**X1**	**X2**			
3	**Значение**	0	0	**ЦФ**		
4	**Нижн.гр.**	0	0			
5				**Значение**	**Направление**	
6	**Коэф. Цф**	50	30	0	**min**	
7						
8				**Ограничения**		
9	**Вид**			**Лев. часть**	**Знак**	**Прав.часть**
10	**Огран.1**	30	15	0	<=	2400
11	**Огран.2**	12	26	0	<=	2160
12	**Огран.3**	1	-1	0	<=	30
13	**Огран.4**	0	1	0	<=	80

Рисунок 1.7

Для нахождения минимального значения целевой функции в окне Поиск решений вводим следующие настройки.

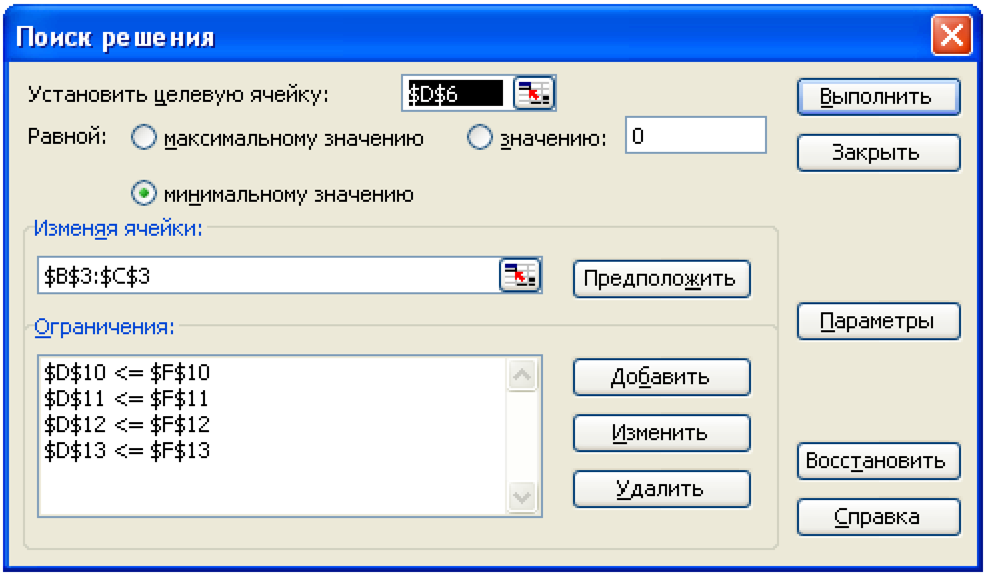


Рисунок 1.8

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Задание. Для приведенных задач экономико-математического моделирования построить математическую модель. Решить задачи графическим методом. Выполнить проверку по помощи встроенного приложения в Excel Solver.

Задача1. Задача оптимального производства

Для изготовления изделий А и В имеем в наличии 100 кг металла. На изготовление изделия А нужно 2 кг металла, а изделия В соответственно 4 кг. Составить план производства, который обеспечит получение наибольшей прибыли от продажи изделий, если цена изделия А - 3 у.е., а изделия В - 2 у.е. Известно, что изделия А нужно изготовить не более чем 40, а изделия В - не более чем 20.

***Задача 2.* Задача об оптимальном ассортименте**

Предприятие изготовляет 2 вида продукции. Цена единицы продукции 1-го вида 25000 грн., продукции 2-го вида – 50 000 грн. Для изготовления продукции используется три вида сырья, запасы которого 37, 57 и 7 у.е. соответственно. Нормы затрат каждого сырья на единицу продукции приведены в следующей таблице.

Продукция		Запасы сырья, в у.ед.
1-й вид продукции, в у.ед.	**2-и вид продукции, в у.ед.**	
1,2	1,9	37
2,3	1,8	57,6
0,1	0,7	7

Нужно найти плановое количество продукции, чтобы после реализации стоимость произведенной продукции была максимальной.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. *Сущность моделирования как метода научного познания.*
2. *Особенности и принципы математического моделирования.*
3. *Основные дефиниции экономико-математического моделирования.*
4. *Особенности экономических наблюдений и измерений.*
5. *Этапы экономико-математического моделирования.*
6. *Общая экономико-математическая модель задачи линейного программирования.*
7. *Геометрическая интерпретация задачи линейного программирования.*
8. *Графический метод решения задач линейного программирования.*
9. *Использование надстройки «Поиск решений» для построения и решения задачи линейного программирования.*

ТРЕБОВАНИЯ К ОТЧЕТУ

1. Записать в тетради условия задач.
2. Построить математическую модель.
3. Решить графическим методом в тетради.
4. Выполнить проверку в Excel
5. Результаты продемонстрировать преподавателю.
6. Ответить на контрольные вопросы.

ТЕМА 2. СИМПЛЕКСНЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Аннотация

Начальный опорный план. Переход от одного опорного плана к другому. Оптимальное решение. Критерий оптимальности плана. Решение задачи линейного программирования симплексным методом. Метод искусственного базиса.

Графический метод для определения оптимального плана задач линейного программирования целесообразно применять лишь для задач с двумя переменными. При большом количестве переменных необходимо применять другой метод. Из свойств решений задачи линейного программирования известно: оптимальное решение задачи должно находиться в одной из угловых точек многогранника допустимых решений. Поэтому простейший способ отыскания оптимального плана нуждается в переборе всех угловых точек (допустимых планов задачи, которые еще называют опорными). Сравнение вершин многогранника можно осуществлять только после отыскания какой-то одной из них, т.е. найдя начальный опорный план. Каждый опорный план определяется системой m линейно независимых векторов, которые содержатся в системе ограничений задачи с n векторов $A_1, A_2, \ldots, A_n$. Итак, общее количество опорных планов определяется количеством комбинаций $C_n^m = \dfrac{n!}{m!(n-m)!}$. Задачи, которые описывают реальные экономические процессы, имеют большую размерность, и простой перебор всех опорных планов таких задач существует очень много, даже при условии применения современных ЭВМ. Поэтому необходимое использование метода, который делал бы возможным сокращение количества вычислений. 1949 года такой метод был предложен американским ученым Дж.Данцигом – так называемый симплексный метод, или симплекс-***метод***.

Идея этого метода заключается в осуществлении направленного перебора допустимых планов таким образом, на каждом шагу осуществляется переход от одного опорного плана к следующему, который по значению целевой функции был бы хотя бы не худшим, чем предыдущий. Значение функционала при переходе изменяется в нужном направлении: увеличивается (для задачи на максимум), уменьшается ли (для задачи на минимум).

Процесс решения задачи симплекс-методом имеет итерационный характер: однотипные вычислительные процедуры (итерации) повторяются в определенной последовательности до тех пор, пока не будет получен оптимальный план задачи или выяснено, что его не существует.

Итак, **симплекс-метод** - это итерационная вычислительная процедура, которая дает возможность, начиная от определенного опорного плана, через конечное количество шагов получить оптимальный план задачи линейного программирования.

2.1 Начальный опорный план

Рассмотрим задачу линейного программирования, записанную в канонической форме:

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases}$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = 1,2,\ldots,n).$$

Не нарушая общности, допустим, что система уравнений содержит первые m единичных векторов. Получим:

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} x_1 \quad + a_{1,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ \quad x_2 + a_{2,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \quad\quad x_m + a_{m,m+1}x_{m+1} + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (2.2)$$

$$x_j \geq 0 \ \ (j = 1,2,\ldots,n). \quad (2.3)$$

Система ограничений (2.2) в векторной форме будет иметь вид:

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_mA_m + x_{m+1}A_{m+1} + \ldots + x_nA_n = A_0, \quad (2.4)$$

где

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ A_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \ A_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$A_{m+1} = \begin{pmatrix} a_{1,m+1} \\ a_{2,m+1} \\ \vdots \\ a_{m,m+1} \end{pmatrix}, \ldots, \ A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}, \ A_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

$A_1, A_2, \ldots, A_m$ – линейно независимые единичные векторы m-*мерного* пространства, которые образуют единичную матрицу и представляют базис этого пространства. Поэтому в уравнении (2.4) базисными переменными будут $x_1, x_2, \ldots, x_m$, а остальные переменные – свободные. Приравняем все свободные переменные к нулю, т.е. $x_{m+1} = 0, x_{m+2} = 0, \ldots, x_n = 0$. Поскольку $b_i \geq 0 \ (i = \overline{1, m})$, а векторы $A_1, A_2, \ldots, A_m$ – единичные, то получим одно из решений системы ограничений (2.2):

$$X_0 = (x_1 = b_1, x_2 = b_2, \ldots, x_m = b_m, x_{m+1} = 0, \ldots, x_n = 0), \quad (2.5)$$

т.е. допустимый план.

Такому плану отвечает уравнение

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_m A_m = A_0, \quad (2.6)$$

где $A_1, A_2, \ldots, A_m$ — линейно независимые векторы и по свойству 3 решений задачи линейного программирования план X_0 является угловой точкой многогранника решений, а значит, может быть начальным опорным планом.

Итак, обобщая рассмотренный процесс, можем сформулировать: построение новых опорных планов состоит в выборе вектора, который нужно ввести в базис, и вектора, который необходимо вывести из базиса. Такая процедура отвечает переходу от одного базиса к другому с помощью метода Жордана-Гаусса.

Необходимо указать, что для случая, когда вектор A_{m+1} подлежит включению в базис, а в его представлении (2.7) все $x_{i,m+1} \leq 0$, то, очевидно, не существует такого значения $\theta > 0$, которое исключало бы один из векторов. В таком случае план X_1 содержит m+1 положительных компонент, т.е., система векторов $A_1, A_2, \ldots, A_m, A_{m+1}$ будет линейно зависимой и не определяет угловую точку многогранника решений. Функционал не может в ней достигать максимального значения. Это означает, что функционал является неограниченным на многограннике решений.

2.2. Оптимальное решение. Критерий оптимальности плана

Симплексный метод делает возможным целенаправленный перебор опорных планов, т.е. переход от одного плана к другому, который является не хуже, чем предыдущий по значению функционала. Итак, проблемой становится выбор вектора, который необходимо вводить в базис при осуществлении итерационной процедуры симплексного метода.

Рассмотрим задачу линейного программирования (2.1)-(2.3).

Допустим, что она имеет опорные планы и они являются невырожденными. Рассмотрим начальный опорный план вида (2.5):

$$X_0 = (x_1 = b_1,\ x_2 = b_2, \ldots, x_m = b_m,\ x_{m+1} = 0, \ldots, x_n = 0).$$

Такому плану отвечает Разложение базисными векторами

$$x_1 A_1 + x_2 A_2 + \ldots + x_m A_m = A_0 \quad (2.10)$$

и значение функционала:

$$F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_m x_m = F(X_0). \quad (2.11)$$

Каждый из векторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$ можно разложить по векторам базиса, причем единственным образом:

$$x_{1j} A_1 + x_{2j} A_2 + \ldots + x_{mj} A_m = A_j \quad (j = \overline{1, n}), \quad (2.12)$$

поэтому такому представлению будет отвечать и единственное значение функционала:

$$F_j = c_1 x_{1j} + c_2 x_{2j} + \ldots + c_m x_{mj} \quad (j = \overline{1, n}). \quad (2.13)$$

Обозначим через c_j коэффициент функционала, который соответствует вектору A_j, и $\Delta_j = F_j - c_j$ (их называют оценками соответствующих векторов плана) $(j = \overline{1, n})$. Тогда справедливым является такое утверждение (***условие оптимальности плана*** задачи линейного программирования): если для некоторого плана X_0 представлению всех векторов $A_j \ (j=\overline{1,n})$ в данном базисе удовлетворяет условие:

$\Delta_j = F_j - c_j \ge 0$,(2.14)

этот план X_0 является оптимальным решением задачи линейного программирования (2.1)-(2.3).

Аналогично формулируется условие оптимальности плана задачи на отыскание минимального значения функционала: если для некоторого плана X_0 Разложение всех векторов $A_j \ (j=\overline{1,n})$ в данном базисе удовлетворяют условию

$\Delta_j = F_j - c_j \le 0$,(2.15)

этот план X_0 является оптимальным решением задачи линейного программирования.

Итак, для того, чтобы план задачи линейного программирования был оптимальным, необходимо и достаточно, чтобы его оценки $\Delta_j = F_j - c_j$ были неотъемлемыми для задачи на максимум и отрицательными для задачи на минимум.

2.3. Решение задачи линейного программирования симплексным методом

Рассмотрим, как, исходя из начального опорного плана задачи линейного программирования, с помощью симплексного метода найти оптимальный план.

Продолжим рассмотрение задачи (2.1)-(2.3), опорный план которой $X_0 = \left(x_1 = b_1,\ x_2 = b_2, \ldots, x_m = b_m,\ x_{m+1} = 0, \ldots, x_n = 0\right)$. Для исследования данного плана на оптимальность (по условию оптимальности плана задачи линейного программирования) необходимо векторы $A_j \ (j=\overline{1,n})$ системы ограничений (2.2) разложить по базисными векторами $A_1, A_2, \ldots, A_m$ и рассчитать значение оценок $\Delta_j = F_j - c_j$.

Все дальнейшие вычисления удобно проводить в ***симплексной таблице*** (табл.2.1).

В столбце «Базис» записанные переменные, которые отвечают базисным векторам, а в столбце «$С_{баз}$» – коэффициенты функционала соответствующих базисных векторов. В столбце «План» – начальный опорный план X_0, в этом же столбце в результате вычислений получают оптимальный план. В столбцах $x_j\,(j=\overline{1,n})$ записанные коэффициенты разложения каждого j-*го* вектора по базисным векторам, которые отвечают в первой симплексной таблице коэффициентам при переменных в системе (4.2). В (*m+1*)-ой строке в столбце «План» записывают значение функционала для начального опорного плана $F(X_0)$, а в других столбцах x_j – значение оценок $\Delta_j = F_j - c_j$. Эта строка симплексной таблицы называют ***оценочной***.

Значения $F(X_0)$ находят подстановкой компонент опорного плана в целевую функцию, а значение $F(X_j)$ – при подстановке коэффициентов разложения каждого j-*го* вектора по векторам базиса, т.е. эти значения в табл.2.1 получают как скалярное произведение:

$$F(X_0) = C_{\text{áàç}} X_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i b_i;$$

$$F_j = F(X_j) = C_{\text{áàç}} X_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}, \;\; j = 1,2,\ldots,n,$$

где *ci* – коэффициенты функционала, которые отвечают векторам базиса.

Таблица 2.1 - Первая симплексная таблица для решения задач линейного программирования

i	Ба-зис	$С_{баз}$	План	c_1	c_2	…	c_l	…	c_m	c_{m+1}	…	c_j	…	c_k	…	c_n	θ_i
				x_1	x_2	…	x_l	…	x_m	x_{m+1}	…	x_j	…	x_k	…	x_n	
1	x_1	c_1	b_1	1	0	…	0	…	0	$a_{1,m+1}$	…	a_{1j}	…	a_{1k}	…	a_{1n}	θ_1
2	x_2	c_2	b_2	0	1	…	0	…	0	$a_{2,m+1}$	…	a_{2j}	…	a_{2k}	…	a_{2n}	θ_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
l	x_l	c_l	b_l	0	0	…	1	…	0	$a_{l,m+1}$	…	a_{lj}	…	a_{lk}	…	a_{ln}	θ_l
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	x_m	c_m	b_m	0	0	…	0	…	1	$a_{m,m+1}$	…	a_{mj}	…	a_{mk}	…	a_{mn}	θ_m
$m+1$	$F_j - c_j \geq 0$		$F(X_0)$	0	0	…	0	…	0	Δ_{m+1}	…	Δ_j	…	Δ_k	…	Δ_n	

После заполнения табл.2.1 рассчитывают значение оценок плана (последняя строка): $\Delta_j = F_j - c_j = F(X_j) - c_j = \left(\sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}\right) - c_j, \quad j = 1,2,\dots,n$. Потом согласно условию оптимальности плана задачи линейного программирования, если все $\Delta_j = F_j - c_j \ge 0$ (для задачи на максимум), то план является оптимальным. Допустим, что одна из оценок $\Delta_j = F_j - c_j < 0$, тогда план X_0 не является оптимальным и необходимо осуществить переход к следующему опорному плану, которому будет соответствовать большему значению функционала. Если отрицательных оценок несколько, то включению в базис подлежит вектор, который выбирается как $\min(F_j - c_j)$. Минимум находят для тех индексов *j*, где $\Delta_j = F_j - c_j < 0$. Если существует несколько одинаковых значений оценок, которые отвечают $\min(F_j - c_j)$, то из соответствующих им векторов к базису включают тот, которому отвечает максимальное значение функционала.

Если хотя бы для одной отрицательной оценки $\Delta_j = F_j - c_j < 0$ все коэффициенты разложения a_{ij} соответствующего вектора отрицательные, то это означает, что функционал является неограниченным на многограннике решений, т.е. многогранник в данном виде представляет собой неограниченную область и решением задачи есть $X = \infty$.

Пусть $\min(F_j - c_j) = F_k - c_k = \Delta_k$, т.е. минимальное значение достигается для k-*го* вектора $m \le k \le n$. Тогда к базису включается вектор A_k. Соответствующий столбик симплексной таблицы называют ***направляющим***.

Для того, чтобы выбрать вектор, который необходимо вывести из базиса (согласно процедуре перехода от одного опорного плана задачи к другому – п.4.2), рассчитывают последний столбик табл.2.1 – значение θ_i.

$$\theta_i = \frac{b_i}{a_{ik}}, \; i = 1,2,\dots,m, \; a_{ik} > 0.$$

Из рассчитанных значений необходимо выбрать меньше всего $\theta^* = \min \theta_i$, $i = 1,2,...,m$, $a_{ik} > 0$. Тогда из базиса исключают *i-ий* вектор, которому отвечает θ^*.

Допустим, что $\theta^* = \min \quad \theta_l = \dfrac{b_l}{a_{lk}}$ отвечает вектору, который находится в l-*му* строке табл.2.1. Соответствующая строка симплексной таблицы называют ***направляющим***.

Пересечением направляющего столбика и направляющей строки определяется элемент симплексной таблицы a_{lk}, который называют ***разрешающим элементом***. С помощью элемента a_{lk} и метода Жордана-Гаусса рассчитывают новую симплексную таблицу, которая будет определять следующий опорный план задачи.

Для определения нового опорного плана необходимо все векторы разложить по векторам нового базиса. Вектор A_k, который необходимо вводить в базис, в представлении по начальныму базису имеет вид:

$$A_k = a_{1k} A_1 + ... + a_{lk} A_l + ... + a_{mk} A_m .$$

Вектор A_l выходит из базиса, и его Разложение по новому базису получим из выражения (2.16):

$$A_l = \frac{1}{a_{lk}} \left(A_k - a_{1k} A_1 - ... - a_{mk} A_m \right). \quad (2.17)$$

Разложение вектора A_0 по начальному базису имеет вид:

$$A_0 = b_1 A_1 + ... + b_l A_l + ... + b_m A_m . \quad (2.18)$$

Для записи разложения вектора в новом базисе подставим выражение (2.17) в уравнение (2.18), имеем:

$$A_0 = b_1 A_1 + ... + b_l \left[\frac{1}{a_{lk}} (A_k - a_{1k} A_1 - ... - a_{mk} A_m) \right] + ... + b_m A_m =$$

$$=\left(b_1-\frac{b_l}{a_{lk}}a_{1k}\right)A_1+\ldots+\frac{b_l}{a_{lk}}A_k+\ldots+\left(b_m-\frac{b_l}{a_{lk}}a_{mk}\right)A_m.$$

Итак, значение компонент следующего опорного плана рассчитываются по формулам:

$$\begin{cases} b_i'=b_i-\dfrac{b_l}{a_{lk}}a_{ik} \quad (i\neq j); \\ b_k'=\dfrac{b_l}{a_{lk}} \quad (i=j). \end{cases}$$

Разложение по начальному базису любого из векторов имеет вид:

$$A_j=a_{1j}A_1+\ldots+a_{lj}A_l+\ldots+a_{mj}A_m.$$

Разложение по новому базису получим подстановкой (2.17) в (2.20):

$$A_j=a_{1j}A_1+\ldots+a_{lj}\left[\frac{1}{a_{lk}}(A_k-a_{1k}A_1-\ldots-a_{mk}A_m)\right]+\ldots+a_{mj}A_m=$$

$$=\left(a_{1j}-\frac{a_{lj}}{a_{lk}}a_{1k}\right)A_1+\ldots+\frac{a_{lj}}{a_{lk}}A_k+\ldots+\left(a_{mj}-\frac{a_{lj}}{a_{lk}}a_{mk}\right)A_m=$$

$$=a_{1j}'A_1+\ldots+a_{kj}'A_k+\ldots+a_{mj}'A_m.$$

Новый план: $X_1=(x_1=a_{1j}';\ldots;x_k=a_{kj}';\ldots;x_m=a_{mj}')$, где

$$\begin{cases} a_{ij}'=a_{ij}-\dfrac{a_{lj}}{a_{lk}}a_{ik} \quad (i\neq j); \\ a_{kj}'=\dfrac{a_{lj}}{a_{lk}} \quad (i=j). \end{cases}$$

Формулы (2.19) и (2.21) являются формулами полных исключений Жордана-Гаусса.

Итак, чтобы получить коэффициенты разложения векторов $A_0, A_1, \ldots, A_n$ по векторам нового базиса (переход к следующему опорному плану и созданию новой симплексной табл.2.2), необходимо:

1) разделить все элементы направляющей строки на разрешающий элемент;

2) рассчитать все другие элементы по формулам полных исключений Жордана-Гаусса (правило прямоугольника).

Потом необходимо осуществить проверку новых значений оценочной строки. Если все $F_j - c_j \geq 0$, то план X_1 — оптимальный, иначе переходят к отысканию следующего опорного плана. Процесс продолжают до получения оптимального плана, или установления факта отсутствия решения задачи.

Если в оценочной строке последней симплексной таблицы оценка $F_j - c_j \geq 0$ отвечает свободной (небазисной) переменной, то это означает, что задача линейного программирования имеет альтернативный оптимальный план. Получить его можно, выбирая разрешающий элемент в указанном столбике таблицы и осуществив один шаг (одну итерацию) симплекс-методом. В результате получим новый опорный план, которому отвечает то самое значение функционала, которое и для предыдущего плана, т.е. функционал достигает максимального значения в двух точках многогранника решений, а итак, по свойству решений задачи линейного программирования такая задача имеет бесконечное множество оптимальных планов.

Решение задачи линейного программирования на отыскание минимального значения функционала отличается лишь условием оптимальности опорного плана. К базису включают вектор, для которого $\Delta_j = \max(F_j - c_j)$, где максимум находят для тех j, которым отвечают $\Delta_j = F_j - c_j > 0$. Все другие процедуры симплексного метода осуществляются аналогично, как в задаче линейного программирования на отыскание максимального значения функционала.

Таблица 2.2 - Вторая симплексная таблица для отыскания опорного (оптимального) плана

i	Ба-зис	С$_{баз}$	План	c_1	c_2	…	c_l	…	c_m	c_{m+1}	…	c_j	…	c_k	…	c_n	θ_i
				x_1	x_2	…	x_l	…	x_m	x_{m+1}	…	x_j	…	x_k	…	x_n	
1	x_1	c_1	b'_1	1	0	…	0	…	0	$a'_{1,m+1}$	…	a'_{1j}	…	a'_{1k}	…	a'_{1n}	θ_1
2	x_2	c_2	b'_2	0	1	…	0	…	0	$a'_{2,m+1}$	…	a'_{2j}	…	a'_{2k}	…	a'_{2n}	θ_2
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
l	x_l	c_l	b'_l	0	0	…	1	…	0	$a'_{l,m+1}$	…	a'_{lj}	…	a'_{lk}	…	a'_{ln}	θ_l
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
m	x_m	c_m	b'_m	0	0	…	0	…	1	$a'_{m,m+1}$	…	a'_{mj}	…	a'_{mk}	…	a'_{mn}	θ_m
$m+1$	$F_j - c_j \geq 0$		$F(X_1)$	0	0	…	0	…	0	Δ'_{m+1}	…	Δ'_j	…	Δ'_k	…	Δ'_n	

Лабораторная работа 2.

Тема: Задача линейного программирования. Симплексный метод решения.

Цель: Приобрести навыки решения задачи линейного программирования симплексным методом. Осуществить проверку решения задачи средствами Microsoft Excel (Solver). Анализ отчетов по результатам, по пределам, по устойчивости задачи линейного программирования.

Заданине лабораторной работы

1. Ознакомиться с теоретическими положениями.
2. Построить математическую модель задачи.
3. Выполнить решение задачи симплексным методом (методом искусственного базиса) так, как это рассматривалось на лекции.
4. Проверить правильность решения задачи с помощью MS Excel.
5. Отобразить отчеты по результатам, по пределам, по устойчивости.
6. Предоставить письменно ответы на контрольные вопросы.

Задача 1 . Для изготовления столов и шкафов применяется три вида сырья. Затраты дерева для каждого изделия приведены в таблице.

Изделие	**Вид дерева**		
	1	**2**	**3**
Стол, г. куб.	0,2	0,2	0,25
Шкаф, г.куб.	0,3	0,25	0,25
Запасы дерева, г.куб.	60	50	40

Прибыль от реализации одного стола составляет 30 грн., а шкафа 42 грн. Найти максимальную прибыль от продажи.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Дайте определение начального опорного плана.
2. Опишите алгоритм переход от одного опорного плана к другому.
3. Сформулировать критерий оптимальности решения задачи линейного программирования.
4. Этапы решения задачи линейного программирования симплексным методом.
5. Метод искусственного базиса.

ТРЕБОВАНИЯ К ОТЧЕТУ

1. Записать в тетради условия задач.
2. Построить математическую модель.
3. Решить задачу симплексным методом.
4. Выполнить проверку в Excel, вывести три отчета (по результатам, по устойчивости, по пределам.
5. Результаты продемонстрировать преподавателю.
6. Предоставить ответы на контрольные вопросы.

ТЕМА 3: ТЕОРИЯ ДВОЙСТВЕННОСТИ

Аннотация

Экономическая интерпретация прямой и двойственной задач линейного программирования Правила построения двойственных задач. Основные теоремы двойственности и их экономическое содержание. Примеры применения теории двойственности для нахождения оптимальных планов прямой и двойственной задач.

3.1. Экономическая интерпретация прямой и двойственной задач линейного программирования

Каждая задача линейного программирования связана с другой, так называемой ***двойственной*** задачей.

Прямая задача:

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n \quad (3.1)$$

при условиях:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + \ldots + a_{3n}x_n \le b_3; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases} \quad (3.2)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1, n} \quad . \quad (3.3)$$

Необходимо определить, какое количество продукции каждого j-*го* вида x_j $(j = \overline{1, n})$ необходимо изготовлять в процессе производства, чтобы максимизировать общую выручку от реализации продукции предприятия. Причем известны: имеющиеся объемы ресурсов – $b_i\ (i=\overline{1,m})$; нормы затрат *i-го* вида ресурса на производство единицы *j-го* вида продукции – $a_{ij}\ (i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$, а также $c_j\ (j=\overline{1,n})$ – цены реализации единицы j-*ой* продукции.

Рассмотрим теперь эту самую задачу с другой точки зрения. Допустим, что при определенных условиях целесообразно продавать некоторую часть или все имеющиеся ресурсы. Необходимо определить цены ресурсов. Каждому ресурсу $b_i\ (i=\overline{1,m})$ поставим в соответствие его оценку $y_i\ (i=\overline{1,m})$ Условно будем считать, что y_i – цена единицы *i-го* ресурса.

На изготовление единицы *j-го* вида продукции тратится согласно модели (3.1)—(3.3) *m* видов ресурсов в количестве соответственно $a_{1j}, a_{2j}, a_{3j}, \ldots, a_{mj}$. Поскольку цена единицы *i-го* вида ресурса равняется $y_i\ (i=\overline{1,m})$, то общая стоимость ресурсов, которые тратятся на производство единицы *j-го* вида продукции, исчисляется таким образом:

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + a_{3j}y_3 + \ldots + a_{mj}y_m.$$

Продавать ресурсы целесообразно лишь при условии, что выручка, полученная от продажи ресурсов, превышает сумму, которую можно было бы получить от реализации продукции, изготовленной из тех самых объемов ресурсов, т.е.:

$$a_{1j}y_1 + a_{2j}y_2 + a_{3j}y_3 + \ldots + a_{mj}y_m \geq c_j,\ \ j=1,2,\ldots,n.$$

Понятно, что покупатели ресурсов стремятся совершить сделку как можно дешевле, итак, необходимо определить минимальные цены единиц каждого вида ресурсов, при которых их продажа является более целесообразной, чем изготовление продукции. Общую стоимость ресурсов можно выразить формулой:

$$Z = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m.$$

Итак, в результате имеем ***двойственную задачу***:

$$\min Z = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m \qquad (3.4)$$

при условиях:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + a_{31}y_3 + \ldots + a_{m1}y_m \geq c_1; \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + a_{32}y_3 + \ldots + a_{m2}y_m \geq c_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + a_{3n}y_3 + \ldots + a_{mn}y_m \geq c_n; \end{cases} \qquad (3.5)$$

$$y_i \geq 0\ (i=1,2,\ldots m). \qquad (3.6)$$

Т.е. необходимо определить, какие минимальные цены можно установить для единицы каждого *i-го* вида ресурса $y_i,\ i=\overline{1,m}$, чтобы продажа ресурсов была более целесообразной, чем производство продукции.

Заметим, что содержание величин $y_i,\ i=\overline{1,m}$ – условные цены, которые выражают уровень «ценности» соответствующего ресурса для данного производства. Английский термин«shadow prices» в литературе переводится как «оценка» или «теневая, неявная цена». Академик Л.В.Канторович назвал их ***объективно обусловленными оценками*** соответствующего ресурса.

Задача (3.4)-(3.6) есть двойственной или сопряженной к задаче (3.1)-(3.3), которую называют прямой (основной, начальной). Понятие двойственности есть взаимным. По сути речь идет об одной и той же задаче, но с разных точек зрения. Действительно, не тяжело убедиться, что двойственная задача к (3.4)-(3.6) совпадает с начальной. Поэтому каждую из них можно считать прямой, а другую – двойственной. *Симметричность* двух таких задач очевидная. Как в прямой, так и в двойственной задаче используют один набор начальных данных: $b_i, i=(\overline{1,m})$, $a_{ij},(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n})$; $c_j,(j=\overline{1,n})$. Кроме того, вектор ограничений начальной задачи становится вектором коэффициентов целевой функции двойственной задачи и наоборот, а строки матрицы *A* (матрицы коэффициентов при переменных из ограничений прямой задачи) становятся столбцами матрицы коэффициентов при переменных в ограничениях двойственной задачи. Каждому ограничению начальной задачи отвечает переменная двойственной и наоборот.

Начальная постановка задачи и математическая модель может иметь вид как (3.1)-(3.3), так и (3.4)-(3.6). Итак, как правило, говорят о паре ***сопряженных*** задач линейного программирования.

3.2 Правила построения двойственных задач

Для построения двойственной задачи необходимо свести прямую задачу к стандартному виду. Считают, что задача линейного программирования представлена в стандартном виде, если для отыскания максимального значения целевой функции все неравенства ее системы ограничений приведены к виду «$\le$», а для задачи на отыскание минимального значения — к виду «$\ge$».

Если прямая задача линейного программирования представлена в стандартном виде, то двойственная задача ***образуется по таким правилам***:

1. Каждому ограничению прямой задачи отвечает переменная двойственной задачи. Количество неизвестных двойственной задачи равняется количеству ограничений прямой задачи.

2. Каждой переменной прямой задачи отвечает ограничение двойственной задачи, причем количество ограничений двойственной задачи равняется количеству неизвестных прямой задачи.

3. Если целевая функция прямой задачи задается на поиск наибольшего значения (max), то целевая функция двойственной задачи - на определение наименьшего значения (min), и наоборот.

4. Коэффициентами при переменных в целевой функции двойственной задачи есть свободные члены системы ограничений прямой задачи.

5. Правыми частями системы ограничений двойственной задачи есть коэффициенты при переменных в целевой функции прямой задачи.

6. Матрица

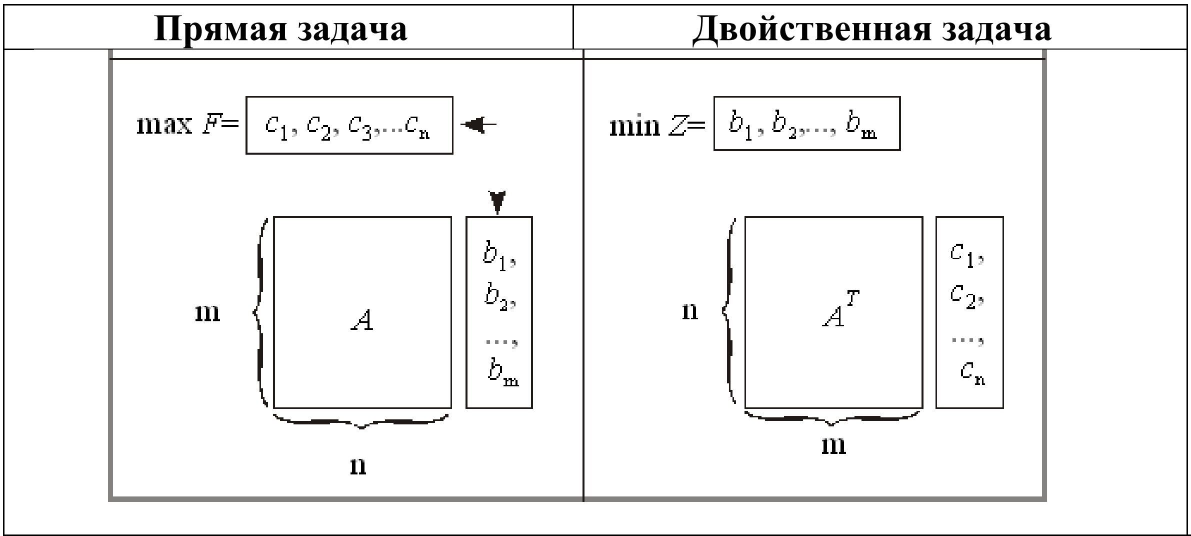
$$\grave{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix},$$

которая состоит из коэффициентов при переменных в системе ограничений прямой задачи, и матрица коэффициентов в системе ограничений двойственной задачи

$$\grave{A}^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

образовываются одна из одной транспонированием, т.е. заменой строк столбцами, а столбцов - строками.

Процесс построения двойственной задачи удобно изобразить схематично:



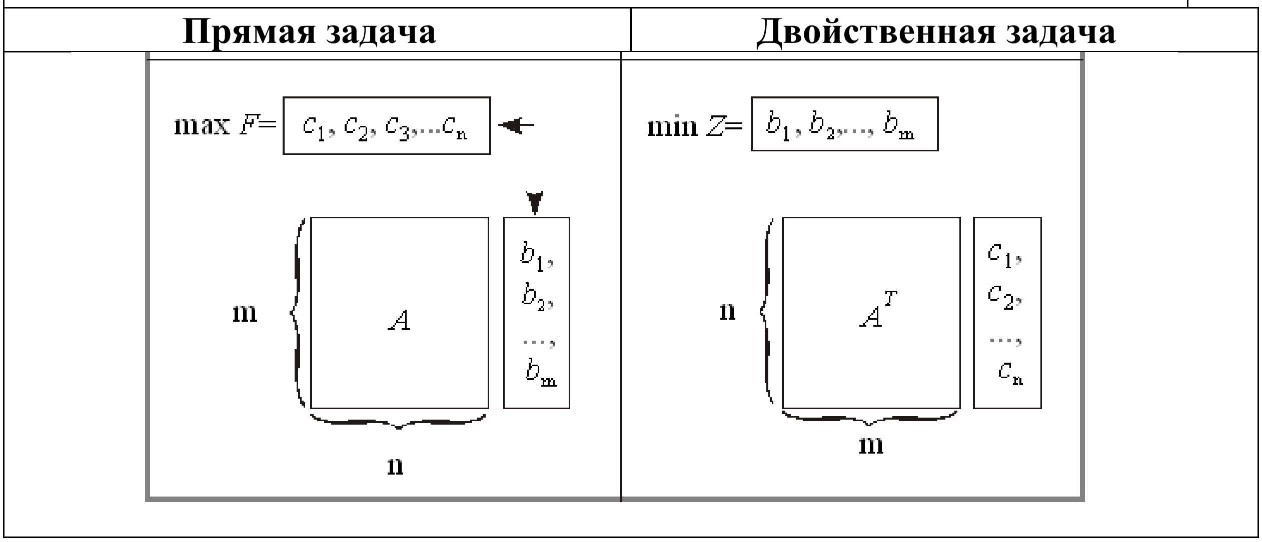


Рисунок 3.1 - Схема построения двойственной задачи к прямой

Пары задач линейного программирования бывают симметричные и несимметричные.

В ***симметричных задачах*** ограничения прямой и двойственной задач являются лишь неравенствами, а переменные обеих задач могут приобретать лишь неотрицательные значения.

В ***несимметричных задачах*** некоторые ограничения прямой задачи могут быть уравнениями, а двойственной – лишь неравенствами. В этом случае соответствующие уравнениям переменные двойственной задачи могут приобретать любые значения, не ограниченные знаком.

Все возможные формы прямых задач линейного программирования и соответствующие им варианты моделей двойственных задач в матричной форме приведено ниже.

Прямая задача	**Двойственная задача**
Симметричные задачи	
$\max F = CX$ $AX \leq B$ $X \geq 0$ $\min F = CX$ $AX \geq B$ $X \geq 0$	$\min Z = BY$ $A^T Y \geq C$ $Y \geq 0$ $\max Z = BY$ $A^T Y \leq C$ $Y \geq 0$
Прямая задача	**Двойственная задача**
Несимметричные задачи	
$\max F = CX$ $AX = B$ $X \geq 0$ $\min F = CX$ $AX = B$ $X \geq 0$	$\min Z = BY$ $A^T Y \geq C$ $Y \in \left]-\infty; \infty\right[$ $\max Z = BY$ $A^T Y \leq C$ $Y \in \left]-\infty; \infty\right[$

3.3 Основные теоремы двойственности и их экономическое содержание

Теорема (*первая теорема двойственности*). Если одна из пары сопряженных задач имеет оптимальный план, то и вторая задача также имеет решение, причем для оптимальных решений значения целевых функций обеих задач совпадают, т.е.

$$\max F = \min Z.$$

Если целевая функция одной из задач неограниченная, то сопряженная задача также не имеет решения.

Первая теорема двойственности дает возможность в процессе решения одной задачи вместе с тем находить план второй.

Экономическое содержание первой теоремы двойственности. Максимальную прибыль (F_{max}) предприятие получает при условии производства продукции согласно оптимальному плану $X^* = (x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^*)$, однако такую самую сумму денег ($Z_{\min} = F_{\max}$) оно может иметь, реализовав ресурсы по оптимальным ценам $Y^* = (y_1^*, y_2^*, \ldots, y_m^*)$. При условиях использования других планов $X \neq X_{opt}$, $Y \neq Y_{opt}$ на основании основной неравенства теории двойственности можно утверждать, что прибыли от реализации продукции всегда меньшие, чем затраты на ее производство.

Между решениями сопряженных задач кроме равенства значений целевых функций существует более тесная взаимосвязь. Для его исследования рассмотрим две симметричных задачи линейного программирования.

Прямая задача:

$$\max F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n \le b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n \le b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n \le b_m. \end{cases} \qquad (3.9)$$

$$x_j \ge 0, \quad j = \overline{1,n}.$$

Двойственная задача:

$$\min Z = b_1y_1 + b_2y_2 + \ldots + b_my_m$$

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m \ge c_1; \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m \ge c_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m \ge c_n. \end{cases} \qquad (3.10)$$

$$y_i \ge 0, \quad i = \overline{1,m}.$$

Для решения задач симплексным методом необходимо свести их к канонической форме, для чего у системы ограничений задач (3.9) и (3.10) необходимо ввести соответственно m и n неотъемлемых переменных. Поставим ограничением каждой задачи в соответствие переменные ее двойственной задачи.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m. \end{cases} \left|\begin{matrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_m \end{matrix}\right.$$

Аналогично:

$$\begin{cases} a_{11}y_1 + a_{21}y_2 + \ldots + a_{m1}y_m - y_{m+1} = c_1; \\ a_{12}y_1 + a_{22}y_2 + \ldots + a_{m2}y_m - y_{m+2} = c_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{1n}y_1 + a_{2n}y_2 + \ldots + a_{mn}y_m - y_{m+n} = c_n. \end{cases} \begin{array}{|l} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{array}$$

Получили такое соответствие между переменными сопряженных задач:

Основные переменные прямой задачи	Дополнительные переменные прямой задачи
$x_1 \updownarrow y_{m+1}$ $x_2 \updownarrow y_{m+2}$ … $x_k \updownarrow y_{m+k}$ … $x_n \updownarrow y_{m+n}$	$x_{n+1} \updownarrow y_1$ $x_{n+2} \updownarrow y_2$ … $x_{n+l} \updownarrow y_l$ … $x_{n+m} \updownarrow y_m$
Дополнительные переменные двойственной задачи	Основные переменные двойственной задачи

Следующая теорема в литературе, как правило, имеет название теоремы о дополняющей нежесткость.

Теорема ***(вторая теорема двойственности для симметричных задач)***. Для того, чтобы планы X^* и Y^* соответствующих сопряженных задач были оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия дополняющей нежесткости:

$$x_j^*\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}y_i^* - c_j\right) = 0, \quad j = \overline{1,n} \tag{3.11}$$

$$y_i^*\left(\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^* - b_i\right) = 0, \quad i = \overline{1,m}. \tag{3.12}$$

Очевиднее взаимосвязь между оптимальными планами прямой и двойственной задач устанавливает следствие второй теоремы двойственности.

Следствие. Если в результате подстановки оптимального плана одной из задач (прямой или двойственной) в систему ограничений этой задачи i-тое ограничение выполняется как строгая неравенство, то соответствующая i-тая компонента оптимального плана сопряженной задачи равняется нулю.

Если i-тая компонента оптимального плана одной из задач положительна, то соответствующее i-тое ограничение сопряженной задачи выполняется для оптимального плана как уравнение.

Экономическое содержание второй теоремы двойственности *относительно оптимального плана X^* прямой задачи*. Если для изготовления всей продукции в объеме, который определяется оптимальным планом X^*, затраты одного i-того ресурса строго меньши его общего объем b_i, то соответствующая оценка такого ресурса y_i^*

(компонента оптимального плана двойственной задачи) будет равнять нулю, т.е. такой ресурс при данных условиях для производства не является «ценным».

Если же затраты ресурса равняются его имеющемуся объему b_i, т.е. его использовано полностью, то он есть «ценным» для производства, и его оценка y_i^* будет строго больше нуля.

Экономическое толкование второй теоремы двойственности *относительно оптимального плана Y^* двойственной задачи*: в случае, если некоторое j-*тое* ограничение выполняется как неравенство, т.е. все затраты на производство единицы j-*го* вида продукции превышают его цену c_j, производство такого вида продукции есть нецелесообразным, и в оптимальном плане прямой задачи объем такой продукции x_j^* равняется нулю.

Если затраты на производство j-*го* вида продукции равняются цене единицы продукции c_j, то ее необходимо изготовлять в объеме, который определяется оптимальным планом прямой задачи $x_j^* > 0$.

Существование двойственных переменных делает возможным сопоставление затрат на производство и цен на продукцию, на основании чего обосновывается вывод о целесообразности или нецелесообразности производства каждого вида продукции. Кроме этого, значение двойственной оценки характеризует изменение значения целевой функции, которая обусловлена малыми изменениями свободного члена соответствующего ограничения. Данное утверждение формулируется в виде такой теоремы.

Теорема *(третья теорема двойственности)*. Компоненты оптимального плана двойственной задачи $y_i^* \ (i = \overline{1, m})$ равняются значениям частичных производных от целевой функции $F(b_1, b_2, ..., b_m)$ по соответствующим аргументами $b_i, (i = \overline{1, m})$, или

$$\frac{\partial F}{\partial b_i} = y_i^*, \ i = 1, 2, ..., m. \qquad (3.13)$$

Экономическое содержание третьей теоремы двойственности. Двойственные оценки являются уникальным инструментом, который дает возможность сопоставлять несравнимые вещи. Очевидно, что невозможным есть простое сопоставление величин, которые имеют разные единицы измерения. Если взять в качестве примера производственную задачу, то интересными есть вопросы: как будет изменяться значение целевой функции (может измеряться в денежных единицах) за изменения объемов разных ресурсов (могут измеряться в тоннах, м^2, люд./ч, га и т.п.).

Используя третью теорему двойственности, можно легко определить влияние на смену значения целевой функции увеличения или уменьшение объемов отдельных ресурсов: числовые значения двойственных оценок показывают, на какую величину изменяется целевая функция при изменении объема соответствующего данной оценке ресурса $y_i^* = \frac{\Delta F}{\Delta b_i}$.

Итак, при условии незначительных изменений b_i вместо задачи линейного программирования, представленной в канонической форме

$$\max F = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \qquad (3.14)$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (3.15)$$

$$x_j \geq 0, \ j = \overline{1, n}. \qquad (3.16)$$

имеем новую задачу, где b_i заменено на $b_i' = b_i + \Delta b_i$. Обозначим через X' оптимальный план новой задачи. Для определения $F(X')$ не нужно решать новую задачу линейного программирования, а достаточно воспользоваться формулой $F(X') - F(X^*) = y_i^* \Delta b_i$, где X^* – оптимальный план задачи (3.14-3.16).

Лабораторная работа 3

Тема: Теория двойственности и анализ линейных моделей оптимизационных задач. Решение с помощью симплексного метода (М-метода) и Excel прямой и двойственной задачи.

Цель: Приобрести навыки для построения математических моделей сопряженных задач, внесение моделей в лист Excel, использование матричных функций для расчета транспонированной матрицы, умножения матриц при составлении двойственной задачи. Научиться решать прямую и двойсивенноу задачу двумя способами: симплексным методом (М-методом) и с помощью Solver.

На предприятии производятся продукты четырех видов, для этого процесса используются ресурсы трех видов (фонд заработной платы, средства производства, транспортные затраты). Ресурсы ограничены соответственно 20 у.е, 80 у.е, 200 у.е. Расходы ресурсов на производство продуктов представлены в таблице.

Ресурсы	**Продукт1**	**Продукт2**	**Продукт3**	**Продукт4**
фонд заработной платы	**1**	**3**	**2**	**4**
средства производства	**10**	**4**	**5**	**2**
транспортные затраты	**5**	**8**	**4**	**10**

Продукты продаются по цене 20 у.е, 40 у.е, 30 у.е, 10 у.е. соответственно. Организовать производство необходимо таким образом, чтобы прибыль была максимальной. Определить альтернативные цены на ресурсы, при которых выгоднее продать сырье, чем производить продукцию

Математическая модель задачи имеет вид:

Целевая функция: $Z_{\max} = 20x_0 + 40x_1 + 30x_2 + 10x_3$

Ограничения: $\begin{cases} 1x_0 + 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 20 \\ 10x_0 + 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 \le 80 \\ 5x_0 + 8x_1 + 4x_2 + 10x_3 \le 200 \end{cases}$

$x_0, x_1, x_2, x_3 \ge 0$

Задание1.

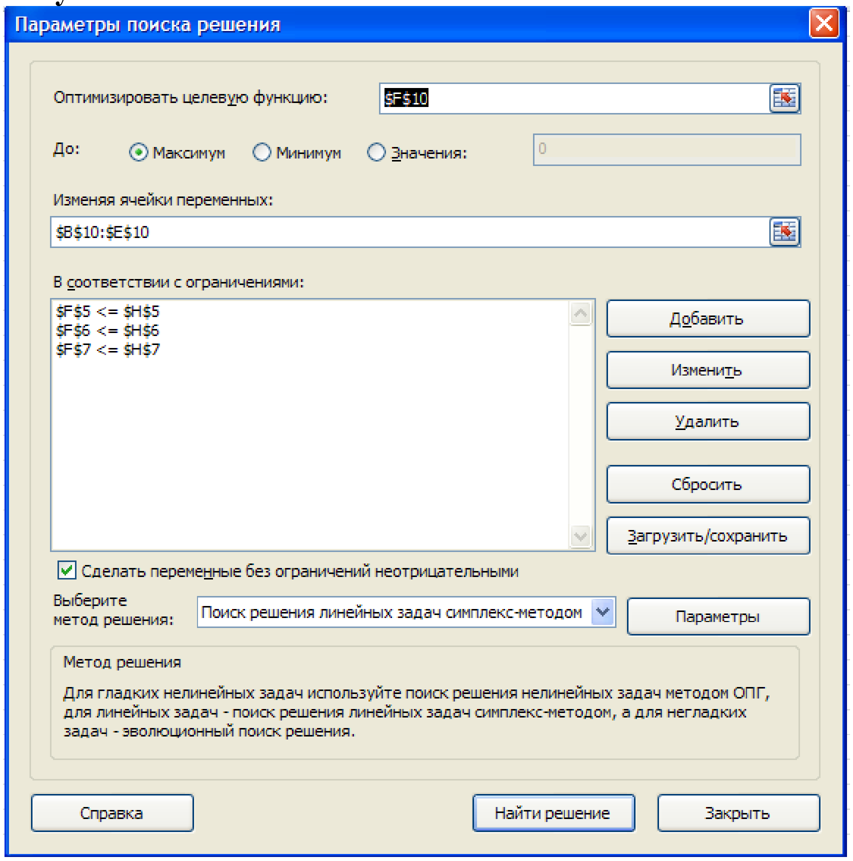
Организация рабочего листа имеет вид (рис3.1):

Рисунок 3.1

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			переменные			левая часть	знак	правая часть
2	наименование	x0	x1	x2	x3			
3	коэфф. В цел. Функции	20	40	30	10			
4								
5	коэф. В 1 огран.	1	3	2	4	=СУММПРОИЗВ($B$10:$E$10;B5:E5)	≤	20
6	коэф. В 2 огран.	10	4	5	2	=СУММПРОИЗВ($B$10:$E$10;B6:E6)	≤	80
7	коэф. В 3 огран.	5	8	4	10	=СУММПРОИЗВ($B$10:$E$10;B7:E7)	≤	200
8								
9		x0	x1	x2	x3	целевая функция		макс
10	оптимальныезн ачения	0	0	0	0	=СУММПРОИЗВ($B$10:$E$10;B3:E3)		
11								

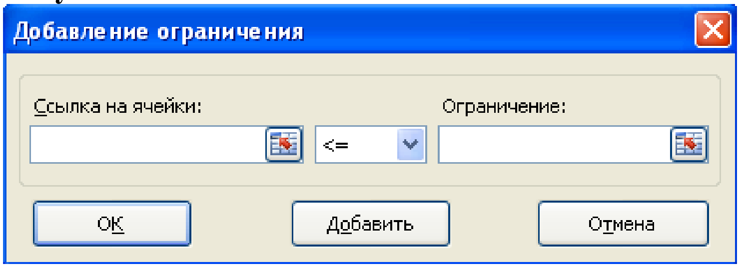
В окне Поиск решений вводим следующую информацию: Целевая ячейка F10 ($ означает абсолютную ссылку, для установки нажимается клавиша F4), Изменяя ячейки B10, C10, D10, E10 (B10:E10), ограничения добавляются нажатием кнопки Добавить при наличии курсора в поле Ограничения.

Рисунок 3.2



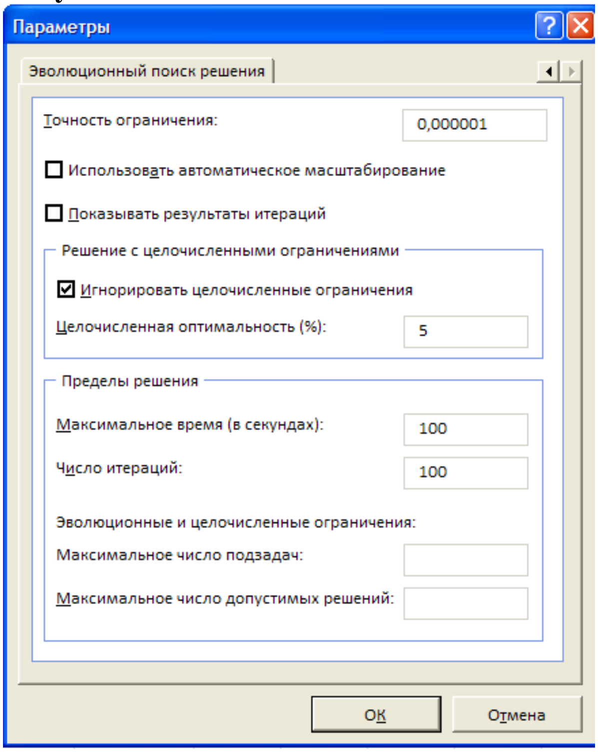
После нажатия кнопки Добавить в окне (рис.3.3) указать соответствующие ссылки.

Рисунок 3.3



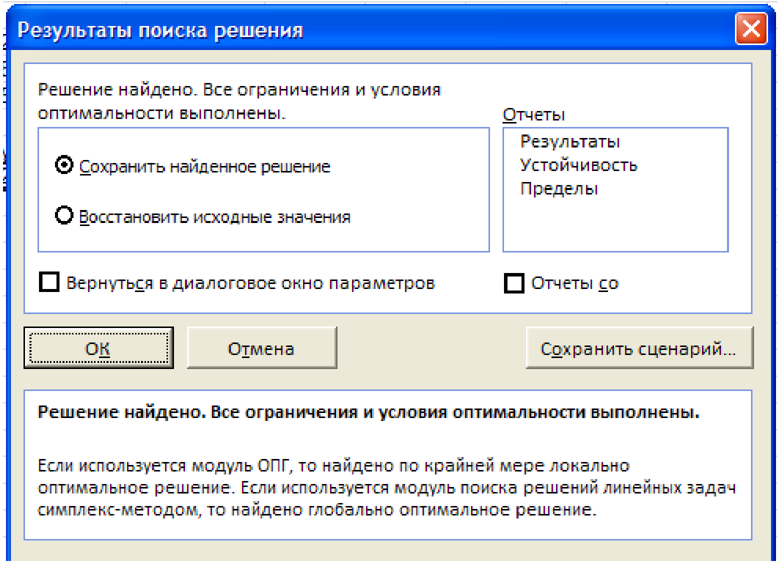
Далее во вкладке Параметры устанавливаем следующие значения:

Рисунок 3.4



После закрытия окна Параметры нажатием кнопки Ок, нажимается кнопка Выполнить. Выбрать три вида отчета: Результаты, Устойчивость, Пределы.

Рисунок 3.5



При правильном выполнении всех действий в результате должен получится следующий ответ.

Рисунок 3.6

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			переменные			левая часть	знак	правая часть
2	наименование	x0	x1	x2	x3			
3	коэфф. В цел. Функции	20	40	30	10			
4								
5	коэф. В 1 огран.	1	3	2	4	20	≤	20
6	коэф. В 2 огран.	10	4	5	2	80	≤	80
7	коэф. В 3 огран.	5	8	4	10	52	≤	200
8								
9		x0	x1	x2	x3	целевая функция		макс
10	оптимальныезн ачения	4	0	8	0	320		
11								

Задание2. Далее правой кнопкой мыни нажать на наименовании Листа, выбрать Переместить/ Скопировать, установит флажок на Создать копии, указать В конце. На скопированном листе удалить формулы и ввести новые по образцу.

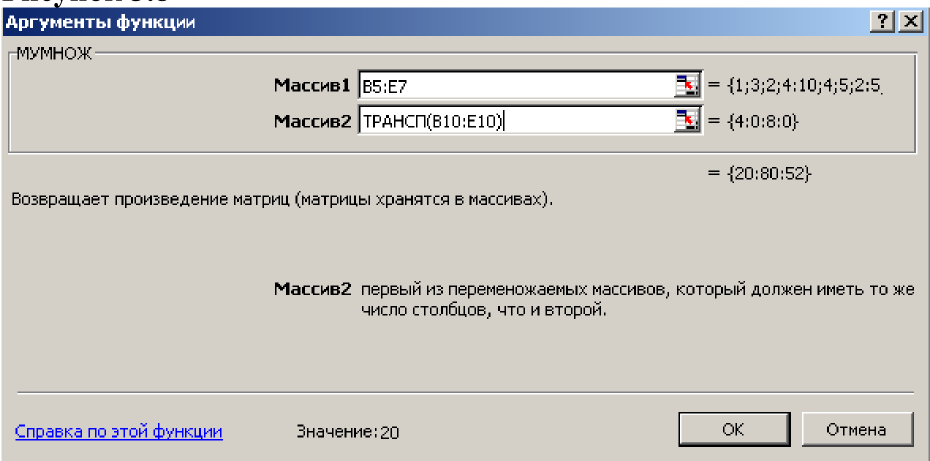
Рисунок 3.7

	A	B	C	D	E	F	G	
1			переменные			левая часть	знак	пр ча
2	наименование	x0	x1	x2	x3			
3	коэфф. В цел. Функции	20	40	30	10			
4								
5	коэф. В 1 огран.	1	3	2	4	=МУМНОЖ(B5:E7;ТРАНСП(B10:E10))	≤	
6	коэф. В 2 огран.	10	4	5	2		≤	
7	коэф. В 3 огран.	5	8	4	10		≤	
8								
9		x0	x1	x2	x3	целевая функция		м
10	оптимальныезн ачения	4	0	8	0	=МУМНОЖ(B3:E3;ТРАНСП(B10:E10))'		

Поскольку функция МУМНОЖ и ТРАНСП работают с массивами, то для их ввода выделяют столько ячеек для результата, сколько ячеек занимает матрица ответа. Перед тем, как закрыть окно ввода таких функций необходим нажать клавишу F2, далее удерживая Ctrl+ Shift нажать Enter.

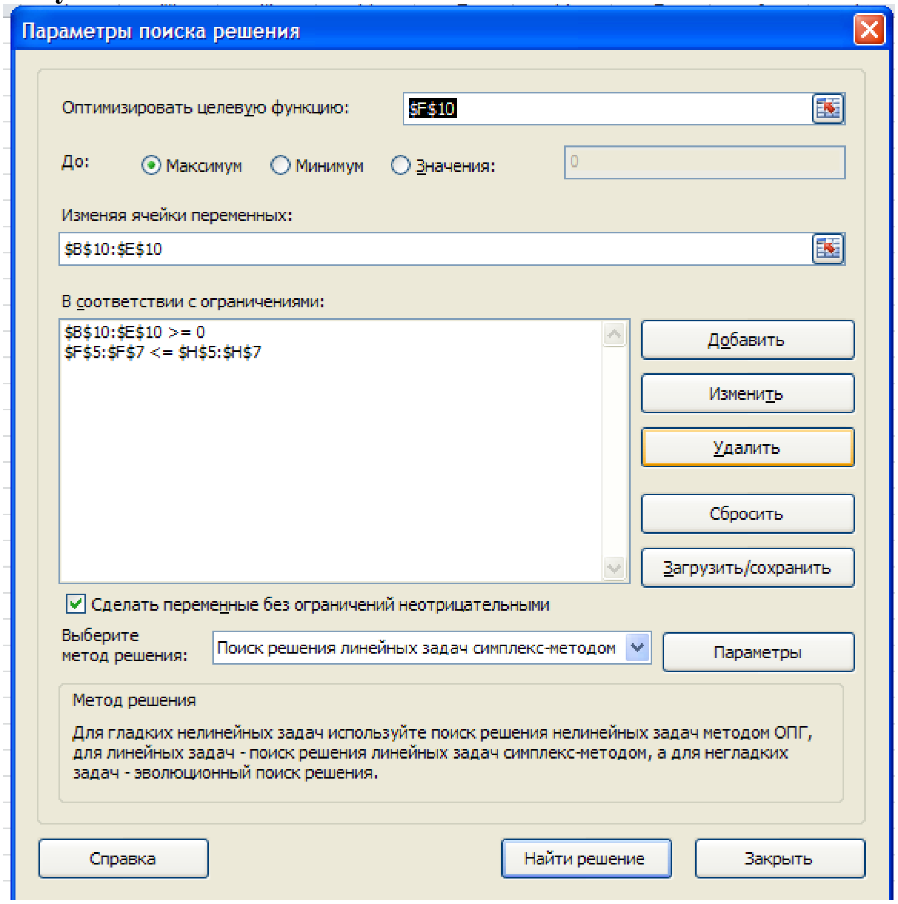
Окно ввода функции имеет вид (рис.3.8):

Рисунок 3.8



Далее запускается Поиск решений. В окне 3.9 вводятся следующие данные.

Рисунок 3.9



В результате правильного выполнения задания получается следующее:

Рисунок 3.10

	A	B	C	D	E	F	G	H
1			переменные			левая часть	знак	правая часть
2	наименование	x0	x1	x2	x3			
3	коэфф. В цел. Функции	20	40	30	10			
4								
5	коэф. В 1 огран.	1	3	2	4	20	≤	20
6	коэф. В 2 огран.	10	4	5	2	80	≤	80
7	коэф. В 3 огран.	5	8	4	10	52	≤	200
8								
9		x0	x1	x2	x3	целевая функция		макс
10	оптимальныезначения	4	0	8	0	320		

Задание 3. Далее производим копирование последнего Листа и дорабатываем Лист, вводя в него двойственную задачу, которая получается транспонированием основной матрицы системы ограничений, столбца свободных коэффициентов, сроки коэффициентов целевой функции.

<table>
<tr><th>Исходная задача</th><th>Двойственная задача</th></tr>
<tr><td>Целевая функция:
$Z_{\max} = 20x_0 + 40x_1 + 30x_2 + 10x_3$</td><td>$L_{\min} = 20y_0 + 80y_1 + 200y_2$
(коэффициенты получены транспонированием столбца свободных коэффициентов)</td></tr>
<tr><td>Ограничения:
$\begin{cases} 1x_0 + 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \le 20 \\ 10x_0 + 4x_1 + 5x_2 + 2x_3 \le 80 \\ 5x_0 + 8x_1 + 4x_2 + 10x_3 \le 200 \end{cases}$</td><td>$\begin{cases} 1y_0 + 10y_1 + 5y_2 \ge 20 \\ 3y_0 + 4y_1 + 8y_2 \ge 40 \\ 2y_0 + 5y_1 + 4y_2 \ge 30 \\ 4y_0 + 2y_1 + 10y_2 \ge 10 \end{cases}$
(столбец свободных коэффициентов получен транспонированием коэффициентов целевой функции, основная матрица новои системы получена транспонированием основной матрицы исходной задачи.)</td></tr>
</table>

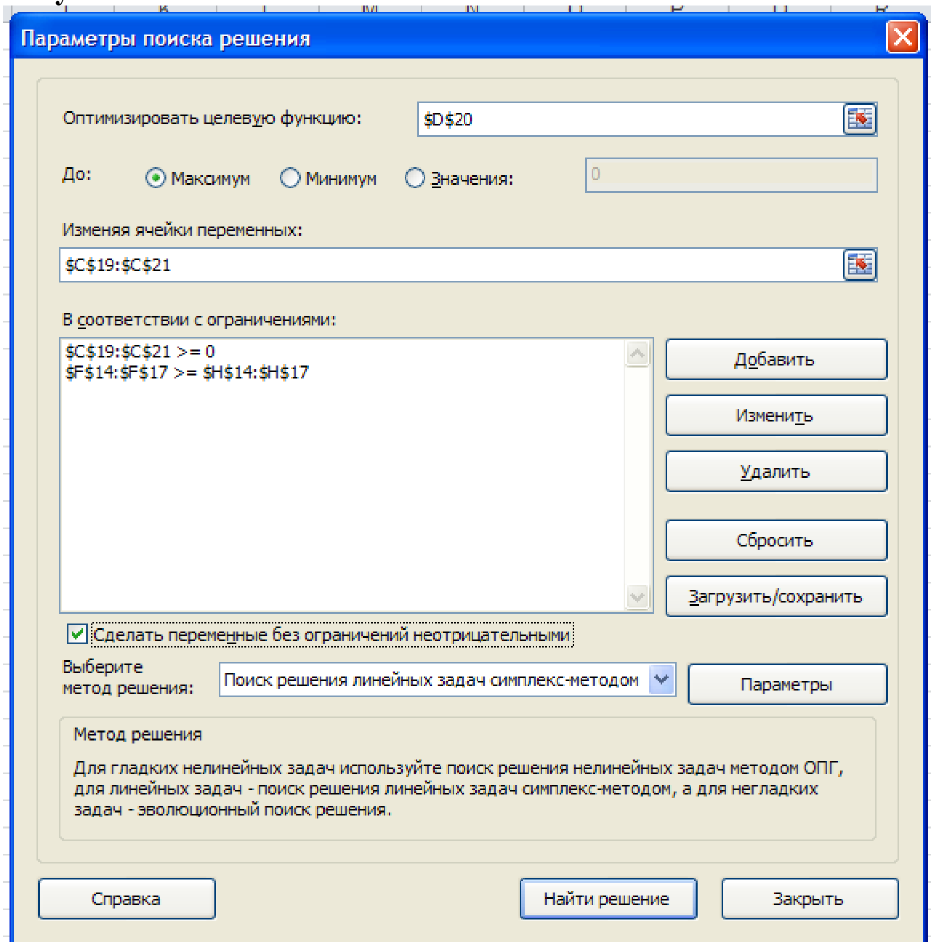
Организация рабочего письма следующая:

Рисунок 3.11

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1			Переменные			Левая часть	Знак	Правая часть	
2	Наименование	x0	x1	x2	x3				
3	Коэф цел.функции	20	40	30	10				
4									
5	Коэф в 1 ограничени	1	3	2	4	20	<=	20	
6	Коэф во 2 ограничен	10	4	5	2	80	<=	80	
7	Коэф в 3 ограничени	5	8	4	10	52	<=	200	
8									
9		x0'	x1'	x2'	x3'	целевая функция			
10	оптимальные значен	4	0	8	0	320		max	
11		Двойственная задача							
12									
13	Коэф цел функции	матрица коэф ограничений				левая часть	Знак	Правая часть	
14	20	1	10	5		0	>=	20	
15	80	3	4	8		0	>=	40	
16	200	2	5	4		0	>=	30	
17		4	2	10		0	>=	10	
18									
19		опт знач z0	0	целевая функция		min			
20		опт знач z1	0	0					
21		опт знач z2	0						
22									
23									
24									
25									

В ячейки F14:F17 вводят формулу =МУМНОЖ(B14:D17;C19:C21), в ячейку D20 вводят формулу =МУМНОЖ(ТРАНСП(A14:A16);C19:C21). Затем запускают Поиск решений.

Рисунок 3.12



В результате правильного решения задачи выйдет следующий результат. В окне вывода результата выбрать три типа отчета.

Рисунок 3.13

	A	B	C	D	E	F	G	H
11			двойственная					
12								
13	коэф. Цел. Функц.	матрица коэф. Значений				левая часть	знак	правая часть
14	20	1	10	5		20	≥	20
15	80	3	4	8		42,66667	≥	40
16	200	2	5	4		30	≥	30
17		4	2	10		54,66667	≥	10
18								
19		опт.0	13,33333	целевая функц.				
20		опт1	0,666667	320				
21		опт2	0					
22								
23								

Результат выполненной лабораторной работы сохранить в папке Мои документы, папке с названием группы, имя файла– фамилия студента + №3.

Самостоятельная работа

Выполнить решение прямой и двойственной задачи с помощью симплексного метода. Решить одну из задач и с помощью последней симплексной таблицы выписать решение другой, сопряженной задачи. С помощью надстройки Поиск решений (Solver) выполнить решение прямой и двойственной задачи в Excel.

Задача 2.

Задача о смесях

Фирма «Корм» имеет возможность покупать 4 разных вида зерна(компонентов смеси) и изготовливать различные виды кормов. Разные зерновые культуры содержат разное количество питательных ингредиентов. Сделанный комбикорм должен удовлетворять некоторым минимальным требованиям с точки зрения питательности. Нужно определить, которая из возможных смесей есть наиболее дешевой. Исходные данные приведены в таблице:

	Единица веса				Минимальные нужды на планированный период
	зерна 1	**зерна 2**	**зерна 3**	**зерна 4**	
Ингредиент A	2	3	7	1	1250
Ингредиент B	1	0,7	0	2,3	450
Ингредиент C	5	2	0,2	1	900
Ингредиент D	0,6	0,7	0,5	1	350
Ингредиент E	1,2	0,8	0,3	0	600
Затраты рассчитывая на од. весы (цена)	41	35	48	42	Минимизировать

Математические модели исходной и двойственной задачи записать в тетрадь. Предоставить экономическую интерпретацию.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Экономическая интерпретация прямой и двойственной задач линейного программирования
2. Правила построения двойственных задач
3. Основные теоремы двойственности и их экономическое содержание

ТРЕБОВАНИЯ К ОТЧЕТУ

1. Записать в тетради условия задач.
2. Построить математическую модель прямой и двойственной залачи.
3. Решить симплексным методом одну из задач.
4. Выполнить решение в Excel обеих задач
5. Результаты продемонстрировать преподавателю.
6. Предоставить ответы на контрольные вопросы.

ТЕМА 4: ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА. МЕТОДЫ ЕЕ РЕШЕНИЯ

4.1. ТРАНСПОРТНАЯ ЗАДАЧА И АЛГОРИТМ ЕЕ РЕШЕНИЯ

Данная проблема связана с распределением товаров между поставщиками (находящимися в пунктах производства) и потребителями (находящимися в пунктах назначения) таким образом, чтобы общая стоимость этого распределения была минимальной. Эта задача может быть решена либо с помощью методов линейного программирования, либо специального алгоритма решения транспортной задачи. Применение методов линейного программирования проиллюстрировано в примере **4.1.**

Пример 4.1. Компания с ограниченной ответственностью "Are Foods Ltd" осуществляет производство прохладительных напитков на двух заводах — А и В. Поставкой бутылок на каждый из заводов занимаются две фирмы - Р и О. На ноябрь заводу А требуется 5000 бутылок, а заводу В — 3500 бутылок. Фирма Р может поставить максимум 7500 бутылок, а фирма Q - 4000 бутылок. Табл. 4.1 содержит информацию о стоимости перевозки одной бутылки от каждого поставщика каждому заводу.

Таблица 4.1. **Стоимость перевозки бутылок, показатели спроса и предложения**

Поставщик	**Стоимость одной бутылки перевозки на завод, евро**		**Максимальный объем поставки**
	A	*B*	
P	4	4	7500
Q	3	2	4000
Спрос на бутылки	5000	3500	

Как следует организовать доставку бутылок на заводы, чтобы общая стоимость перевозки была минимальной?

Решение.

При решении транспортной задачи всегда полезно проверить, не существует ли очевидного решения. Теоретически было бы желательно использовать для перевозок только наиболее дешевые маршруты. Для обоих заводов Q был бы наиболее предпочтительным поставщиком, так как стоимость перевозки для него ниже, чем для Р. Однако максимальный объем перевозок для Q составляет только 4000 бутылок, тогда как общий спрос равен 8500. Вероятно, наиболее дешевым вариантом было бы использование маршрута из Q в B стоимостью 2 евро за единицу, удовлетворяющее весь спрос завода B (3500). Остаток запаса (500) следует направить из Q в A по стоимости 3 евро за единицу. Остальной спрос завода A следует удовлетворить через поставщика P, причем стоимость перевозки составит 4 евро за единицу. Общая стоимость транспортировки при таком распределении будет иметь вид:

$2 \times 3500 + 3 \times 500 + 4 \times 4500 = 26500$ в месяц.

Однако мы не можем доказать, что данное распределение ресурсов является наиболее экономичным. Основные аспекты исследования транспортной модели состоят в следующем: доказательство того, что сформулированная задача имеет решение; обоснование положения о том, что это решение является оптимальным; изучение влияния на полученное решение любых изменений условий задачи.

Построив соответствующую модель линейного программирования, решим сформулированную выше проблему графическим методом.

Пусть фирма P поставляет x бутылок для завода A и y бутылок для завода *Ч.* Тогда для полного удовлетворения спроса фирма должна поставлять оставшиеся (5000 — x) бутылок на завод A и (3500 — y) бутылок на завод B. Цель состоит в минимизации общей стоимости транспортировки C (в пенсах), где

$$C = 4x + 4y + 3(5000 - x) + 2(3500 - y),$$

следовательно,

$$C = x + 2y + 22000,$$

а целевая функция задачи имеет вид:

$$Z = C - 22000 = x + 2y.$$

Z принимает свое минимальное значение тогда, когда C принимает минимальное значение. Значения x и y, которые минимизируют Z, минимизируют также и C. Минимизация целевой функции осуществляется в условиях следующей системы ограничений:

Спрос завода A: $x < 5000$ бутылок

Спрос завода B: $y < 3500$ бутылок

Поставки из P: $x + y < 7500$ бутылок

Поставки из Q: $(5000 - x) + (3500 - y) > 4000$ бутылок

т.е.: $x + y < 4500$ бутылок

$$x, y > 0$$

Графическое изображение системы ограничений представлено на рис. 4.1.

Точка с координатами x = 4000, y = 2000 принадлежит допустимому множеству. Значение функции в этой точке

$Z = 4000 + 2 \times 2000 = 8000$ пенсов.

Типичная линия уровня целевой функции имеет вид: $8000 = x + 2y$. На рис. 4.1 она изображена пунктиром. Перемещение линии уровня в сторону уменьшения значений целевой функции приводит нас в крайнюю точку A, которая является оптимальной.

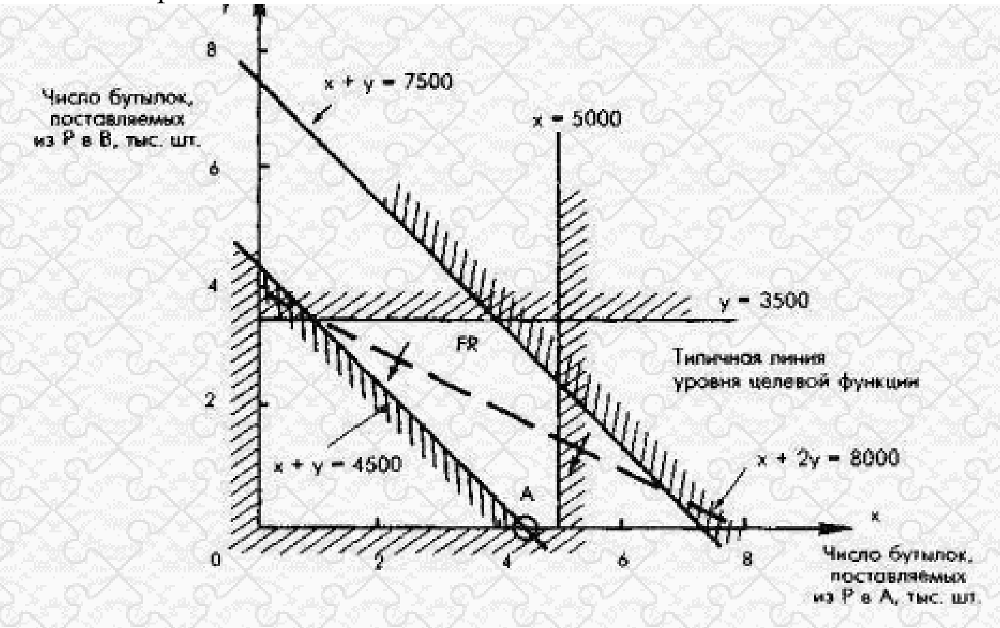


Рис. 4.1. Задача линейного программирования поставки бутылок

В этой точке x = 4500, а y = 0. Следовательно, оптимальное решение состоит в поставке из P в A 4500 бутылок, в отсутствии поставок из P в B, в поставке из Q в A 500 бутылок, а из Q в B — 3500 бутылок. Минимальная стоимость транспортировки для этого решения равна:

$C_{min} = 4500 + 2\times0 + 22000 = 26500$ евро

Резервный запас остается только на фирме P и составляет 3000 единиц. Начиная решать задачу, мы предполагали, что именно это решение минимизирует стоимость перевозки. Теперь мы доказали, что это действительно так.

4.2. Алгоритм решения транспортной задачи

Задачу, рассмотренную в 4.1, можно решить, используя **алгоритм решения транспортной задачи.** Применение этого алгоритма требует соблюдения ряда предпосылок:

1. Должна быть известна стоимость перевозки единицы продукта из каждого пункта производства в каждый пункт назначения.
2. Запас продуктов в каждом пункте производства должен быть известен.
3. Потребности в продуктах в каждом пункте потребления должны быть известны.
4. Общее предложение должно быть равно общему спросу.

Приведенная в примере **4.1** задача удовлетворяет условиям 1-3, однако условие 4 для этой задачи не выполняется. Тем не менее, можно ввести **фиктивный** завод, потребность которого определяется разностью между общим предложением и общим спросом. Потребность фиктивного завода по данным примера 4.1 составила бы (11500-8500) = 3000 бутылок. Любые продукты, которые подлежат распределению в фиктивный пункт назначения, на деле не вывозятся из пункта производства. В случае, если общее предложение меньше общего спроса, поступают аналогичным образом, т.е. в модель вводится фиктивный поставщик, максимальный объем поставок которого равен величине неудовлетворенного спроса. Количество товаров, вывозимых из фиктивного пункта производства, характеризует величину недостающих поставок.

Алгоритм решения транспортной задачи состоит из четырех этапов:

Этап I. Представление данных в форме стандартной таблицы и поиск любого допустимого распределения ресурсов. Допустимым называется такое распределение ресурсов, которое позволяет удовлетворить весь спрос в пунктах назначения и вывезти весь запас продуктов из пунктов производства.

Этап 2. Проверка полученного распределения ресурсов на оптимальность

Этап 3. Если полученное распределение ресурсов не является оптимальным, то ресурсы перераспределяются, снижая стоимость транспортировки.

Этап 4. Повторная проверка оптимальности полученного распределения ресурсов.

Данный итеративный процесс повторяется до тех пор, пока не будет получено оптимальное решение.

4.3. Поиск начального распределения ресурсов

Начальное распределение ресурсов может быть получено с помощью любого метода, позволяющего найти допустимое решение задачи. Однако при систематическом решении таких задач можно разработать методы, позволяющие получать более выгодные начальные решения. Мы остановимся на двух методах нахождения начального распределения ресурсов — **методе минимальной стоимости и методе Вогеля.** Алгоритмы этих методов рассматриваются в примере **4.2.**

Пример 4.2. Три торговых склада — P, Q, R — могут поставлять некоторое изделие в количестве 9, 4 и 8 единиц соответственно. Величины спроса трех магазинов розничной торговли, находящихся в пунктах A, B и C, на это изделие равны 3, 5 и 6 единицам соответственно. Какова минимальная стоимость транспортировки изделий от поставщиков потребителям? Единичные издержки транспортировки приведены в табл. 4.2.

Таблица 4.2. **Издержки транспортировки, объемы потребностей и предложения**

Поставщик	*Транспортные издержки для магазинов, 00 евро за единицу*			*Общий объем, предложения*
	A	B	C	
P	10	20	5	9
Q	2	10	8	4
R	1	20	7	8
Общий объем спроса	3	5	6	

Решение

В нашем распоряжении имеется информация об издержках, предложении изделий и потребностях в них, но общее предложение превышает общий спрос. Общее количество изделий, которое могут поставить все склады, равно 21, однако розничным магазинам необходимо только 14 изделий. Следовательно, необходимо ввести фиктивный розничный магазин, потребность которого будет равна 7 изделиям, определяющим избыток предложения. Фактически эти 7 изделий не будут вывезены с торговых складов, поэтому предполагается, что издержки транспортировки для них будут равны нулю. Ниже приводится первая транспортная таблица:

Таблица 4.3. **Сбалансированная транспортная таблица**

Поставщик	*Транспортные издержки для магазинов, 00 евро за единицу*				*Общий объем предложения*
	A	*B*	C	*Фиктивный*	
P	10	20	5	0	9
Q	2	10	8	0	4
R	1	20	7	0	8
Общий объем спроса	3	5	6	7	21

Для нахождения начального допустимого распределения ресурсов будем использовать метод минимальной стоимости, а затем метод Вогеля. Тем не менее следует иметь в виду, что на практике требуется применение только одного из методов.

МЕТОД 1. МЕТОД МИНИМАЛЬНОЙ СТОИМОСТИ

1. В клетку с минимальной единичной стоимостью записывают наибольшее возможное количество продукта.
2. Производится корректировка оставшихся объемов предложения и потребностей.
3. Выбирается следующая клетка с наименьшей стоимостью, в которую помещается наибольшее возможное количество продукта, и т.д. до тех пор, пока спрос и предложение не станут равными нулю.
4. Если наименьшее значение стоимости соответствует более чем одной клетке таблицы, выбор осуществляется случайным образом.

В табл. 4.4 стоимость транспортировки находится в верхнем правом углу каждой клетки, внутри прямоугольника. Индексы, соответствующие количествам продукта, характеризуют последовательность распределения ресурсов и облегчают понимание процедуры распределения. Прочерки в клетках — отсутствие предложения или спроса, соответствующих этим клеткам.

1. Наименьшая стоимость транспортировки равна нулю. Следовательно, можно выбрать любую из клеток (P, фиктивный), (Q, фиктивный) или (R, фиктивный). Пусть выбрана клетка(P, фиктивный), в соответствии с алгоритмом в ней помещается максимальное количество продукта, равное 7 единицам. Предложение в P и спрос фиктивного магазина уменьшаются на 7. Затем в клетках, которые уже нельзя использовать в дальнейшем распределении перевозок, ставится прочерк; в нашем случае это клетки (Q, фиктивный) и (R, фиктивный).

Таблица 4.4. **Начальное распределение ресурсов, полученное методом минимальной стоимости**

Торговый Зал	Розничный магазин				Общее предложение
	A	B	C	Фиктивный	
P	10	20	5	0	9 2 0
	-	-	2_3	7_1	
Q	2	10	8	0	4 0
	-	4_5	-	-	

R	1	20	7	0	8 5 1 0
	3_2	1_6	4_4	-	
Общая потребность	30	510	640	70	21

2. Клеток с нулевой стоимостью больше нет, поэтому выбирается клетка (R,A), которой соответствует наименьшая стоимость, равная 1. В данной клетке размещается наибольшее возможное количество продукта, равное 3. Затем производится корректировка итоговых значений спроса и предложения, соответствующих данным строке и столбцу, а в клетках (P,A) и (Q,A), которые нельзя использовать в дальнейшем, ставится прочерк.

3. Наименьшая стоимость перевозки равна 5 и соответствует клетке (P,C). В данной клетке размещаются дне единицы изделия, оставшиеся на складе P. Производится корректировка итоговых значений соответствующих строки и столбца, а в остальных клетках строки P ставится прочерк.

4. Наконец, оставшееся количество продукта распределяется последовательно *и* клетки (R,C), (Q,B) и (R,B),

Если распределение является допустимым, то объемы предложения на складах и объемы потребностей во всех магазинах должны быть равны нулю. Полученное выше распределение перевозок является допустимым.

Стоимость = (3 × 1) + (4 × 10) + (1 × 20) + (2 × 5) + (4 × 7) + (7 × 0) = 101 00 евро.

Мы еще не можем сказать, является ли данное распределение перевозок наиболее дешевым, однако оно позволяет получить некоторую реальную стоимость.

МЕТОД 2. МЕТОД ВОГЕЛЯ

В данном методе используется штрафная стоимость. Штрафная стоимость для каждой строки и столбца — разность между наиболее дешевым маршрутом и следующим за ним с точки зрения критерия минимизации стоимости перевозок.

Суть метода состоит в минимизации этих штрафов.

1. Чтобы вычислить значения штрафной стоимости для каждой строки и столбца, необходимо найти клетки с наименьшей стоимостью и ближайшим к ним значением стоимости. Для каждой строки и столбца наименьшее значение стоимости вычитается из ближайшего к нему значения, найденного по критерию минимизации стоимости. Такая процедура позволяет получить значения штрафов за отсутствие перевозок в клетках с наименьшей стоимостью.

2. Выбирается строка или столбец с наибольшим значением штрафной стоимости, и в клетку с наименьшим значением стоимости перевозки для данной строки и столбца помещается наибольшее возможное количество продукта. Такая процедура позволяет избежать назначения высоких штрафов.

3. Как и в предыдущем методе, производится корректировка итоговых значений по строкам и столбцам таблицы.

4. В строках или столбцах, в которых предложение или спрос приняли нулевые значения, ставится прочерк во всех клетках, в которых отсутствуют перевозки, так как эта клетки нельзя использовать в процессе дальнейшего распределения перевозок.

5. Производятся возврат к, шагу I и перерасчет штрафных стоимостей без учета клеток, в которых указаны перевозки, или клеток, в которых стоит прочерк.

Указанные шаги повторяются до тех пор, пока весь сирое не будет удовлетворен. Индексы, соответствующие количествам перевозок, отражают порядок выбора штрафных стоимостей и распределения перевозок.

После третьего распределения продукта оставшееся его количество распределяется по клеткам транспортной таблицы однозначно. Оставшийся продукт помешается в клетки (Р,В), (Р,С) и (Р, фиктивный).

Стоимость = $(1\times 20+ 6\times5+ 2\times0 + 4x10 + 3\times1+5\times0)$= 9300 евро.

Как и в предыдущем случае, мы еще не знаем, является ли данное решение оптимальным, однако, можно с уверенностью утверждать, что план перевозок, полученный методом Вогеля, более дешевый по сравнению с планом, стоимость транспортировки для которого составила 10100, полученная методом минимальной стоимости.

Таблица 4.5. **Начальное распределение перевозок, полученное методом Вогеля**

Торговый склад	Розничный магазин				Общее предложение	Штрафная стоимость1 2 3
	A	B	C	фиктивный		
P	10	20	5	0	~~9 8 2 0~~	5 5 5
	-	1	6	2		
Q	2	10	8	0	~~4 0~~	2 - -
	-	4_1	-	-		
R	1	20	7	0	~~8 5 0~~	1 1 7_3
	3_2	-	-	5_3		
Общая потребность	~~3~~ 0	~~510~~	~~6~~ 0	~~420~~	21	
1-й штраф 2-й штраф 3-й штраф	19_2-	$10_1 00$	222	000		

4.4. Проверка на оптимальность

Чтобы осуществить проверку оптимальности, необходимо определить, является ли начальное распределение перевозок базисным, т.е. находится ли полученное решение в крайней точке допустимого множества. Представленное в таблице 4.4.

распределение перевозок является допустимым решением, т.е. лежит внутри или на границе допустимого множества. Если распределение перевозок является базисным, каждому ограничению должна соответствовать одна базисная переменная. Задача для m торговых складов и n розничных магазинов (включая фиктивный) содержит (m + n - 1) независимых ограничений. Следовательно, базисное решение должно размещаться в (m + n - 1) клетках транспортной таблицы. Все (m + n- 1) переменные должны занимать независимые позиции. Однако на данной стадии нет необходимости проявлять беспокойство по поводу независимости переменных, поскольку в процессе проверки решения на оптимальность любые нарушения будут выявлены.

Если распределение перевозок включает (m + n - 1) независимую переменную, то к нему непосредственно молено применять методы проверки оптимальности. Если же число переменных меньше указанного количества, то критерий проверки оптимальности необходимо модифицировать так, как это будет показано и 4.6 Однако если число переменных превышает (m + n - 1), процедура распределения перевозок проведена некорректно. В этом случае должны существовать варианты такого перераспределения перевозок, которые при меньшей стоимости содержат требуемое число переменных.

Обратимся в данным примера 4.2 и проверим каждое из полученных распределений перевозок на базисность. В нашей таблице 3 строки и 4 столбца, следовательно, базисное решение должно содержать (3 + 4 - 1) = 6 заполненных клеток. Можно легко убедиться, что это верно для обоих методов распределения перевозок. Кроме того, переменные решения, полученные с помощью обоих методов, находятся в различных точках допустимого множества. Следовательно, процедуру проверки можно применять, не прибегая к каким-либо модификациям

Проверка исходного распределения перевозок производится для того, чтобы определить, является ли данный, вариант наиболее дешевым для транспортировки, и, если это не так, какие изменения следует внести в данное распределение. Ниже будут изложены два метода проверки решения на оптимальность. В **методе ступенек** рассчитываются значения стоимости неиспользованных клеток, или теневые издержки. Сама процедура довольно длительная и кропотливая, однако, понимание ее сущности не представляет затруднений. Метод МОДИ **(модифицированных распределений)** — это математический алгоритм, позволяющий получить те же значения теневых издержек, причем гораздо быстрее, однако, этот метод более сложен для понимания. В обоих методах в случае, если распределение перевозок является неоптимальным, для перехода к следующему базисному распределению используется ступенчатая процедура. Как только получено базисное решение, алгоритм позволяет осуществить переход от одной крайней точки допустимого множества к другой до тех пор, пока не будет достигнуто оптимальное решение.

Пример 4.3. Для иллюстрации применения данного алгоритма используем распределение перевозок, полученное методом минимальной стоимости. Данное распределение приводится в табл. 4.6.

Ступеньками называются точки, в которые производится распределение перевозок - (P,C), (P, фиктивный), (Q,B), (R,A), (R,B) и (R,C). Выбирается одна из пустых клеток и предполагается, что в нее перемещается одна единица продукта. Такая процедура нарушает баланс итоговых значений столбца или строки, на пересечении которых лежит данная клетка. Затем для восстановления баланса производится корректировка количества перевозимого продукта в некоторых заполненных клетках. Эти заполненные клетки, или ступеньки, используются при вычислении стоимости перевозки единицы продукта.

Таблица 4.6. **Начальное распределение, полученное методом минимальной стоимости**

Торговый склад	*Розничный магазин*				*Общее предложение*
	A	*B*	C	*фиктивный*	
P	10	20		0	9
	-	-	2	7	
Q	2	20	8	0	4
	-	4	-	-	
R	1		7	0	8
	3	1	4	-	
Общая потребность	3	5	6	7	21

Если значение стоимости положительное, то привлечение пустой клетки увеличит общую стоимость транспортировки, а это невыгодно. Если же значение стоимости отрицательное, использование пустой клетки, напротив, снижает общую стоимость транспортировки. Последнее означает, что полученное распределение перевозок является неоптимальным, и при использовании данной незаполненной клетки можно получить лучшее решение задачи.

Какая из пустых клеток будет выбрана в начале процедуры, значения не имеет. Выберем клетку (P,A). Добавим в нее одну единицу изделия. Теперь полученное распределение является несбалансированным. Розничный магазин A получает 4 единицы изделия, в то время как его потребность — 3. Торговый склад Р является поставщиком 10 изделий, тогда как максимальный объем его предложения равен 9. Необходимо произвести корректировку столбца А и строки Р. Для восстановления баланса в столбце А необходимо вычесть одно изделие из ступеньки (R,A). Эта мера корректирует столбец А, но нарушает баланс строки R, уменьшая соответствующее предложение с 8 до 7 единиц.

Можно осуществить перебалансировку строки Р вычитанием одного изделия либо из клетки (Р,С), либо из клетки (Р, фиктивный). Если мы выберем клетку (Р, фиктивный), то в фиктивном столбце нет больше заполненных клеток, которые можно было бы использовать в дальнейшей корректировке этого столбца, следовательно, данный выбор неприемлем. Корректировку можно осуществлять только помощью тех клеток, которые уже заполнены на настоящий момент. Поэтому мы должны выбрать клетку (Р,С). Из (Р,С) вычитаем одно изделие. Это корректирует баланс по строке Р, но нарушает его по столбцу С. На данном этапе проблема несбалансированности связана со строкой R и столбцом С. Их можно скорректировать одновременно, добавив одно изделие в (R,С). Схематично процесс заполнения пустой клетки (Р,А) и восстановления баланса распределения перевозок показан в табл. 4.7.

Денежный эффект от перемещения одного изделия в клетку (Р,А) рассчитывается следующим образом:

+ 1 × стоимость (Р,А) - 1 × стоимость (R,A) + 1 × стоимость (R,C) - 1 × стоимость (Р,С) = + (1 × 10) - (1 × 1) + (1 × 7) - (1 × 5) = +11 00 евро за 1 изделие.

Таблица 4.7. **Проверка пустой клетки (Р,А)** *Изменение натурального объема, изделий*

	A	C
P	Клетка, подвергнутая проверке + 1	Заполненная клетка - 1
R	Заполненная клетка - 1	Заполненная клетка + 1

Использование клетки (Р,А) увеличило бы стоимость транспортировки на 11 00 евро за каждое изделие, перевозимое из Р в А. Значение теневой цены является положительным, следовательно, использование данной клетки нежелательно.

Мы возвращаемся к исходному распределению перевозок и проводим последовательную проверку остальных пустых клеток. Выберем клетку (R, фиктивный), а для иллюстрации натуральных и стоимостных изменений, связанных с перемещением одной единицы изделия в клетку (R, фиктивный), используем ступеньки (Р, фиктивный), (Р,С) и (R,С).

Таблица 4.8. **Проверка пустой клетки (R, фиктивный) Изменение натурального объема - изделий**

	С	*Фиктивный*
Р	Заполненная клетка + 1	Заполненная клетка - 1
R	Заполненная клетка -1	Клетка, подвергнутая проверке + 1

Таблица **4.9. Проверка пустой клетки (R, фиктивный)**

Стоимостные изменения, 00 евро

	С	*Фиктивный*
Р	Заполненная клетка + 5	Заполненная клетка -0
R	Заполненная клетка -7	Клетка подвергнутая проверке + 0

Стоимостные изменения от дополнения одного изделия в клетку (R, фиктивный) составили: +0-0 + 5-7 = -200 евро за 1 изделие.

Размещение перевозок в клетке (R, фиктивный) дает возможность снизить издержки транспортировки, следовательно, начальное распределение перевозок оптимальным не является. Используя клетку (R, фиктивный) и указанный ступенчатый маршрут, можно найти более дешевое решение, позволяющее сэкономить 200 евро за каждую единицу изделия, помещаемую в данную клетку. Однако проверку пустых клеток необходимо завершить, поскольку могут существовать клетки, использование которых позволяет получить еще большую экономию.

Теперь построим ступенчатый путь для пустой клетки (Q, фиктивный). Необходимо учитывать, что для последующего осуществления балансировки движение можно осуществлять только через заполненные клетки. В этом случае цикл из четырех шагов построить уже невозможно. Нам приходится выбирать более сложный .маршрут. В клетку (Q, фиктивный) поместим одно изделие. Строка Q и фиктивный столбец содержат только по одной заполненной клетке. Предположим, что мы приняли решение двигаться из (Q, фиктивный) в (Q.B). Для того, чтобы сбалансировать, строку Q, из этой клетки вычтем одно изделие. Восстановить баланс для столбца В можно только с помощью клетки (R,B), следовательно, в нее необходимо добавить одно изделие. Балансировку строки R можно осуществить через клетки (R,A) и (R.C), но поскольку (R,A) — единственная заполненная клетка *и* столбце А; ее использовать нельзя. Если бы маршрут проходил через данную клетку, мы не могли бы сбалансировать столбец А. Объем перевозок в (R,C) уменьшается на одно изделие. Оставшаяся часть маршрута очевидна. Восстановление баланса в столбце С производится увеличением перевозок в (P,C) на одну единицу, а баланс строки Р достигается вычитанием одного изделия из (Р, фиктивный). Последний шаг позволяет также сбалансировать фиктивный столбец и замкнуть цикл. Следует помнить, что построение замкнутого цикла внутри транспортной таблицы, который начинается и заканчивается в выбранной пустой точке, возможно только в случае, если исходное распределение перевозок является базисным. Натуральные и стоимостные изменения, соответствующие построенному циклу, показаны в табл. 4.10 и 4.11.

Чистый стоимостный эффект от размещения в пустой клетке (Q, фиктивный) составит:

+ 0 - 0 + 5 - 7 + 20 - 10 = +8 00 евро за изделие.

В случае заполнения данной пустой клетки общая стоимость транспортировки увеличится на 8 00 евро за 1 изделие. Поэтому мы не будем вводить рассмотренные изменения. Теневые цены для оставшихся пустых клеток рассчитываются аналогичным образом. В табл. 4.12 показано все множество значений теневых цен (они обведены в кружочки).

Таблица 4.10. Проверка пустой клетки (Q, фиктивный)

Натуральные изменения, изделий

	B	C	Фиктивный
P	Пустая	Заполненная +1	Заполненная −1
Q	Заполненная −1	Пустая	Проверяемая +1
R	Заполненная +1	Заполненная −1	Пустая

Таблица 4.11. Проверка пустой клетки (Q, фиктивный)

Стоимостные изменения, ф. ст.

	B	C	Фиктивный
P	Пустая	Заполненная +5	Заполненная −0
Q	Заполненная −10	Пустая	Проверяемая +0
R	Заполненная +20	Заполненная −7	Пустая

Таблица 4.12. Проверка начального распределения перевозок на оптимальность — метод ступенек

Торговый склад	Розничный магазин				Общее предложение
	A	B	C	фиктивный	
P	10 / (+11)	20 / (+2)	5 / 2	0 / 7	9
Q	2 / (+11)	10 / 4	8 / (+11)	0 / (+8)	4
R	1 / 3	20 / 1	7 / 4	0 / (−2)	8
Общая потребность	3	5	6	7	21

Это решение является неоптимальным, так как клетке (R, фиктивный) соответствует отрицательная теневая цена, разная -2 00 евро Стоимость транспортировки в 101 00 евро можно уменьшить, если ввести эту клетку и соответствующий ступенчатый цикл в распределение перевозок, что позволит достичь экономии стоимости в 2 00 евро на 1 изделие.

Мы продолжим решать этот пример и найдем оптимальное распределение перевозок в **4.5,** но сначала рассмотрим метод МОДИ вычисления теневых цен. Алгоритм метода ступенек является довольно трудоемким, и в процессе его реализации легко допустить ошибки. Использование оптимальности метода МОДИ в данном случае является гораздо более разумным. Хотя его алгоритм не позволяет выявить натуральные изменения, однако с его помощью можно получить те же значения теневых цен, затратив при этом гораздо меньше усилий.

Для начала рассмотрим только заполненные клетки. Для этих клеток каждое значение единичной стоимости c,: разделяется на две компоненты — u_i для строк и v_j для столбцов. Например, единичная стоимость для клетки **(R,B),** лежащей на пересечении строки 3 и столбца 2, равна c_{32} = 20 00 евро В ней можно выделить компоненту уз, соответствующую строке, и компоненту v_2, соответствующую столбцу, т.е. $c_{32} = 20 = u_3 + v_2$.

Теневые цены для каждой пустой (небазисной) клетки можно найти из соотношения $s_{ij} = c_{ij}-(u_i + v_j)$.

Эта теневая цена отражает дополнительную стоимость транспортировки единицы изделия из пункта i в пункт j. Если все теневые цены положительны или равны нулю, т.е. s_{ij}, ^{3} 0, то полученное решение является оптимальным. В этом случае перемещение единицы изделия в пустую клетку, которой соответствует положительная теневая цена, только увеличит общую стоимость транспортировки. Если лее соответствующая теневая цена имеет нулевое значение, то общая стоимость транспортировки не изменится.

Пример 4.4. Обратимся вновь к начальному распределению перевозок, полученному методом минимальной стоимости. Проведем проверку данного распределения на оптимальность с помощью метода МОДИ. Ниже воспроизведено начальное распределение перевозок (см. табл. 4.13).

Расчет компонент для строк u_i и компонент для столбцов v_j производится с помощью заполненных клеток. Заполненные клетки (P,C), (P. фиктивный), (O,B). (R,A), (R,B) и (R,C) приводят к системе из шести уравнении. Эти шесть уравнений содержат семь переменных, поэтому система имеет не одно решение. Поскольку множество значений переменных является совместимым, фактические значения, присваиваемые компонентам, не играют никакой роли.

Таблица 4.13. **Начальное распределение перевозок, полученное методом минимальной стоимости**

Торговый склад	Розничный магазин				Общее предложение
	A	B	C	Фиктивный	
P	10	20	5	0	9
	-	-	2	7	
Q	2	10	8	0	4
	-	4	-	-	
R	1	20	7	0	8
	3	1	4	-	
Общая потребность	3	5	6	7	21

Торговый склад	Розничный магазин				Общее предложение
	A	B	C	Фиктивный	
P	10	20	5	0	9
	-	-	2	7	
Q	2	10	8	0	4
	-	4	-	-	
R	1	20	7	0	8
	3	1	4	-	
Общая потребность	3	5	6	7	21

$C_{13}= 5 = u_1 {}^{+} v_3$ для заполненной клетки (P,C);

$C_{14}= 0 = u_1 + v_4$ для заполненной клетки (P, фиктивный);

$C_{33}= 7 = u_3 + v_3$ для заполненной клетки (R,C);

$C_{31}= 1 = u_3 + v_1$ для заполненной клетки (R,A);

$C_{32}= 20 = u_3 + v_2$ для заполненной клетки (R,B);

$C_{22}= 10 = U2 + v_2$ для заполненной клетки (Q,B).

Какой-либо из компонент присваивается некоторое значение, по которому из соответствующих уравнений рассчитываются значения остальных компонент. Положим u_1 — 0. Из этого следует, что $v_3 = 5$, $v_4 = 0$, $u_3 = 2$, $v_1 = - 1$, $v_2 = 18$ и $u_2 = - 8$. Теперь, пользуясь соотношением $s_{ij} = c_{ij} - (u_i + v_j)$, мы можем найти значения теневых цен, соответствующих незаполненным клеткам.

Подставив найденные значения компонент u_i и v_j , получим следующие теневые цены:

$s_{11} =10 — (0 — (— 1)) = +11$ для пустой клетки (P,A);

$s_{12} =20 - (0 +18) = + 2$ для пустой клетки (P,B);

$s_{21} = 2 — (—8 — 1) = +11$ для пустой клетки (Q,A);

s_{23} = 8 -(-8+ 5) =+11 для пустой клетки (Q,C);

s_{24} = 0 - (-8 + 0) = + 8 для пустой клетки (Q, фиктивный);

s_{34} = 0 - (2 + 0) = - 2 для пустой клетки (R, фиктивный).

Эти значения заносятся в транспортную таблицу так, как это показано в табл. 4.14.

Таблица 4.14. **Применение метода МОДИ для проверки на оптимальность начального распределения перевозок**

Торговый склад	Розничный магазин				Общее предложение
	A	B	C	фиктивный	
P	10 +11	20 +2	5 2	0 7	$u_1=0$ 9
Q	2 +11	10 4	8 +11	0 +8	$u_2=-8$ 4
R	1 3	20 1	7 4	0 −2	$u_3=2$ 8
Общая потребность	3	5	6	7	21
	$v_1=-1$	$v_2=18$	$v_3=5$	$v_4=0$	

Ключ:

Теневые цены совпадают с теми значениями, которые были найдены методом ступенек и представлены в табл. 4.12. Маршрут (R, фиктивный) имеет отрицательную теневую цену - 2 00 евро, следовательно, полученное решение является неоптимальным. Необходимо осуществить перераспределение перевозимых изделий с использованием указанной клетки и соответствующего ей ступенчатого цикла, что позволит снизить стоимость транспортировки.

4.5. Поиск оптимального решения

Итеративная процедура нахождения оптимального распределения перевозок может быть представлена следующим образом:

1. Если транспортная таблица содержит более одной пустой клетки с отрицательным значением теневой цены, то выбирается та из них, которой соответствует наибольшее значение по абсолютной величине.

2. Построение для этой клетки ступенчатого цикла аналогично описанному выше.

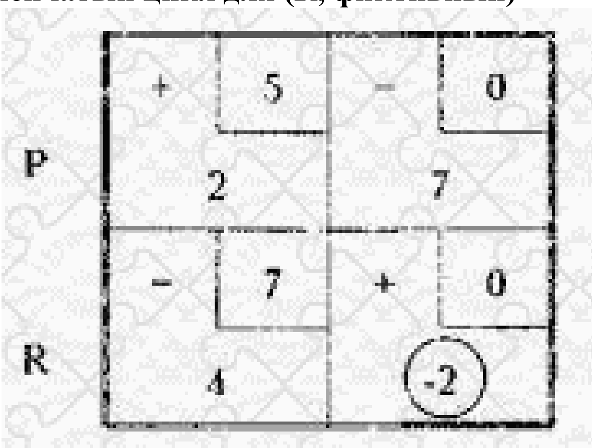
3. Выявление клеток, количество перевозок в которых необходимо сократить, и определение величины этих сокращений таким образом, чтобы ни одно из значений перевозок не оказалось отрицательным. Максимальное количество изделий, соответствующее выбранной клетке, определяется минимумом из этих значений. Перераспределение производится только для клеток, входящих в построенный цикл.

4. Нет никаких гарантий, что в полученном распределении нельзя предпринять никаких улучшений. Поэтому новое решение необходимо проверить на оптимальность с использованием метода МОДИ. Утверждать, что найденная стоимость транспортировки является минимальной, можно только в том случае, если все теневые цены положительны или равны нулю.

Продолжение примера 4.4. Единственной клеткой с отрицательным значением теневой цены, равным - 2 00 евро, является клетка (R, фиктивный). В эту клетку желательно разместить максимально возможное количество изделий.

Ниже приведен ступенчатый цикл для клетки (R, фиктивный), которая имеет значение теневой цены, равное -2 00 евро, а также исходное распределение перевозок и единичные издержки.

Таблица 4.15. **Ступенчатый цикл для (R, фиктивный)**



Знак "+" означает увеличение количества перевозимых изделий в данной клетке; знак "-" — уменьшение соответствующего количества изделий.

Клетки со знаком "—" — это клетки (R, фиктивный) и (R,C), объем перевозок в которых равен 7 и 4 изделиям соответственно. Минимальным значением для клеток, отмеченных знаком "-", является 4, что означает, что внутри цикла можно осуществлять перемещение четырех изделий, добавляя их в клетки со знаком "+" и вычитая из клеток со знаком "-". Общая экономия стоимости транспортировки составит в данном случае (2 x 4) = 8 00 евро Изменения, внесенные в транспортную таблицу, отражены в табл. 13.16.

Таблица 4.16 **Перераспределение перевозок**

Торговый склад	Розничный магазин				Общее предложение
	A	B	C	Фиктивный	
P	10	20	5	0	9
	-	-	2+4	7-4	
Q	2	10	8	0	4
	-	4	-	-	
R	1	20	7	0	8
	3	1	4-4	0+4	
Общая потребность	3	5	6	7	21

Данное решение по-прежнему является базисным, так как число заполненных клеток равно 6. Проверим данное решение иа оптимальность с использованием метода МОДИ. Обратившись к заполненным клеткам (P,C), (P. фиктивный), (Q,B), (R,A), (R,B) и (R, фиктивный), получим:

$c_{13}= 5 = u_1 + v_3$ Положим $u_1 = 0$, тогда $v_3 = 5$;

$c_{14}= 0 = u_1 + v_4 v_4 = 0$;

$c_{34}= 0 = u_3 + v_4 u_3 = 0$;

$c_{31}= 1 = u_3 +v_1\ v_1 = 1$;

$c_{32}= 20 = u_3 + v_2\ v_2 = 20$;

$c_{22}= 10 = u_2 + v_2 u_2 = -10$.

Таким образом, теневые цены соответствующие пустым клеткам, будут равны:

$s_{ij} = c_{ij}-(u_i + v_j)$;
$s_{11} = 10 - (0+ 1) = +9$;
$s_{12} = 20 - (0 +20) = 0$;
$s_{21} = 2 - (-10+ 1) = +11$;
$s_{23} = 8 - (-10 + 5) = +13$;
$s_{24} = 0 - (-10 + 0) = +10$;
$s_{33} = 7 - (0 + 5) = + 2$.

Поскольку ни одно из значений теневых цен не отрицательно, полученное решение является оптимальным.

Минимальная стоимость равна: 101 + (4 x (- 2)) = 93 00 евро

Таблица 4.17. **Проверка распределения перевозок на оптимальность с использованием метода МОДИ**

Торговый склад	Розничный магазин				Общее предложение	
	A	B	C	Фиктивный		
P	10 +9	20 0	5 6	0 3	9	$u_1 = 0$
Q	2 +11	10 4	8 +13	0 +10	4	$u_2 = -10$
R	1 3	20 1	7 +2	0 4	8	$u_3 = 0$
Общая потребность	3	5	6	7	21	
	$v_1 = 1$	$v_2 = 20$	$v_3 = 5$	$v_4 = 0$		

Решение.

•Шесть изделий перевозятся со склада P в розничный магазин C, три изделия остаются на складе P.

• Четыре изделия перевозятся со склада Q в магазин B.

• Со склада R перевозятся три изделия в магазин A, одно —в магазин B, а четыре изделия остаются на складе.

В случае если и повторное распределение перевозок не является оптимальным, процедуру перераспределения повторяют необходимое число раз.

Следует отметить, что минимальная стоимость была достигнута еще в исходном распределении перевозок, полученном методом Вогеля. Такая ситуация в задачах небольшой размерности бывает довольно часто. Обычно метод Вогеля позволяет получить наилучшее начальное решение, однако нет никаких гарантий, что применение этого метода сразу обеспечивает получение оптимального решения. Следует также отметить, что распределение перевозок, полученное методом Вогеля, несколько отличается от распределения, найденного выше (см. пример 4.2). Данная задача имеет альтернативное оптимальное решение:

• Со склада Р одно изделие вывозятся в магазин В, шесть — в магазин С, а два — остаются на складе;

• Со склада Q четыре изделия вывозится в магазин В;

• Со склада R три изделия вывозятся в магазин А, а пять остаются на складе.

О существовании альтернативного оптимального решения говорит и нулевое значение теневой цены, соответствующей клетке (Р,В). Нулевые значения теневых цен всегда связаны с существованием альтернативных оптимальных распределении перевозок, которым соответствует одно значение общей стоимости транспортировки.

4.6. Анализ чувствительности

Итоговое распределение перевозок, а также значения теневых цен, соответствующие пустым клеткам, можно использовать при проведении анализа модели на чувствительность. Теневая цена показывает, на сколько увеличится общая стоимость, если в пустую клетку поместить одну единицу продукта. Если нам придется осуществить перевозку одного изделия с торгового склада Q в розничный магазин С, увеличение стоимости составит 13 00 евро, что гораздо выше, чем стоимость самого маршрута (Q,C), равная 8 00 евро Дополнительное увеличение стоимости появляется в связи с перебалансировкой распределения перевозок, при которой применяется нижеследующий ступенчатый цикл.

Таблица 4.18. Ступенчатый цикл для (Q.C) ***Натуральные изменения, изделий***				**Таблица 4.19.Ступенчатый цикл для (Q,C)** ***Стоимостные изменения, евро***			
	B	C	*Фиктивный*		B	C	*Фиктивный*
	Пустая	Заполненная -1	Заполненная +1		Пустая	Заполненная -5	Заполненная +0

	Заполненная -1	Проверяемая +1	Пустая		Заполненная -10	Проверяема я +8	Пустая +8
	Заполненная +1	Пустая	Заполненная -1		Заполненная +20	Пустая	Заполненная -0

Чистые изменения стоимости составят:

+ 8 - 5 + 0 - 0 + 20 - 10 = 13 00 евро за изделие.

Максимальное число изделий, которое можно перемещать внутри цикла, — это минимальное из значений, стоящих в клетках со знаком "-", т.е.

(P,C) = 6, (R, фиктивный) = 4 и (Q.B) = 4.

Следовательно, максимальное количество изделий, подлежащих перемещению, равно 4.

О нулевом значении теневой цены в клетке (P,B) мы уже упоминали в предыдущем разделе. Ступенчатый цикл для данной пустой клетки имеет следующий вид:

Таблица **4.20 Ступенчатый Цикл** Таблица **4.21 Ступенчатый Цикл**

Натуральные изменения изделий

	B	Фиктивный
P	Проверяемая +1	Заполненная −1
R	Заполненная −1	Заполненная +1

Стоимостные изменения, ф. ст.

	B	Фиктивный
P	Проверяемая +20	Заполненная −0
R	Заполненная −20	Заполненная −0

Можно поместить некоторое число изделий в клетку (P,B), причем чистый стоимостный эффект будет равен нулю. Это означает, что существует альтернативное распределение перевозок, которое также позволяет получить минимальную стоимость в 93 00 евро Максимальное количество изделий, которое можно добавить в клетку (P,B), — это минимум из значений, указанных в клетках со знаком "-": (R,B) = 1 и (P, фиктивный) = 3. Следовательно, только одно изделие можно, перемещая по циклу, поместить в клетку (P.B).

Теневые цены можно использовать также в качестве индикаторов изменений стоимости транспортировки, соответствующей пустой клетке, которые оказывают воздействие на оптимальное распределение перевозок. Например, теневая цена пустой клетки (R,C) равна 2 00 евро, а фактическая стоимость транспортировки —

7 00 евро за 1 изделие. Следовательно, для того, чтобы использование данной клетки в распределении перевозок привело к снижению общей стоимости

транспортировки, фактическую единичную стоимость, соответствующую этой клетке, необходимо снизить как минимум до(7-2) = 500 евро

Действие стоимостных изменений в заполненных клетках выявить гораздо сложнее. При снижении издержек увеличение числа изделий в данной клетке выгодно. Если же издержки, стоящие в заполненных клетках, возрастает, то при достижении ими определенного значения использование этой клетки является нежелательным, и необходимо осуществить переход к иному маршруту.

Рассмотрим заполненную клетку (P,C). Соответствующая ей фактическая стоимость перевозок составляет 5 00 евро за изделие. Уменьшение этой стоимости не повлияет на объем перевозок, поскольку количество изделий, указанное в данной клетке, удовлетворяет всю потребность магазина С.

Если стоимость перевозки становится больше 5 00 евро то следует обратить внимание на ступенчатые циклы, в которых задействована клетка (P,C). Эти циклы дают значения теневых цен: 13 00 евро для (Q,C) и 2 00 евро для (R,C).

8 обоих циклах клетка (P,C) помечена знаком "-", и любое увеличение стоимости на 5 00 евро повлечет за собой снижение теневых цен указанных пустых клеток.

Изменение натурального объема перевозок будет иметь место в случае, если единичная стоимость транспортировки для клетки (P,C) возрастет более чем на 2 00 евро и превысит 7 00 евро При этом теневая цена клетки (R,C) станет отрицательной. В данной ситуации использование пустой клетки (R,C) окажется выгодным, что приведет к изменению объема перевозок для (P,C).

Таким образом, для полученного оптимального распределения перевозок верхним пределом стоимости, соответствующей (P,C), является значение 7 00 евро, а нижним пределом — 0. Внутри указанного промежутка происходит изменение лишь общей стоимости транспортировки, тогда как в натуральном выражении распределение перевозок не меняется.

4.7. Модификации транспортной задачи

НЕДОПУСТИМЫЕ ПЕРЕВОЗКИ

Если перевозка из некоторого пункта производства в некоторый пункт назначения по той или иной причине невозможна, то в алгоритме решения задачи данное ограничение можно учесть, присвоив соответствующей клетке достаточно большое значение стоимости. Точное значение в данном случае неважно, однако, оно должно быть больше, чем остальные значения стоимости, указанные в таблице. Таким образом, алгоритм автоматически позволит избежать перевозок через данную клетку.

Пример 4.5. В данном примере показано применение алгоритма решения транспортной задачи в решении проблем, связанных с недопустимостью прямых перевозок товаров из пунктов производства в пункты назначения. В примере будет рассмотрено движение продукта во времени. Пусть в нашем распоряжении имеется производственный график сроком на четыре месяца, который необходимо выполнить. Ниже приведены значения спроса на продукцию и производственных мощностей.

Таблица 4.22. **Значения спроса и производственных мощностей**

Месяц	*Производственные мощности, изделий*	*Спрос, изделий*
1	300	300
2	350	275
3	325	400
4	375	300

К началу первого месяца имеется начальный запас изделий объемом 50 шт. Изделия можно производить как для удовлетворения текущего спроса, так и создания запаса для удовлетворения спроса в последующие месяцы. Если спрос на изделия в течение месяца не удовлетворяется полностью, то прибыль от продажи теряется. Издержки производства составляют 100 00 евро за единицу изделия. Стоимость хранения запасов равна 2 00 евро за единицу изделия. Каков оптимальный план производства?

Решение.

Данную ситуацию можно формализовать, используя транспортную таблицу, в которой строками являются начальный запас и объемы производства изделий в месяц, а столбцы отражают ежемесячный спрос на продукцию. Маршруты (клетки), в которых подразумевается удовлетворение спроса за текущий месяц в следующих месяцах, считаются недопустимыми. В табл. 4.23 этим клеткам соответствуют бесконечные значения стоимости.

Таблица 4.23. Данные производственного плана для месяцев 1—4

		Стоимость единицы изделия, 100 евро Месяцы				***Общее предложение***
		Ml	***M2***	***M3***	***M4***	
Запас	**Ml**	*2*	4	6	8	50
Производство	**Ml**	100	102	104	106	300

	M2	□	100	100	104	350
	M3	□	□	□	102	325
	M4	□	□	□	100	375
Общая потребность		300	275	400	300	

Решение этой транспортной задачи производится с помощью обычного алгоритма, позволяющего минимизировать стоимость выполнения производственного графика (см. пример 4.8).

ВЫРОЖДЕННОСТЬ

Решение называется вырожденным, если число перевозок в транспортной таблице меньше, чём (m + n — 1). Данную проблему можно разрешить, проставив в независимые клетки очень маленькие, по сути равные нулю объемы перевозок. Число перевозок увеличивается таким образом до (m + n - 1). Выявить клетки, которые следует использовать для этой цели, поможет алгоритм метода МОД И проверки решения на оптимальность.

Пример 4.6. Три торговых склада (X, Y и Z) могут осуществлять поставки 6, 3 и 4 единиц продукта в три магазина (L, M и N), спрос которых равен 4, 5 и 1 единицам соответственно. Значения единичной стоимости транспортировки указаны в приведенной ниже таблице.

Таблица 4.24. **Исходная информация**

Торговый склад	Магазин 100 евро/ед.			Общее предложение
	L	M	N	
X	6	4	9	6
Y	5	3	2	3
Z	2	3	6	4
Общая потребность	4	5	1	

Как следует распределить перевозки, чтобы общая стоимость транспортировки была минимальной?

Решение.

Общее предложение составляет 13 единиц, что превышает общую потребность в 10 единиц, поэтому в задачу вводится фиктивный магазин, потребность которого в продукции балансирует излишек предложения торговых складов. Чтобы найти начальное распределение перевозок, применим метод Вогеля:

Таблица 4.25. **Начальное распределение перевозок, полученное методом Вогеля**

Торговый склад	*Розничный магазин*				*Общее Предложение*	*Штрафная Стоимость 123*
	L	M	*N*	*Фиктивный*		
X	6	4	9	0	~~630~~	4_1 2 2
	-	3	-	3_1		
Y	5	3	2	0	~~3 2 0~~	2 1 2
	-	2	1_2	-		
Z	2	3	6	0	~~4 0~~	2 1 1
	4_3	-	-	-		
Общая потребность	~~4~~0	~~53~~ 0	1 0	~~3~~0	13	
1-й штраф 2-й штраф 3-й штраф	3 33_3	0 0 0	44_2-	0--		

Значение стоимости транспортировки составит:

4×300 + 0×300 + 3×200 + 2×100+2×400 = 28 00 евро

Для того, чтобы решение являлось базисным, оно должно включать (3 + 4—1) = 6 переменных, тогда как в нашей задаче число перевозок равно лишь 5. Найденное решение является вырожденным. Поступая в соответствии с алгоритмом метода МОДИ, мы должны ввести нулевую перевозку, чтобы использовать в качестве заполненной одну из пустых клеток. Этот прием позволяет получить требуемое число перевозок, равное 6. Затем можно будет рассчитать значения всех компонент u и v, а следовательно, и теневые цены.

Реализацию алгоритма метода МОДИ мы начнем, используя 5 заполненных клеток, соответствующих начальному распределению перевозок. Дополнительная нулевая перевозка будет введена только тогда, когда без нее продолжение алгоритма будет невозможно. Обратимся к данным табл. 4.26.

Таблица 4.26. **Проверка вырожденного решения на оптимальность — метод МОДИ**

Торговый склад	Розничный магазин L	M	N	Фиктивный	Общее предложение
X	6 +7	4 3	9 +6	0 3	$u_1 = 0$ 6
Y	5 +7	3 2	2 1	0 +1	$u_2 = -1$ 3
Z	2 4	3 −4	6 $\boxed{0}$	0 −3	$u_3 = 3$ 4
Общая потребность	4	5	1	3	13
	$v_1 = -1$	$v_2 = 4$	$v_3 = 3$	$v_4 = 0$	

Заполненные клетки используются для расчета соответствующих компонент по строкам и по столбцам из соотношения: $c_{ij} = u_i + v_j$. при условии, что $u_i = 0$. Значения v_2, v_4, u_2 и v_3 можно найти, не испытывая никаких затруднений, однако, значения u_3 и v_1 рассчитать нельзя. Для этого необходимо иметь дополнительную заполненную клетку.

Нулевую перевозку можно поместить в пустую клетку столбца v_1 или строки u_3. Какая из этих клеток будет выбрана, значения не имеет. Пусть выбрана клетка (Z, N). Теперь молено завершить алгоритм и найти значения теневых цен для пустых клеток из соотношения $s_{ij} = c_{ij} — (u_i + v_j)$. Соответствующие величины приведены в табл 4.26. Как видно из таблицы, в двух клетках теневые цены принимают отрицательные значения. Следовательно, полученное распределение перевозок является неоптимальным, и необходимо осуществить их перераспределение, используя при этом клетки (Z,M) или (Z, фиктивный). Начнем с клетки (Z,M), поскольку ей соответствует большее по абсолютной величине значение теневой цены. Ступенчатый цикл для клетки (Z,M) и движение объемов перевозок по входящим в него клеткам можно представить в виде табл. 4.27.

Чтобы определить число единиц, которые следует перемещать вдоль построенного цикла, обратимся к клеткам (Y,M) и (Z,N), помеченным знаком "—", количество перевозок в которых равно 2 и 0 единицам.

Таблица 4.27. **Ступенчатый цикл для клетки (Z,M)**

	M	N

Y	Заполненная - 2	Заполненная + 1
Z	Проверяемая +	Нулевая перевозка $\boxed{0}$ -

Это означает, что по циклу следует осуществлять перемещение нулевой перевозки таким образом, чтобы клетка (Z, N) снова стала пустой, а клетку (Z, M) предполагается использовать при распределении перевозок, поскольку в нее помещается нулевая перевозка. Остальные перевозки остаются без изменений. При дальнейшей проверке данного распределения на оптимальность выясняется, что значения всех теневых цен положительны. Данное распределение перевозок оптимальное. Это предполагает, что начальное решение, включающее 5 переменных, также оптимально. Обратимся к данным табл. 4.28.

Таблица 4.28. **Проверка оптимального решения — метод МОДИ**

С торгового склада	В магазин				Общее предложение
	L	M	N	фиктивный	
X	6	4	9	0	u_1=06
	+3	3	+6	3	
Y	5	3	2	0	u_2=-13
	+3	2	1	+1	
Z	2	3	6	0	u_3=-14
	4	$\boxed{0}$	+4	+1	
Общая потребность	4	5	1	3	13
	V_1 =3	v_2 = 4	v_3 = 3	v_1 = 0	

Такие результаты далеко не всегда имеют место в случае вырожденности решения. В некоторых ситуациях при перераспределении перевозок определенное количество единиц продукции помещается в клетку с нулевой перевозкой, и тем самым данная клетка вводится в новое распределение перевозок. Это приводит к исчезновению вырожденности решения. Затем, для получения улучшенного распределения перевозок, применяются обычные алгоритмы.

МАКСИМИЗАЦИЯ

Алгоритм решения транспортной задачи предполагает, что ее целевая функция стремится к минимуму, Однако если некоторая проблема требует максимизации целевой функции перед тем, как применять для решения этой задачи стандартный алгоритм, его необходимо немного модифицировать. Например, мы намерены по условиям примера 4.5 осуществить перевозку товаров таким образом, чтобы максимизировать общий доход. В этом случае нам необходима информация о единичных доходах от транспортировки товаров между всеми пунктами производства и назначения. Модификация заключается в умножении всех значений единичного дохода на (— 1), а затем поступают обычным образом.

Лабораторная работа №4

Тема: Решение транспортных задач разными методами. Excel прямой и двойственной задачи.

Цель: Приобрести навыки для построения математических моделей транспортных задач, внесение моделей в лист Excel, использование различных методов решения траспортной задачи.

Задание 1.Решить транспортную задачу с помощью надстройки Поиск решений.

Рассмотрим следующую транспортную задачу.

Для строительства четырех объектов используется кирпич, изготавливаемый на трех заводах. Ежедневно каждый из заводов может изготовить 100, 150 и 50 условных единиц кирпича (предложение поставщиков). Потребности в кирпиче на каждом из строящихся объектов ежедневно составляют 75, 80, 60 и 85 условных единиц (спрос потребителей). Тарифы перевозок одной условной единицы кирпича с каждого из заводов к каждому из строящихся объектов задаются матрицей транспортных расходов С.

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 7 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 6 \\ 8 & 10 & 20 & 1 \end{bmatrix}$$

Требуется составить такой план перевозок кирпича к строящимся объектам, при котором общая стоимость перевозок будет минимальной.

Для решения транспортной задачи на персональном компьютере с использованием EXCEL необходимо:

1. Ввести исходные данные в ячейки рабочего листа EXCEL;
2. Разметить блоки ячеек на рабочем листе EXCEL, необходимые для моделирования объемов перевозок, а также для формирования элементов математической модели и целевой функции;
3. Сформировать на рабочем листе EXCEL элементы математической модели и целевую функцию;
4. Настроить программу " Поиск решения" и выполнить ее.

Ввод исходных данных

Исходными данными для решения транспортной задачи являются:

- матрица транспортных расходов;
- предложение поставщиков;
- спрос потребителей;

Напомним, что для ввода данного в ячейку рабочего листа EXCEL необходимо:

1. Выделить ячейку;
2. Набрать вводимое данное на клавиатуре;
3. Нажать клавишу Enter.

Для наглядности блоки ячеек с введенными данными желательно обвести рамками.

Рабочий лист EXCEL с введенными исходными данными для решения транспортной задачи показан на рис 4.1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1											
2											
3			Матрица транспортных расходов						Предложение		
4									поставщиков		
5											
6			6	7	3	5			100		
7			1	2	5	6			150		
8			8	10	20	1			50		
9											
10	Спрос потребителе		75	80	60	85					
11											
12											

рис 4.1.

Формирование элементов математической модели

Элементами математической модели транспортной задачи являются следующие суммы:

$\sum_{j=1}^{n} X_{ij}$, - фактически реализовано i-ым поставщиком $i=\overline{1,m}$;

$\sum_{i=1}^{m} X_{ij}$, - фактически получено j-ым потребителями $j = \overline{1, n}$.

Для нашей задачи m=3, n=4.

Рассмотрим процесс формирования этих сумм на рабочем листе EXCEL.

Вначале сформируем $\sum_{j=1}^{4} X_{ij}$, $i = \overline{1,3}$ в блоке "Фактически реализовано".

1.Заполните ячейки блока "Матрица перевозок" (C14:F16) числом 0,01.

2.Селектируйте первую ячейку блока "Фактически реализовано" (ячейка I14);

3.Наведите курсор на кнопку $\sum$ - автосуммирование и щелкните левой клавишей мыши;

4.Нажмите клавишу Delete;

5.Селектируйте первую строку блока "Матрица перевозок" (строка C14:F14);

6.Нажмите клавишу Enter;

7.Скопируйте формулу=СУММ(C14:F14) из первой ячейки блока "Фактически реализовано" на все остальные ячейки этого блока.

Сформируем теперь $\sum_{i=1}^{3} X_{ij}$ $j = \overline{1,4}$ - в блоке "Фактически получено".

Для этого выполните следующие действия:

1.Селектируйте первую ячейку блока "Фактически получено" (ячейка C18);

2.Наведите курсор на кнопку $\sum$ - автосуммирование и щелкните левой клавишей мыши;

3.Нажмите клавишу Delete;

4.Селектируйте первый столбец блока "Матрица перевозок" (Столбец C14:C16);

5.Нажмите клавишу Enter;

6.Скопируйте формулу=СУММ(C14:C16) из первой ячейки блока "Фактически получено" на остальные ячейки этого блока.

Формирование целевой функции

Для формирования целевой функции введем вначале формулы, отражающие транспортные расходы по каждому потребителю, т.е. формулы:

$\sum_{i=1}^{3} c_{ij} x_{ij}$ $j = \overline{{}_1,4}$ в ячейки блока “Транспортные расходы по потребителям”

Для ввода этих формул выполните следующие действия:

1.Селектируйте первую ячейку блока “Транспортные расходы по потребителям” (ячейка C21);

2.Наведите курсор на кнопку $\sum$ - автосуммирование и щелкните левой клавишей мыши;

3.Нажмите клавишу “Delete ”;

4.Селектируйте первый столбец блока “Матрица Транспортных расходов” (столбец C6:C8);

5.Нажмите клавишу *;

6.Селектируйте первый столбец блока “Матрица превозок” (столбец C14:C16);

7.Активируйте строку формул, наведя на неё курсор и щелкнув затем левой клавишей мыши;

8.Нажмите одновременно три клавиши: “CTRL”+“SHIFT”+“ENTER”;

9.Скопируйте формулу {=СУММ (C6:C8*C14:C16)} в остальные ячейки блока “Транспортные расходы по потребителям”;

Сформируем теперь целевую функцию транспортной задачи, выражаемую формулой $\sum_{j=1}^{4}\sum_{i=1}^{3} c_{ij} x_{ij}$, в ячейку “Итого расходы”. Для этого:

Выделите ячейку “Итого расходы” (ячейка I21);

1. Наведите курсор на кнопку $\sum$ - автосуммирование и щелкните левой клавишей мыши;
2. Нажмите клавишу “Delete”;
3. Селектируйте блок ячеек “Транспортные расходы по потребителям”(C21:F21);
4. Нажмите клавишу “Enter”;

После формирования элементов математической модели и целевой функции транспортной задачи рабочий лист EXCEL примет вид, показанный на рис. 4.3.

Теперь можно приступить к настройке программы “Поиск решения”.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3			Матрица транспортных расходов						Предложение
4									поставщиков
5									
6			6	7	3	5			100
7			1	2	5	6			150
8			8	10	20	1			50
9									
10	Спрос потребителей		75	80	60	85			
11									
12				Матрица перевозок					Фактически
13			потреб.1	потреб.2	потреб.3	потреб.4			реализовано
14		поставщик 1	**0,01**	**0,01**	**0,01**	**0,01**			**0,04**
15		поставщик 2	**0,01**	**0,01**	**0,01**	**0,01**			**0,04**
16		поставщик 3	**0,01**	**0,01**	**0,01**	**0,01**			**0,04**
17									
18	Фактически получено		**0,03**	**0,03**	**0,03**	**0,03**			
19									
20	Транспортные расходы								расходы
21	по потребителям		**0,15**	**0,19**	**0,28**	**0,12**		Итого	**0,74**
22									
23									

Рисунок 4.3

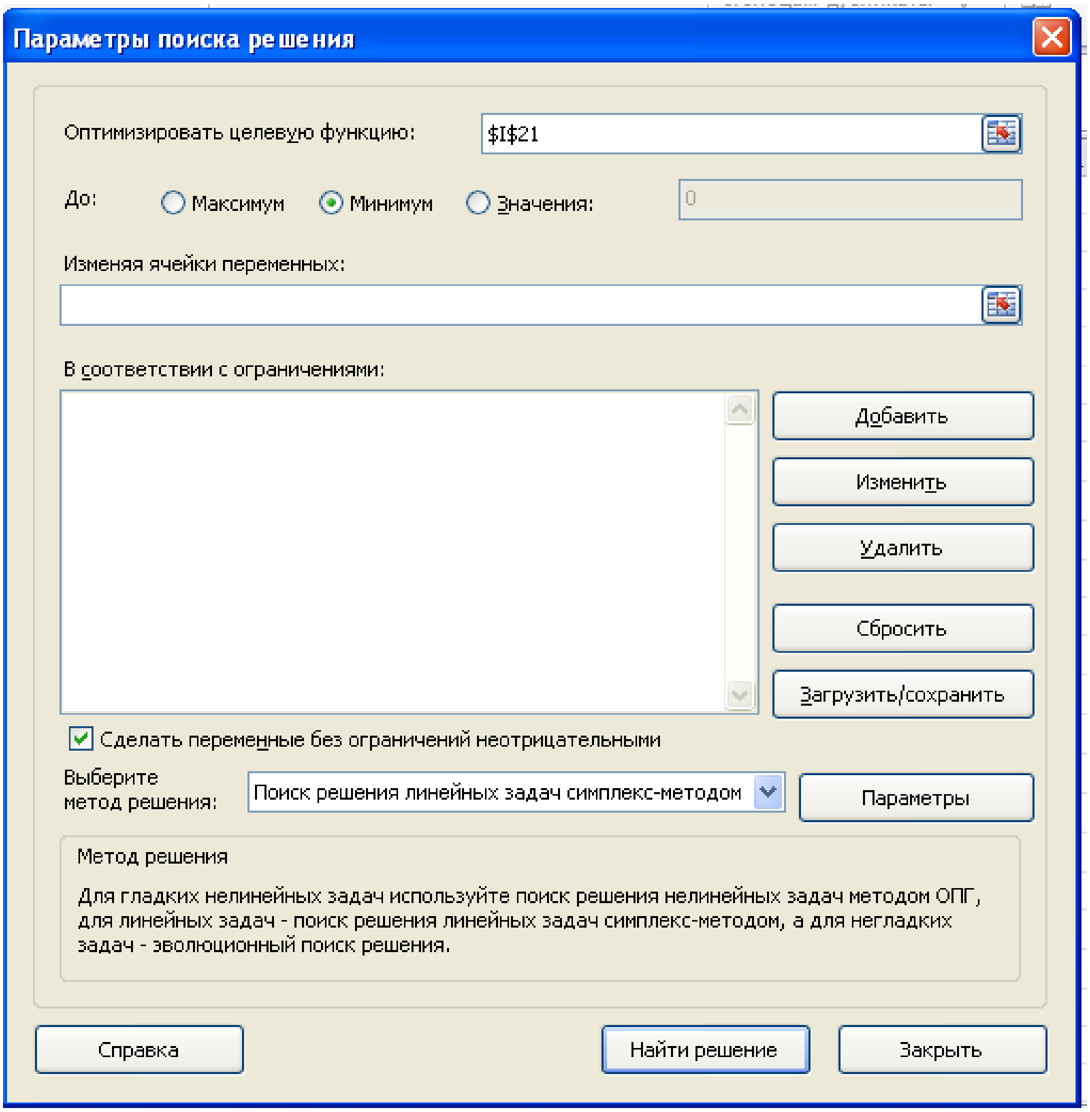


Рисунок 4.4

4.Установите курсор на переключатель “Минимум” и щелкните левой клавишей мыши;

5.Установите курсор в поле “Изменяя ячейки переменных” и щелкните левой клавишей мыши;

6.Выделите блок ячеек “Матрица первозок” (блок C14:F16);

7.Установите курсор на кнопку “Добавить” и щелкните левой клавишей мыши;

Появившееся окно диалога команды “Добавление ограничения” показано на рис.4.5.

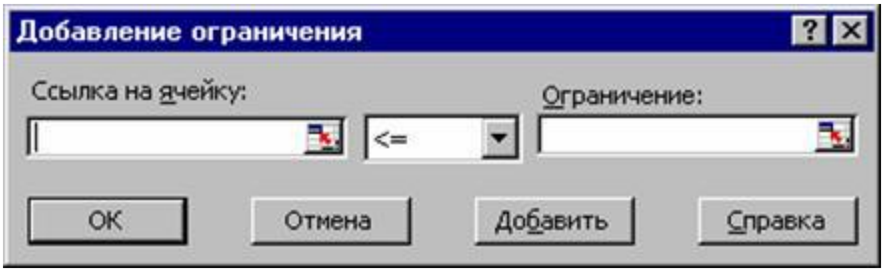


Рисунок 4.5

8.Выделите блок ячеек “Фактически реализовано” (блок I14:I16);

9. Убедитесь, что оператор сравнения <=уже выбран;

10.Установите курсор на поле “Ограничение”и щелкните левой клавишей мыши;

11.Выделите блок ячеек “Предложение поставщиков” (блок I6:I8) и убедитесь, что окно диалога команды “Добавление ограничения” имеет вид, показанный на рис 4.6.

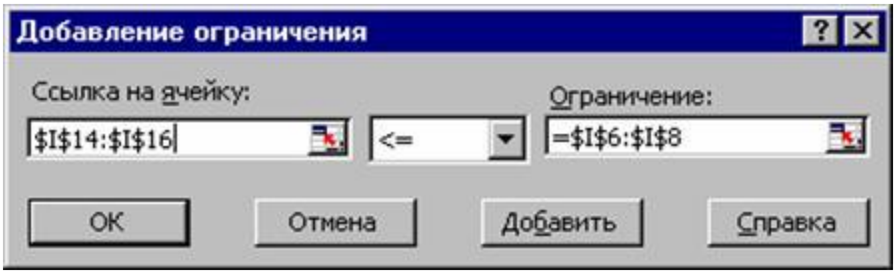


Рисунок 4.6

12.Установить курсор на кнопку “Добавить” и щелкните левой клавишей мыши;

13.Выделите блок ячеек “Фактически получено” (блок C18:F18);

14.Установите курсор на стрелку прокрутки значений оператора сравнения и щелкните левой клавишей мыши;

15.Установите курсор на значение >= (больше или равно) и щелкните левой клавишей мыши;

16.Установите курсор на поле “Ограничение” и щелкните левой клавишей мыши;

17.Выделите блок ячеек “Спрос потребителей” (блок C10:F10) и убедитесь, что окно диалога команды “Добавление ограничения” имеет вид, показанный на рис. 4.7.

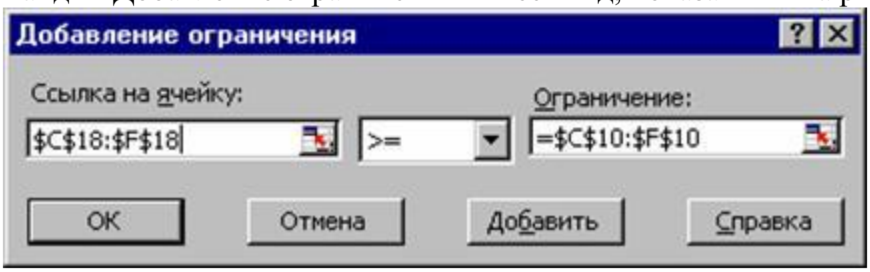


Рисунок 4.7

18.Установите курсор на кнопку “Добавить” и щелкните левой клавишей мыши;

19.Выделите блок ячеек “Матрица перевозок” (блок C14:F16);

20.Установите курсор на стрелку прокрутки значений оператора сравнения и щелкните левой клавишей мыши;

21.Установите курсор на значение >= (больше или равно) и щелкните левой клавишей мыши;

22.Установите курсор на поле “Ограничение” и щелкните левой клавишей мыши;

23.Поставте флажок «Сделать переменные без ограничений неотрицательными» вкл.

24.Установите курсор на кнопку "Отмена" и щелкните левой клавишей мыши;

25.Убедитесь,что появившееся окно программы “Поиск решения” имеет вид, показанный на рис 4.8.

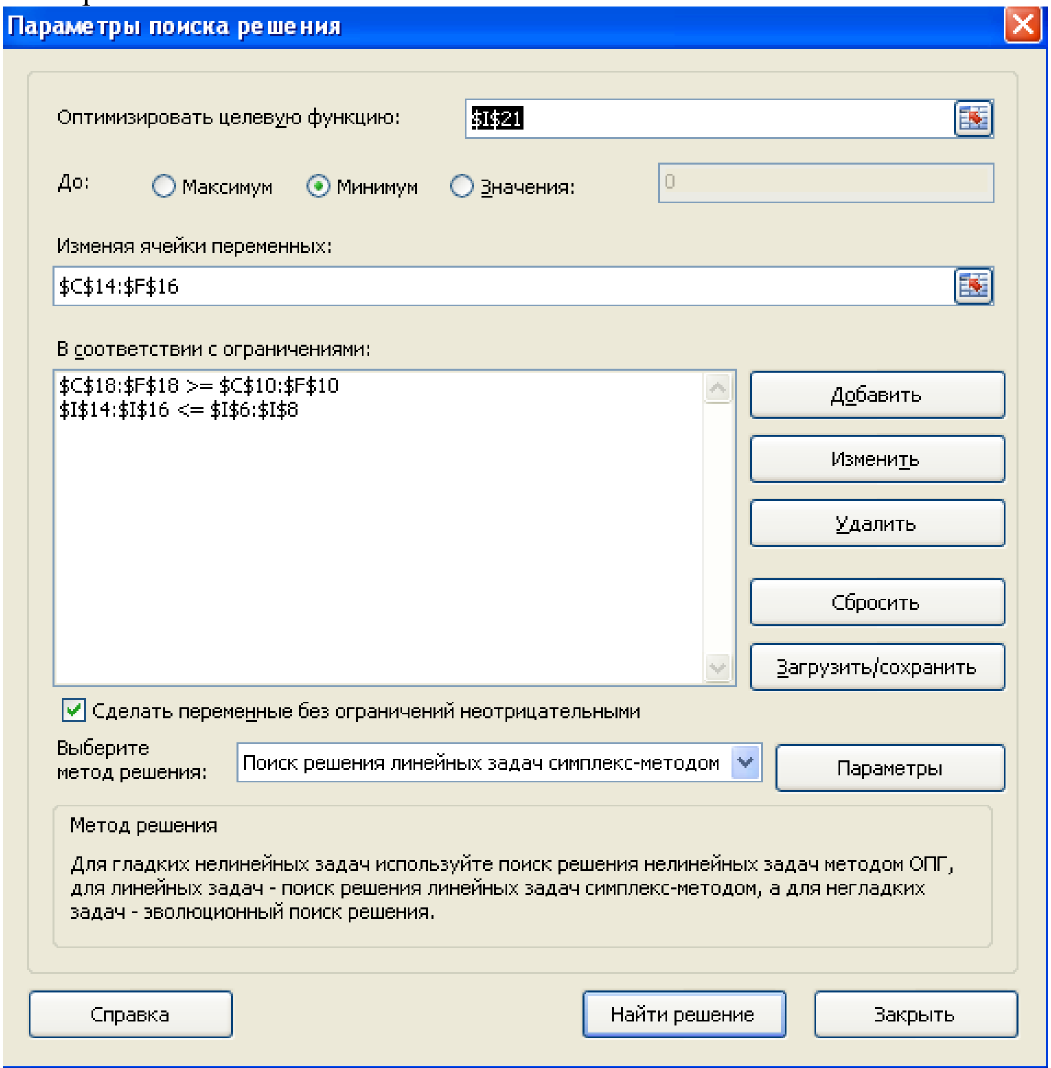


Рисунок 4.8

26.Установите курсор на кнопку “Параметры” и щелкните клавишей мыши;

27.В появившемся окне диалога “Параметры поиска решения” (см. рис.5.10), установите курсор на флажок “Линейная модель” и щелкните левой клавишей мыши;

28.Установите курсор на кнопку “ОК” о щелкните левой клавишей мыши;

29.В появившемся окне "Поиск решения" установите курсор на кнопку "Выполнить" и щелкните левой клавишей мыши.

30.Убедитесь, что на рабочем листе EXCEL в блоке "Матрица перевозок" появляется решение транспортной задачи, показанное на рис.4.9.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1									
2									
3			Матрица транспортных расходов						Предложение
4									поставщиков
5									
6			6	7	3	5			100
7			1	2	5	6			150
8			8	10	20	1			50
9									
10	Спрос потребителей		75	80	60	85			
11									
12				Матрица перевозок					Фактически
13			потреб.1	потреб.2	потреб.3	потреб.4			реализовано
14		поставщик 1	0	5	60	35			100
15		поставщик 2	75	75	0	0			150
16		поставщик 3	0	0	0	50			50
17									
18	Фактически получено		75	80	60	85			
19									
20	Транспортные расходы								расходы
21	по потребителям		75	185	180	225		Итого	665
22									

Рисунок 4.9

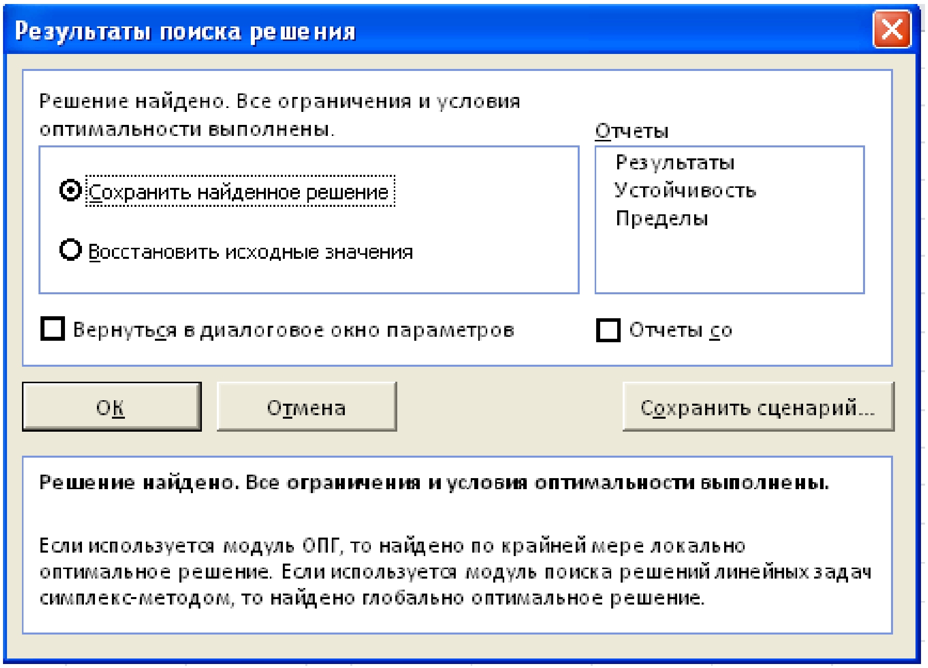


Рисунок 4.10

В появившемся диалоговом окне "Результаты поиска решения" установите курсор на переключатель "Сохранить найденное решение" и щелкните левой клавишей мыши. Для завершения расчетов щелкните на кнопке ОК. (см. рис 4.10).

Задание 2.

Решить данную задачу используя метод минимальных тарифов и метод Вогеля, сравнить полученные результаты.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Задание 3. Решить транспортную задачу вышеуказанными методами, проверить правильность решения с помощью надстройки Поиск решений.

На трех хлебокомбинатах ежедневно производится 110, 190 и 90 т муки. Эта мука потребляется четырьмя хлебозаводами, ежедневные потребности которых равны соответственно 80, 60, 170 и 80 т. Тарифы перевозок 1 т муки с хлебокомбинатов к каждому из хлебозаводов задаются матрицей:

$$C = \begin{bmatrix} 8 & 1 & 9 & 7 \\ 4 & 6 & 2 & 12 \\ 3 & 5 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

Составить такой план доставки муки, при котором общая стоимость перевозок является минимальной.

ТЕМА 5. ЗАДАЧА О НАЗНАЧЕНИЯХ

Частным случаем транспортной задачи является задача о назначениях, в которой число пунктов производства равно числу пунктов назначения, т.е. транспортная таблица имеет форму квадрата. Кроме того, в каждом пункте назначения объем потребности равен 1, и величина предложения каждого пункта производства равна 1. Любая задача о назначениях может быть решена с использованием методов линейного программирования или алгоритма решения транспортной задачи. Однако ввиду особой структуры данной задачи был разработан специальный алгоритм, получивший название **Венгерского метода.**

5.1. Алгоритм решения задачи о назначениях

Этот алгоритм состоит из трех этапов.

Этап 1:

1. Формализация проблемы в виде транспортной таблицы по аналогии с решением транспортной задачи.

2. В каждой строке таблицы найти наименьший элемент и вычесть его из всех элементов данной строки.

3. Повторить ту же самую процедуру для столбцов.

Теперь в каждой строке и в каждом столбце таблицы есть по крайней мере один нулевой элемент. Представленная в полученной с помощью описанного выше приема "приведенной" транспортной таблице задача о назначениях эквивалентна исходной задаче, и оптимальное решение для обеих задач будет одним и тем же. Сущность Венгерского метода заключается в продолжении процесса приведения матрицы до тех пор, пока все подлежащие распределению единицы не попадут в клетки с нулевой стоимостью. Это означает, что итоговое значение приведенной целевой функции будет равно нулю. Так как существует ограничение на неотрицательность переменных, нулевое значение целевой функции является оптимальным.

Этап 2.

Если некоторое решение является допустимым, то каждой строке и каждому столбцу соответствует только один элемент. Если процесс распределения элементов осуществляется только в клетки с нулевой стоимостью, он приведет к получению минимального значения целевой функции.

1. Найти строку, содержащую только одно нулевое значение стоимости, и в клетку, соответствующую данному значению, поместить один элемент. Если такие строки отсутствуют, допустимо начать с любого нулевого значения стоимости.

2. Зачеркнуть оставшиеся нулевые значения данного столбца.

3. Пункты 1 и 2 повторять до тех пор, пока продолжение описанной процедуры окажется невозможным.

Если на данном этапе окажется, что есть несколько нулей, которым не соответствуют назначения и которые являются незачеркнутыми, то необходимо:

4. Найти столбец, содержащий только одно нулевое значение, и в соответствующую клетку поместить один элемент.

5. Зачеркнуть оставшиеся нули в данной строке.

6. Повторять пункты 4 и 5 до тех пор, пока дальнейшая их реализация окажется невозможной.

Если окажется, что таблица содержит неучтенные нули, повторить операции 1-6. Если решение является допустимым, т.е. все элементы распределены в клетки, которым соответствует нулевая стоимость, то полученное решение одновременно является оптимальным. Если решение является недопустимым, осуществляется переход к этапу 3.

Этап 3.

1. Провести минимальное число прямых через строки и столбцы матрицы (но не по диагоналям) таким образом, чтобы они проходили через все нули, содержащиеся в таблице.

2. Найти наименьший среди элементов, через которые не проходит ни одна из проведенных прямых.

3. Вычесть его из всех элементов, через которые не проходят прямые.

4. Прибавить найденный элемент ко всем элементам таблицы, которые лежат на пересечении проведенных ранее прямых

5. Все элементы матрицы, через которые проходит только одна прямая, оставить без изменения.

В результате применения данной процедуры в таблице появляется по крайней мере один новый ноль. Необходимо возвратиться к этапу 2 и повторять алгоритм до тех пор, пока не будет получено оптимальное решение.

Пример 5.1. Некоторая компания имеет четыре сбытовые базы и четыре заказа, которые необходимо доставить различным потребителям. Складские помещения каждой базы вполне достаточны для того, чтобы вместить один из этих заказов. В табл. 5.1 содержится информация о расстоянии между каждой базой и каждым потребителем. Как следует распределить заказы по сбытовым базам, чтобы общая дальность транспортировки была минимальной?

Таблица 5.1. **Расстояние от сбытовых баз до потребителей**

Сбытовая база	Расстояние, миль Потребители			
	I	II	III	IV
A	68	72	75	83
B	56	60	58	63
C	38	40	35	45
D	47	42	40	45

Решение

Понимание существа проблемы можно в значительной степени облегчить, если перед тем, как применять Венгерский метод, попытаться решить поставленную задачу, используя один из широко известных методов. Примените метод Вогеля и проследите, насколько он приближает нас к оптимальному решению, которое мы рассмотрим в конце данного раздела. Значения общего спроса и общего предложения для всех строк и столбцов равны единице.

Этап 1 Венгерского метода: В каждой строке находится наименьший элемент.

Таблица 5.2. **Выявление наименьших элементов по строкам**

	Потребители				*Наименьший элемент строки*
	I	*II*	*III*	*IV*	
A	68	72	75	83	68
B	56	60	58	63	56
C	38	40	35	45	35
D	47	42	40	45	40

Наименьший элемент вычитается из всех элементов соответствующей строки

Таблица 5.3. **Вычитание наименьшего элемента по строкам и выявление наименьшего элемента по столбцам**

0	4	7	15	
0	4	2	7	
3	5	0	10	
7	2	0	5	
0	2	0	0	Наименьший элемент столбца

Найденный наименьший элемент вычитается из всех элементов соответствующего столбца.

Таблица 5.4. **Вычитание наименьшего элемента по столбцам**			
0	2	7	10
0	2	2	2
3	3	0	5
7	0	0	0

В соответствии с процедурой, описанной в этапе 2, осуществляются назначения. Наличие назначения обозначается через

$\boxed{0}$

Таблица 5.5. Назначения в клетки с нулевыми значениями

$\boxed{0}$	2	7	10
~~0~~	2	2	2
3	3	$\boxed{0}$	5
7	$\boxed{0}$	~~0~~	~~0~~

На данном этапе мы можем осуществить только три нулевых назначения, тогда как требуемое их количество равно четырем. Полученное распределение является недопустимым. Переходим к этапу 3. Проводим наименьшее число прямых, проходящих через все нули таблицы.

Таблица 5.6. Проведение прямых через нулевые элементы

$\boxed{0}$	2	7	10
~~0~~	2	2	2
3	3	$\boxed{0}$	5
7	$\boxed{0}$	~~0~~	~~0~~

Наименьшим элементом, через который не проходит ни одна из прямых, является число 2. Скорректируем таблицу так, как это описано выше в соответствии с этапом 3, т.е. вычтем 2 из каждого элемента, через который не проходит ни одна прямая, и добавим 2 ко всем элементам, лежащим на пересечении двух прямых, оставив без изменения все прочие элементы, через которые проходит только одна прямая. Теперь перераспределим соответствующие назначения сбытовых баз и потребителей.

Таблица 5.7. Скорректированная таблица с назначениями для нулевых клеток

	I	II	III	IV
A	$\boxed{0}$	0	7	8
B	0	$\boxed{0}$	2	0
C	3	1	$\boxed{0}$	3
D	9	0	2	$\boxed{0}$

Теперь требование о размещении четырех назначений в клетки с нулевой стоимостью выполняется, следовательно, полученное решение является оптимальным. Перевозки осуществляются со сбытовой базы А к потребителю I, с базы В — к потребителю II, с базы С — к потребителю III и с базы D — к потребителю IV. Хотя данное решение и является оптимальным, однако оно не единственное. Тем не менее в любом оптимальном решении должен присутствовать маршрут (C,III), поскольку это единственный элемент с нулевой стоимостью в строке С. Два других оптимальных распределения назначений представлены ниже.

Таблица 5.8. Первое альтернативное оптимальное решение

	I	II	III	IV
A	$\boxed{0}$	0	1	8
B	0	0	2	$\boxed{0}$
C	3	1	$\boxed{0}$	3
D	9	$\boxed{0}$	2	0

Таблица 5.9. Второе альтернативное оптимальное решение

	I	II	III	IV
A	0	$\boxed{0}$	7	8
B	$\boxed{0}$	0	2	0
C	3	1	$\boxed{0}$	3
D	9	0	2	$\boxed{0}$

Минимальную дальность перевозок для каждого из трех решений можно вычислить из исходной таблицы:

Решение 1: 68 + 60 + 35 + 45 - 208 миль;

Решение 2: 68 + 63 + 35 + 42 = 208 миль;

Решение 3: 72 + 56 + 35 + 45 = 208 миль.Общая дальность перевозок для всех трех решений одинакова.

Примечание: в задачах большей размерности, чем задача из примера 5.1. убедиться в том, что проведенное в соответствии г пунктом 1 этапа 3 число прямых является минимальным, гораздо труднее. В этой связи может оказаться полезным так называемое "правило правой руки":

1. Выбирается любая строка или столбец, содержащие только один нулевой элемент.

2. Если выбрана строка, прямая проводится через столбец, в котором находился данный нулевой элемент.

3. Если выбран столбец, прямая проводится через строку, содержащую данный нулевой элемент.

4. Пункты 1-3 повторяются до тех пор, пока не будут учтены все входящие в таблицу нули.5.2. Особые случаи задачи о назначениях

5.2.МАКСИМИЗАЦИЯ ЦЕЛЕВОЙ ФУНКЦИИ

Алгоритм решения задачи о назначениях предполагает минимизацию ее целевой функции. Если имеется задача о назначениях, целевую функцию которой нужно максимизировать, то поступают таким же образом, как и в алгоритме решения транспортной задачи: после окончания формирования первой таблицы все ее элементы умножаются на (— 1).

Пример 5.2. В распоряжении некоторой компании имеется 6 торговых точек и 6 продавцов. Из прошлого опыта известно, что эффективность работы продавцов в различных торговых точках неодинакова. Коммерческий директор компании произвел оценку деятельности каждого продавца в каждой торговой точке. Результаты этой оценки представлены в табл. 5.10.

Таблица 5.10. **Объемы продаж в различных торговых точках для различных продавцов**

Продавец	*Объсмы продаж, 100 евро /тыс. шт. Торговые точки*					
	1	*//*	*III*	*IV*	*V*	*VI*
A	68	72	75	83	*75*	69
B	56	60	58	63	61	59
C	35	38	40	45	25	27
D	40	42	47	45	53	36
E	62	70	68	67	69	70
F	65	63	69	70	72	68

Как коммерческий директор должен осуществить назначение продавцов по торговым точкам, чтобы достичь максимального объема продаж?

Решение.

Все элементы исходной таблицы умножаются на (-1);

Таблица 5.11. **Модификация исходных данных и выявление минимальных элементов**

Продавец	*Торговые точки*						
	I	*II*	*III*	*IV*	*V*	*VI*	*Минимальный элемент*
A	-68	-72	-75	-83	-75	-69	-83
B	-56	-60	-58	-63	-61	-59	-63
C	-35	-38	-40	-45	-25	-27	-45
D	-40	-42	-47	-45	-53	-36	-53
E	-62	-70	-68	-67	-69	-70	-70
F	-65	-63	-69	-70	-72	-68	-72

Минимальный (наибольший по абсолютной величине) элемент вычитается из всех элементов соответствующей строки.

Таблица 5.12. **Вычитание минимального элемента по строкам и выявление минимальных элементов по столбцам**

15	11	8	0	8	14	
7	3	5	0	2	4	
10	7	5	0	20	18	
13	11	6	8	0	17	Минимальный элемент
8	0	2	3	1	0	
7	9	3	2	0	4	

Минимальный элемент вычитается из всех элементов соответствующего столбца.

Таблица **5.13. Вычитание минимального элемента по столбцам**

8	11	6	0	8	14
0	3	3	0	2	4
3	7	3	0	20	18
6	11	4	8	0	17
1	0	0	3	1	0
0	9	1	2	0	4

Дальнейший поиск оптимального решения осуществляется в соответствии с обычным алгоритмом (см. пример **5.1).**

НЕДОПУСТИМЫЕ НАЗНАЧЕНИЯ

Данную проблему можно решить так же, как и транспортную задачу. Если по той или иной причине некоторое назначение является недопустимым, то в соответствующей клетке проставляется значение стоимости, которое заведомо больше любого другого значения. После этого в ходе реализации алгоритма мы сможем избежать данного назначения автоматически.

НЕСООТВЕТСТВИЕ ЧИСЛА ПУНКТОВ ПРОИЗВОДСТВА И НАЗНАЧЕНИЯ

Если исходная таблица не является квадратной, в нее следует включить дополнительные фиктивные строки и столбцы, необходимые для приведения ее к квадратной форме. Значения стоимости, соответствующие фиктивным клеткам, как правило, равны нулю.

Назначения, размещаемые в клетках фиктивных строк, фактически не существуют. Назначения, соответствующие фиктивным столбцам, на деле представляют собой те единицы, которые не подлежат распределению.

ЗАМЕЧАНИЕ

Транспортная модель — это частный случай модели линейного программирования. Стандартная задача включает в себя некоторое множество пунктов производства, например, несколько торговых складов, которые осуществляют поставки в некоторое множество пунктов назначения, например, в несколько магазинов. Цель состоит в минимизации общей стоимости транспортировки в рамках ограничений на спрос и предложение. Решение этой задачи может быть найдено с помощью традиционных методов линейного программирования. Относительно простая структура задачи позволяет, однако, разработать специальные алгоритмы, применение которых оказывается более трудоемким, чем применение обычных методов решения задач линейного программирования со множеством переменных.

Первый шаг алгоритма состоит в построении транспортной таблицы, в которой содержится информация об издержках транспортировки. Строкам этой таблицы соответствуют пункты производства, а столбцам — пункты назначения.

Второй шаг алгоритма — это поиск начального распределения перевозок. Нами было описано два метода реализации данной процедуры. В методе минимальной стоимости перевозки распределяются в первую очередь по наиболее дешевым маршрутам. Метод Вогеля предполагает расчет значений штрафной стоимости и такое распределение перевозок, которое позволяет избежать получения высоких штрафов. Однако ни один из методов не гарантирует, что полученное начальное распределение перевозок окажется оптимальным.

Третий шаг состоит в проверке начального распределения перевозок на оптимальность. Мы изложили два метода проверки решения на оптимальность. Оба они основаны на вычислении значений теневых цен для незаполненных клеток. Если эти значения положительны или равны нулю для всех пустых клеток, то полученное распределение перевозок является оптимальным.

В методе ступенек в пустую клетку помещается одна единица продукции. Затем определяются натуральные и стоимостные изменения, происшедшие под воздействием такого размещения. Метод МОДИ в большей степени основан на математической теории. Используя значения стоимости перевозки в каждой заполненной клетке, мы получаем стоимость, соответствующую строке или столбцу:

$$c_{ij} = u_i+v_j$$

Используя значения компонент u и v, полученных для строк и столбцов соответственно, рассчитывают значения теневых цен, соответствующие всем пустым клеткам. Их расчет производится по формуле:

$$s_{ij}= c_{ij}-(u_i+v_j).$$

Реализация четвертого шага необходима только в случае, если полученное распределение перевозок является неоптимальным. Для осуществления перераспределения применяется ступенчатый цикл, соответствующий клетке с отрицательным значением теневой цены. Полученное решение вновь подвергается проверке на оптимальность.

Транспортная задача может иметь некоторые специфические особенности. Если предложение и спрос несбалансированны, то необходимо ввести в задачу фиктивные пункты производства или назначения. Оптимальное решение должно находиться в крайней точке допустимого множества, иными словами, должно быть базисным. Базисным называется решение, число переменных в котором равно числу строк в таблице плюс число столбцов минус единица. Если число переменных оказывается меньше указанной величины, то решение является вырожденным, и в

этом случае следует использовать пустые клетки, размещая в них псевдоперевозки, объем которых равен нулю.

Недопустимые маршруты могут быть блокированы введением в соответствующие клетки таблицы достаточно больших значений стоимости транспортировки. Целевую функцию задачи можно не только минимизировать, но и максимизировать.

Еще более специфической задачей, для которой разработаны особые методы решения, является задача о назначениях. Число пунктов производства *в* этой задаче совпадает с числом пунктов назначения, причем каждой строке и каждому столбцу должно соответствовать только одно назначение. Для решения этой модифицированной транспортной задачи был разработан Венгерский метод.

Лабораторная работа № 5 Постановка и решения задачи о назначении.

Цель: Научиться составлять модели и решать задачи о назначении. Решение задачи о назначении (Венгерский алгоритм). Проверка решения с помощью Excel.

Решение задачи о назначениях в Excel с использованием настройки Поиск решения

Задача о назначениях яляется частным видом линейной **оптимизационной задачи**. Наиболее часто **задача о назначениях** представляется следующим образом:

Имеются **n** рабочих и **m** видов работ. Стоимость c_{ij} выполнения **i**-м рабочим **j**-той работы приведена в таблице, где под строкой понимается рабочий, а под столбцом - работа. Необходимо составить план работ так чтобы все работы были выполнены, каждый рабочий был занят только на одной работе, а суммарная стоимость выполнения всех работ была бы минимальной.

Решение задачи о назначениях очень похоже на решение **транспортной задачи**. Особеность лишь в том, что плановые переменные могут принимать только значения 0 или 1 и в каждом столбце и строке может быть только одно ненулевое значение. **Для решения задачи о назначениях в Excel** с использованием настройки **Поиск решения** следует выделить ячейки назначений и подсчитать для них суммы по столбцам и по строкам. В ячейку целевой функции следует ввести формулу вычисляющую сумму произведений стоимости работы на план назначений.

После чего следует выбрать в **Excel** пункт меню *Данные/Поиск решения*, в окне *Поиск решения* выбрать целевую ячейку, изменяемые ячейки и добавить ограничения. Как правила используются ограничения следующего вида:

1. Неотрицательность значений изменяемых ячеек;
2. Суммы значений изменяемых ячеек для каждой строки и столбца должны быть равны 1;
3. Иногда бывает необходимо задать целечисленные ограничения на изменяемые ячейки.

Далее следует нажать кнопку *Выполнить*, после чего будет получено решение **задачи о назначениях**.

Довольно часто **задача о назначениях** бывает представлена в так называемом несбалансированном виде (*количество работ не равно количеству работников*). В этом случае для приведения **задачи о назначениях** к сбалансированному виду следует добавить в таблицу одну или несколько фиктивных работ или работников.

Задание 1.Решение задачи о назначениях.

Имеются n рабочих и m видов работ. Стоимость c_{ij} выполнения i-м рабочим j-той работы приведена в таблице, где под строкой понимается рабочий, а под столбцом - работа. Необходимо составить план работ так чтобы все работы были выполнены, каждый рабочий был занят только на одной работе, а суммарная стоимость выполнения всех работ была бы минимальной.

	A	B	C	D	E	F	G
1		Стоимость выполнения работ					
2	Рабочие	8	6	2	5		
3		5	2	9	8		
4		3	8	1	9		
5		1	4	2	3		
6		3	7	10	5		
7		Виды работ					
8							
9		Назначения				∑	
10	Рабочие	0	0	0	**0**	=СУММ(B10:E10)	
11		0	**0**	0	0	=СУММ(B11:E11)	
12		0	0	**0**	0	=СУММ(B12:E12)	
13		**1**	0	0	0	=СУММ(B13:E13)	
14		0	0	0	0	=СУММ(B14:E14)	
15		Виды работ					
16	∑	=СУММ(B10:B14)	=СУММ(C10:C14)	=СУММ(D10:D14)	=СУММ(E10:E14)		
17							
18	**Суммарная стоимость**		**=СУММПРОИЗВ(B2:E6;B10:E14)**				
19							

В результате должен получится следующий результат:

	A	B	C	D	E	F	G
1		Стоимость выполнения работ					
2	Рабочие	8	6	2	5		
3		5	2	9	8		
4		3	8	1	9		
5		1	4	2	3		
6		3	7	10	5		
7		Виды работ					
8							
9		Назначения				∑	
10	Рабочие	0	0	0	**0**	0	
11		0	**0**	0	0	0	
12		0	0	**0**	0	0	
13		**1**	0	0	0	1	
14		0	0	0	0	0	
15		Виды работ					
16	∑	1	0	0	0		
17							
18	**ммарная стоимос**		**1**				

2.Математическая модель задачи.

Переменными $x_{i,j}$ обозначим назначение с i-го рабочего на j-ую пункт работу. $x_{i,j}$ может принимать значения 1 (назначен) и 0 (не назначен). $c_{i,j}$ – стоимость выполнения

i-м рабочим j-той работы. $i=\overline{1,n}$, $j=\overline{1,m}$. Так как количество рабочих превышает количество работ, то не всем рабочим будет назначена работа.

$$\sum_i \sum_j c_{ij} \cdot x_{ij} \to min$$

$$\begin{cases} \sum_i x_{ij} = 1 \\ \sum_j x_{ij} \le 1 \\ x_{ij} \ge 0 \end{cases}$$

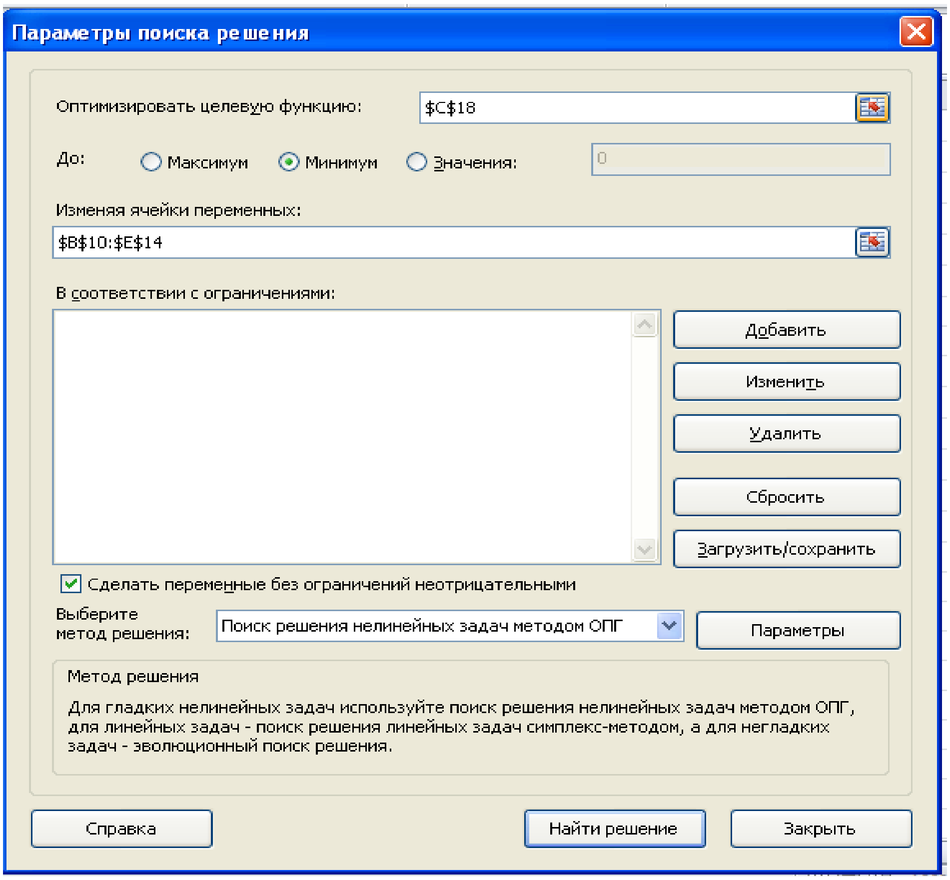
$$i=\overline{1,n}$$

$$j=\overline{1,m}$$

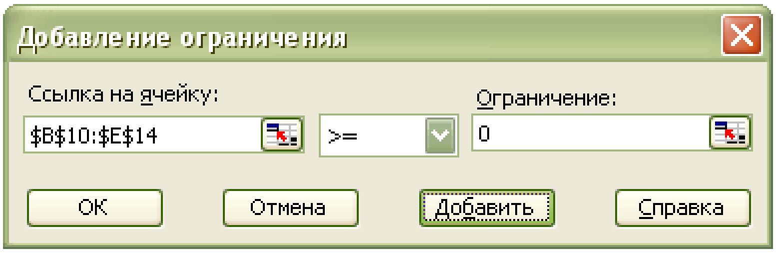
3.Решение задачи средствами MS Excel.

В качестве переменных x_{ij} будем использовать диапазон **B10:E14**. Для значения целевой функции будем использовать ячейку **C18** в которую введем формулу =СУММПРОИЗВ(B2:E6;B10:E14). Функция СУММПРОИЗВ перемножает соответствующие элементы заданных массивов и возвращает сумму произведений. Для вычисления ограничений задачи используется функция СУММ. Функция СУММ суммирует все числа в интервале ячеек.

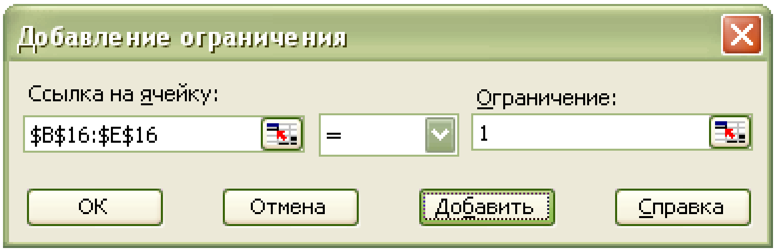
Далее выбираем пункт меню *Данные/Поиск решения*:



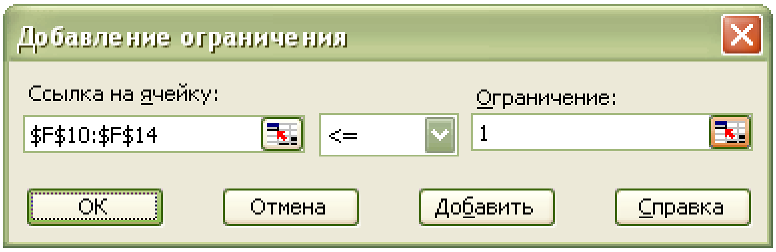
Открывается диалоговое окно *Поиск решения*. В нём указываем, что нам необходимо установить ячейку **C18** минимальному значению, изменяя ячейки **B10:E14**. Далее нажимаем кнопку *Добавить* для добавления ограничений. И добавляем следующие ограничения:



(неотрицательность)

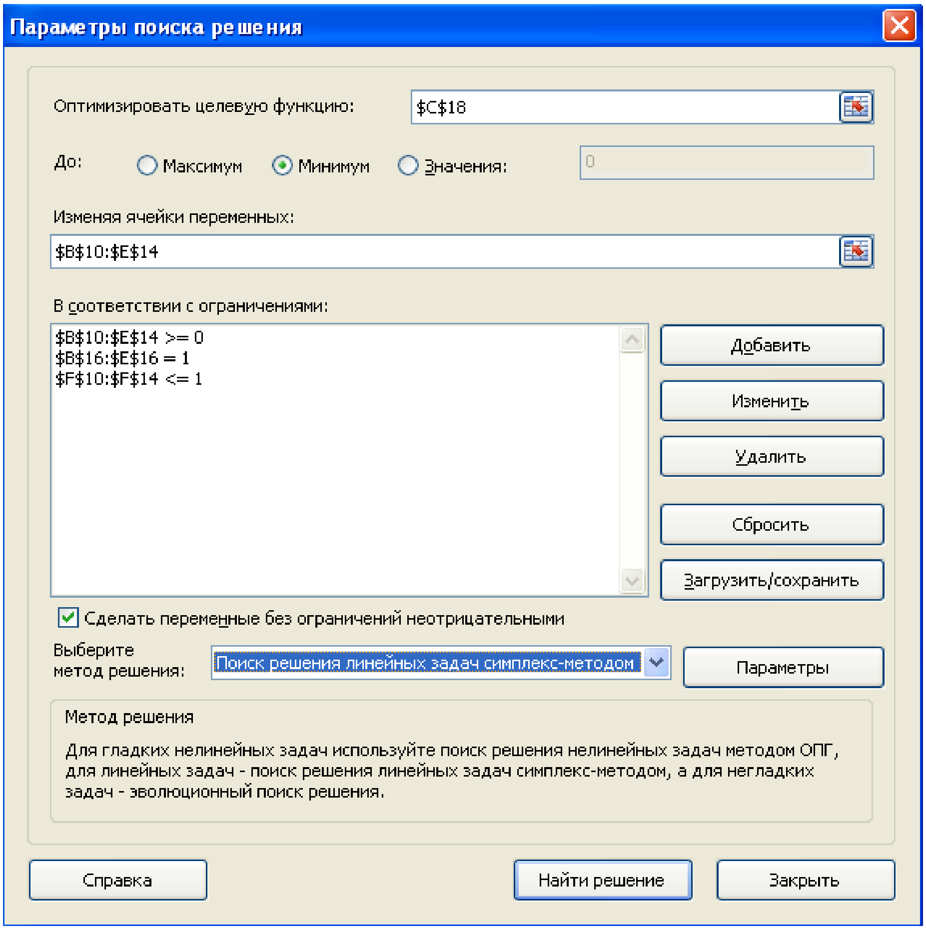


(работы)

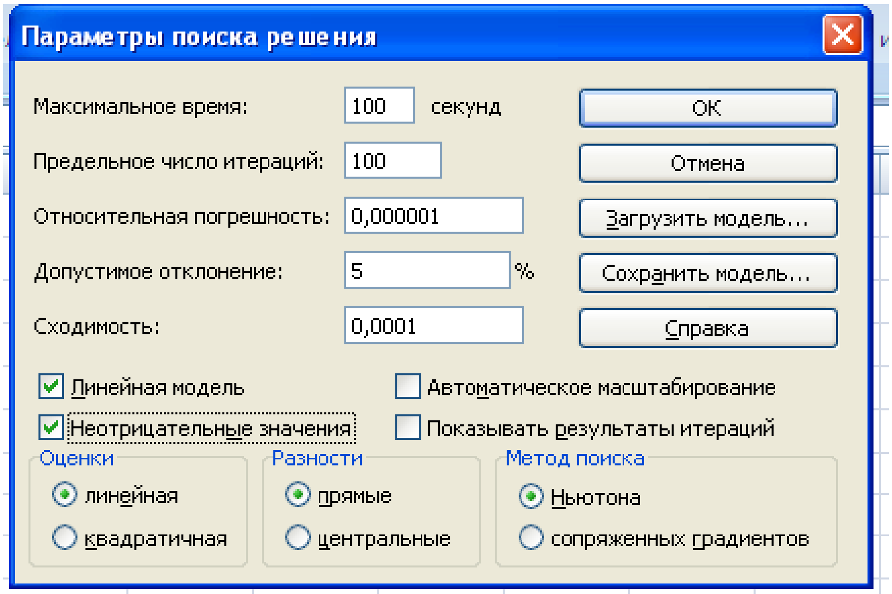


(работники)

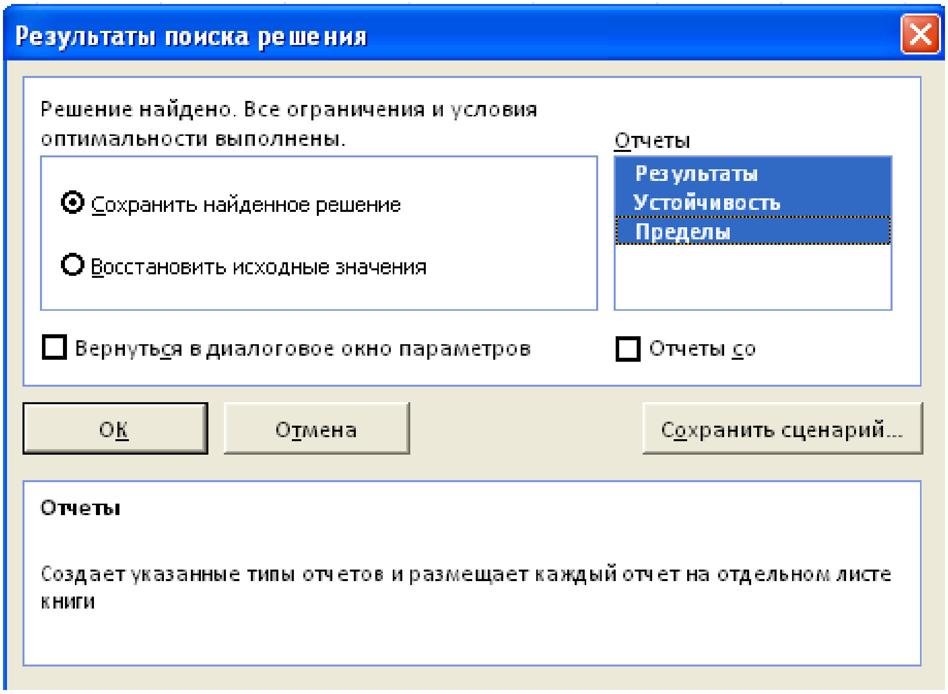
После ввода каждого ограничения нажимаем кнопку *Добавить*. После ввода последнего ограничения нажимаем кнопку *ОК*. И диалоговое окно *Поиск решения* принимает следующий вид:



В параметрах ввести



Нажимаем кнопку *Выполнить*. И перед нами открывается диалоговое окно *Результаты поиска решения*:



Выбираем создание отчётов всех типов. После нажатия кнопки ОК в рабочей книге появляются новые листы с названиями: «Отчет по результатам 2», «Отчет по устойчивости 2», «Отчет по пределам 2». Получаем следующие результаты:

	A	B	C	D	E	F
1		Стоимость выполнения работ				
2	Рабочие	8	6	2	5	
3		5	2	9	8	
4		3	8	1	9	
5		1	4	2	3	
6		3	7	10	5	
7		Виды работ				
8						
9		Назначения				∑
10	Рабочие	0	0	0	1	1
11		0	1	0	0	1
12		0	0	1	0	1
13		1	0	0	0	1
14		0	0	0	0	0
15		Виды работ				
16	∑	1	1	1	1	
17						
18	ммарная стоимос		9			

4.Выводы по задаче.

Была решена задача о назначениях средствами надстройки MS Excel «Поиск решения». Оптимальное решение получено, все ограничения задачи выполнены.

Задание 2

Виполнить решение задачи при помощи Венгерского алгоритма. Сравнить полученные результаты.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

Задание 3

Выполнить решение задачи о назначении вышеуказанными методами. Дать экономический анализ решению.

Задача 2. Фирма получила заказы на разработку пяти программных продуктов. На фирме работают пять квалифицированных программистов, которым можно поручить выполнение этих заказов. Каждый программист дал оценку времени (в днях), которое ему требуется для разработки программ. Эти оценки приведены в таблице.

Программа / Программист	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
Волков	46	59	24	62	67

Лисицын	47	56	32	55	70
Медведев	44	52	19	61	60
Зайцев	47	59	17	64	73
Барсуков	43	65	20	60	75

Выполнение каждого из пяти заказов фирма решила поручить одному программисту. Требуется распределить работу между программистами так, чтобы суммарное время, затраченное ими на разработку всех программ, было минимальным.

ТЕМА 6. ТЕОРИЯ ИГР

КЛАССИФИКАЦИЯ ИГР.

Классификацию игр можно проводить: по количеству игроков, количеству стратегий, характеру взаимодействия игроков, характеру выигрыша, количеству ходов, состоянию информации и т.д.

В зависимости от количества игроков различают игры двух и n игроков. Первые из них наиболее изучены. Игры трёх и более игроков менее исследованы из-за возникающих принципиальных трудностей и технических возможностей получения решения. Чем больше игроков - тем больше проблем.

По количеству стратегий игры делятся на конечные и бесконечные. Если в игре все игроки имеют конечное число возможных стратегий, то она называется конечной. Если же хотя бы один из игроков имеет бесконечное количество возможных стратегий игра называется бесконечной.

По характеру взаимодействия игры делятся на:

1) бескоалиционные: игроки не имеют права вступать в соглашения, образовывать коалиции;

2) коалиционные (кооперативные) – могут вступать в коалиции.

В кооперативных играх коалиции наперёд определены.

По характеру выигрышей игры делятся на: игры с нулевой суммой (общий капитал всех игроков не меняется, а перераспределяется между игроками; сумма выигрышей всех игроков равна нулю) и игры с ненулевой суммой.

По виду функций выигрыша игры делятся на: матричные, биматричные, непрерывные, выпуклые, сепарабельные, типа дуэлей и др.

Матричная игра – это конечная игра двух игроков с нулевой суммой, в которой задаётся выигрыш игрока 1 в виде матрицы (строка матрицы соответствует номеру применяемой стратегии игрока 2, столбец – номеру применяемой стратегии игрока 2; на пересечении строки и столбца матрицы находится выигрыш игрока 1, соответствующий применяемым стратегиям).

Для матричных игр доказано, что любая из них имеет решение и оно может быть легко найдено путём сведения игры к задаче линейного программирования.

Биматричная игра – это конечная игра двух игроков с ненулевой суммой, в которой выигрыши каждого игрока задаются матрицами отдельно для соответствующего игрока (в каждой матрице строка соответствует стратегии игрока 1, столбец – стратегии игрока 2, на пересечении строки и столбца в первой матрице находится выигрыш игрока 1, во второй матрице – выигрыш игрока 2.)

Для биматричных игр также разработана теория оптимального поведения игроков, однако решать такие игры сложнее, чем обычные матричные.

Непрерывной считается игра, в которой функция выигрышей каждого игрока является непрерывной в зависимости от стратегий. Доказано, что игры этого класса имеют решения, однако не разработано практически приемлемых методов их нахождения.

Если функция выигрышей является выпуклой, то такая игра называется выпуклой. Для них разработаны приемлемые методы решения, состоящие в отыскании чистой оптимальной стратегии (определённого числа) для одного игрока и вероятностей применения чистых оптимальных стратегий другого игрока. Такая задача решается сравнительно легко.

6.1. МАТРИЧНЫЕ ИГРЫ.

РЕШЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ИГР В ЧИСТЫХ СТРАТЕГИЯХ.

Матричная игра двух игроков с нулевой суммой может рассматриваться как следующая абстрактная игра двух игроков.

Первый игрок имеет m стратегий $i = 1,2,...,m$, второй имеет n стратегий $j = 1,2,...,n$. Каждой паре стратегий (i,j) поставлено в соответствие число a_{ij}, выражающее выигрыш игрока 1 за счёт игрока 2, если первый игрок примет свою i-ю стратегию, а 2 – свою j-ю стратегию.

Каждый из игроков делает один ход: игрок 1 выбирает свою i-ю стратегию $(i=\overline{1,n})$, 2 – свою j-ю стратегию $(j=\overline{1,m})$, после чего игрок 1 получает выигрыш a_{ij} за счёт игрока 2 (если $a_{ij}<0$, то это значит, что игрок 1 платит второму сумму $|a_{ij}|$). На этом игра заканчивается.

Каждая стратегия игрока $i=\overline{1,n}$; $j=\overline{1,m}$ часто называется чистой стратегией.

Если рассмотреть матрицу

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

то проведение каждой партии матричной игры с матрицей A сводится к выбору игроком 1 i-й строки, а игроком 2 j-го столбца и получения игроком 1 (за счёт игрока 2) выигрыша aij.

Главным в исследовании игр является понятие оптимальных стратегий игроков. В это понятие интуитивно вкладывается такой смысл: стратегия игрока является оптимальной, если применение этой стратегии обеспечивает ему наибольший гарантированный выигрыш при всевозможных стратегиях другого игрока. Исходя из этих позиций, игрок 1 исследует матрицу выигрышей A следующим образом: для каждого значения i (i =1,n) определяется минимальное значение выигрыша в зависимости от применяемых стратегий игрока 2.

$$\min_j a_{ij} \qquad (i = \overline{1,m})$$

т.е. определяется минимальный выигрыш для игрока 1 при условии, что он примет свою i-ю чистую стратегию, затем из этих минимальных выигрышей отыскивается такая стратегия i = io, при которой этот минимальный выигрыш будет максимальным, т.е. находится

$$\max_i \min_j a_{ij} = a_{i_0 j_0} = \underline{\alpha} \qquad (1).$$

Определение. Число , определённое по формуле (1) называется нижней чистой ценой игры и показывает, какой минимальный выигрыш может гарантировать себе игрок 1, применяя свои чистые стратегии при всевозможных действиях игрока 2.

Игрок 2 при оптимальном своём поведении должен стремится по возможности за счёт своих стратегий максимально уменьшить выигрыш игрока 1. Поэтому для игрока 2 отыскивается

$$\max_i a_{ij}$$

т.е. определяется max выигрыш игрока 1, при условии, что игрок 2 применит свою j-ю чистую стратегию, затем игрок 2 отыскивает такую свою j = j1 стратегию, при которой игрок 1 получит min выигрыш, т.е. находит

$$\min_j \max_i a_{ij} = a_{i_1 j_1} = \overline{\alpha} \qquad (2).$$

Определение. Число , определяемое по формуле (2), называется чистой верхней ценой игры и показывает, какой максимальный выигрыш за счёт своих стратегий может себе гарантировать игрок 1.

Другими словами, применяя свои чистые стратегии игрок 1 может обеспечить себе выигрыш не меньше $\underline{\alpha}$, а игрок 2 за счёт применения своих чистых стратегий может не допустить выигрыш игрока 1 больше, чем $\overline{\alpha}$.

Определение. Если в игре с матрицей А $\underline{\alpha} = \overline{\alpha}$., то говорят, что эта игра имеет седловую точку в чистых стратегиях и чистую цену игры. u = $\underline{\alpha} = \overline{\alpha}$.

Седловая точка– это пара чистых стратегий (io,jo) соответственно игроков 1 и 2, при которых достигается равенство $\underline{\alpha} = \overline{\alpha}$. . В это понятие вложен следующий смысл: если один из игроков придерживается стратегии (i_0, j_0), соответствующей седловой точке, то другой игрок не сможет поступить лучше, чем придерживаться стратегии, соответствующей седловой точке. Математически это можно записать и иначе:

$$a_{ij_0} \leq a_{i_0 j_0} \leq a_{i_0 j} \qquad (3)$$

где i, j– любые чистые стратегии соответственно игроков 1 и 2; (i_0, j_0) – стратегии, образующие седловую точку.

Таким образом, исходя из (3), седловой элемент является минимальным в i_0-й строке и максимальным в j_0-м столбце в матрице А. Отыскание седловой точки матрицы А происходит следующим образом: в матрице А последовательно в каждой строке находят минимальный элемент и проверяют, является ли этот элемент максимальным в своём столбце. Если да, то он и есть седловой элемент, а пара стратегий, ему соответствующая, образует седловую точку. Пара чистых стратегий (i_0, j_0)игроков 1 и 2, образующая седловую точку и седловой элемент , называется решением игры. При этом i_o и j_o называются оптимальными чистыми стратегиямисоответственно игроков 1 и 2.

Пример1

$$A=\begin{pmatrix}1&-3&-2\\0&5&4\\2&3&2\end{pmatrix}\qquad \begin{matrix}\min\limits_j a_{ij}\\ \|\\ -3\\0\\2\end{matrix}\left.\vphantom{\begin{matrix}1\\0\\2\end{matrix}}\right\}\max_i\min_j a_{ij}=2$$

$$\max_i a_{ij} = \underbrace{2\quad 5\quad 4}_{\min\limits_j\max\limits_i a_{ij}=2}$$

Седловой точкой является пара (i_o = 3; j_o = 1), при которой $u=\underline{\alpha}=\overline{\alpha}=2$.

Заметим, что хотя выигрыш в ситуации (3;3) также равен $2=\underline{\alpha}=\overline{\alpha}$, она не является седловой точкой, т.к. этот выигрыш не является максимальным среди выигрышей третьего столбца.

Пример 2

$$H=\begin{pmatrix}10&30\\40&20\end{pmatrix}\begin{matrix}\min\limits_j a_{ij}\\ \to\quad 10\\ \to\quad 20\end{matrix}\left.\vphantom{\begin{matrix}1\\2\end{matrix}}\right\}\max_i\min_j a_{ij}=20$$

$$\max_i a_{ij}\quad\begin{matrix}\downarrow&\downarrow\\ 40&30\end{matrix}$$

$$\underbrace{40\quad 30}_{\min\limits_j\max\limits_i a_{ij}=30}$$

Из анализа матрицы выигрышей видно, что $\underline{\alpha}<\overline{\alpha}$, т.е. данная матрица не имеет седловой точки. Если игрок 1 выбирает свою чистую максиминную стратегию $i=2$, то игрок 2, выбрав свою минимаксную $j=2$, проиграет только 20. В этом случае игроку 1 выгодно выбрать стратегию $i=1$, т.е. отклониться от своей чистой максиминной стратегии и выиграть 30. Тогда игроку 2 будет выгодно выбрать стратегию $j=1$, т.е. отклониться от своей чистой минимаксной стратегии и проиграть 10. В свою очередь игрок 1 должен выбрать свою 2-ю стратегию, чтобы выиграть 40, а игрок 2 ответит выбором 2-й стратегии и т.д.

6.2. СМЕШАННОЕ РАСШИРЕНИЕ МАТРИЧНОЙ ИГРЫ.

Исследование в матричных играх начинается с нахождения её седловой точки в чистых стратегиях. Если матричная игра имеет седловую точку в чистых стратегиях, то нахождением этой седловой точки заканчивается исследование игры. Если же в игре нет седловой точки в чистых стратегиях, то можно найти нижнюю и верхнюю чистые цены этой игры, которые указывают, что игрок 1 не должен надеяться на выигрыш больший, чем верхняя цена игры, и может быть уверен в получении выигрыша не меньше нижней цены игры. Улучшение решений матричных игр следует искать в использовании секретности применения чистых стратегий и возможности многократного повторения игр в виде партии. Этот результат достигается путём применения чистых стратегий случайно, с определённой вероятностью.

Определение. Смешанной стратегией игрока называется полный набор вероятностей применения его чистых стратегий.

Таким образом, если игрок 1 имеет m чистых стратегий 1,2,...,m, то его смешанная стратегия x– это набор чисел x = (x1,..., xm) удовлетворяющих соотношениям

$$x_i{}^{3}\ 0 \quad (i = 1,m), \qquad \sum_{i=1}^{m} x_i = 1.$$

Аналогично для игрока 2, который имеет n чистых стратегий, смешанная стратегия y– это набор чисел

$$y = (y_1, \ldots, y_n), \quad y_j{}^{3}\ 0, \quad (j = 1,n), \quad \sum_{j=1}^{n} y_j = 1.$$

Так как каждый раз применение игроком одной чистой стратегии исключает применение другой, то чистые стратегии являются несовместными событиями. Кроме того, они являются единственными возможными событиями.

Чистая стратегия есть частный случай смешанной стратегии. Действительно, если в смешанной стратегии какая-либо i-я чистая стратегия применяется с вероятностью 1, то все остальные чистые стратегии не применяются. И эта i-я чистая стратегия является частным случаем смешанной стратегии. Для соблюдения секретности каждый игрок применяет свои стратегии независимо от выбора другого игрока.

Определение. Средний выигрыш игрока 1 в матричной игре с матрицей A выражается в виде математического ожидания его выигрышей

$$E(A, x, y) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i y_j = x A y^T$$

Первый игрок имеет целью за счёт изменения своих смешанных стратегий x максимально увеличить свой средний выигрыш E (A,x,y), а второй – за счёт своих смешанных стратегий стремится сделать E (A,x,y) минимальным, т.е. для решения игры необходимо найти такие x и y,при которых достигается верхняя цена игры

$$\overline{\alpha} = \min_y \max_x E(A,x,y).$$

Аналогичной должна быть ситуация и для игрока 2, т.е. нижняя цена игры должна быть

$$\underline{\alpha} = \max_x \min_y E(A, x, y).$$

Подобно играм, имеющим седловые точки в чистых стратегиях, вводится следующее определение: оптимальными смешанными стратегиями игроков 1 и 2 называются такие наборы xo, yo соответственно, которые удовлетворяют равенству

$$\min_y \max_x E(A,x,y) = \max_x \min_y E(A, x, y) = E(A, x^o, y^o).$$

Величина E (A, xo ,yo) называется при этом ценой игры и обозначается через u.

Имеется и другое определение оптимальных смешанных стратегий: xo, yo называются оптимальными смешанными стратегиями соответственно игроков 1 и 2, если они образуют седловую точку:

$$E(A, x, y^o) \pounds E(A, x^o, y^o) \pounds E(A, x^o, y)$$

Оптимальные смешанные стратегии и цена игры называются решением матричной игры.

6.3. СВЕДЕНИЕ МАТРИЧНОЙ ИГРЫ К ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Предположим,что цена игры положительна (u > 0).Если это не так,то согласно свойству 6 всегда можно подобрать такое число c, прибавление которого ко всем элементам матрицы выигрышей даёт матрицу с положительными элементами, и следовательно, с положительным значением цены игры. При этом оптимальные смешанные стратегии обоих игроков не изменяются.

Итак,пусть дана матричная игра с матрицей A порядка mx n. Согласно свойству 7 оптимальные смешанные стратегии x = (x1, ..., xm), y = (y1,..., yn) соответственно игроков 1 и 2 и цена игры u должны удовлетворять соотношениям.

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{m} a_{ij} x_i \ge \upsilon \quad (j=\overline{1,n}) \\ \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \\ x_i \ge 0, \quad (i=\overline{1,m}) \end{cases} \qquad \underline{\underline{(1)}}$$

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j \le \upsilon \quad (i=\overline{1,m}) \\ \sum_{j=1}^{n} y_j = 1 \\ y_j \ge 0, \quad (j=\overline{1,n}) \end{cases} \qquad \underline{\underline{(2)}}$$

Разделим все уравнения и неравенства в (1) и (2) на u (это можно сделать,т.к. по предположению u > 0) и введём обозначения:

$$\frac{x_i}{\upsilon} = p_i \quad (i=\overline{1,m}), \quad \frac{y_i}{\upsilon} = q_i \quad (j=\overline{1,n}),$$

Тогда (1) и (2) перепишется в виде :

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \ge 1, \quad \sum_{i=1}^{m} p_i = \frac{1}{\upsilon}, \quad p_i \ge 0, \quad (i=\overline{1,m}),$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \le 1, \quad \sum_{j=1}^{n} q_j = \frac{1}{\upsilon}, \quad q_j \ge 0, \quad (j=\overline{1,n}).$$

Поскольку первый игрок стремится найти такие значения xi и, следовательно, p_i, чтобы цена игрыu была максимальной, то решение первой задачи сводится к нахождению таких неотрицательных значений p_i, при которых

$$\sum_{i=1}^{m} p_i \to \min, \quad \sum_{i=1}^{m} a_{ij} p_i \geq 1. \qquad (3)$$

Поскольку второй игрок стремится найти такие значения y_j и,следовательно, q_j, чтобы цена игры u была наименьшей, то решение второй задачи сводится к нахождению таких неотрицательных значений q_j, , при которых

$$\sum_{j=1}^{n} q_j \to \max, \quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} q_j \leq 1. \qquad (4)$$

Формулы (3) и (4) выражают двойственные друг другу задачи линейного программирования (ЛП).

Решив эти задачи, получим значения p_i $(i = \overline{1,m})$, q_j $(j = \overline{1,n})$ и u.Тогда смешанные стратегии, т.е. xi и yjполучаются по формулам :

$$x_i = up_i \quad (i = \overline{1,m})$$
$$y_j = uq_j \quad (j = \overline{1,n}) \qquad (5)$$

Пример. Найти решение игры, определяемой матрицей.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Решение. При решении этой игры к каждому элементу матрицы A прибавим 1 и получим следующую матрицу

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Составим теперь пару взаимно-двойственных задач :

$$p_1 + p_2 + p_3 \to \min$$
$$\begin{cases} p_1 + p_2 + 2p_3 \geq 1, \\ 2p_1 + \quad\quad p_3 \geq 1, \\ \quad\quad\quad\quad p_3 \geq 1, \\ p_1, p_2, p_3 \geq 0 \end{cases}$$

$$q_1 + q_2 + q_3 \to \max$$
$$\begin{cases} q_1 + 2q_2 \quad\quad \leq 1, \\ q_1 \quad\quad + q_3 \leq 1, \\ 2q_1 + q_2 \quad\quad \leq 1, \\ q_1, q_2, q_3 \geq 0 \end{cases}$$

Решим вторую из них

Б.п.	q1	q2	q3	q4	q5	q6	Решение	å	Отношение
	-1	-1	-1	0	0	0	0	-3	
q4	1	2	0	1	0	0	1	5	—
q5	1	0	1	0	1	0	1	4	1/1
q6	2	1	0	0	0	1	1	5	—

Б.п.	q1	q2	q3	q4	q5	q6	Решение	å	Отношение
	0	-1	0	0	1	0	1	1	
q4	1	2	0	1	0	0	1	5	1/2
q3	1	0	1	0	1	0	1	4	—
q6	2	1	0	0	0	1	1	5	1/1 = 1

Б.п.	q1	q2	q3	q4	q5	q6	Решение	å	Отношение
	1/2	0	0	1/2	1	0	3/2	7/2	
q2	1/2	1	0	1/2	0	0	1/2	5/2	
q3	1	0	1	0	1	0	1	4	
q6	3/2	0	0	−1/2	0	1	1/2	5/2	

Из оптимальной симплекс-таблицы следует, что 7/2

(q1, q2, q3) = (0;1/2; 1),

а из соотношений двойственности следует, что

(p1, p2, p3) = (1/2; 1; 0).

Следовательно, цена игры с платёжной матрицей A1 равна

$$\upsilon_1 = \frac{1}{p_1+p_2+p_3} = \frac{1}{\frac{1}{2}+1} = \frac{2}{3} \qquad \left(= \frac{1}{q_1+q_2+q_3}\right)$$

а игры с платёжной матрицей А :

$$\upsilon = \upsilon_1 - 1 = \frac{2}{3} - 1 = -\frac{1}{3}$$

При этом оптимальные стратегии игроков имеют вид:

$$X = (x_1, x_2, x_3) = (up_1; up_2; up_3) = \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2};\ \frac{2}{3}\cdot 1;\ \frac{2}{3}\cdot 0\right) = \left(\frac{1}{3};\ \frac{2}{3};\ 0\right)$$

$$Y = (y_1, y_2, y_3) = (uq_1; uq_2; uq_3) = \left(\frac{2}{3}\cdot 0;\ \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2};\ \frac{2}{3}\cdot 1\right) = \left(0;\ \frac{1}{3};\ \frac{2}{3}\right)$$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 6. РЕШЕНИЕ МАТРИЧНЫХ ИГР В ЧИСТЫХ СТРАТЕГИЯХ

Два предприятия производят продукцию и поставляют её на рынок региона. Они являются единственными поставщиками продукции в регион, поэтому полностью определяют рынок данной продукции в регионе.

Каждое из предприятий имеет возможность производить продукцию с применением одной из трёх различных технологий. В зависимости от качества продукции, произведённой по каждой технологии, предприятия могут установить цену единицы продукции на уровне 12, 8 и 4 денежных единиц соответственно. При этом предприятия имеют различные затраты на производство единицы продукции. (табл. 1).

Таблица 1

Затраты на единицу продукции, произведенной на предприятиях региона (д.е.).

Технология	Цена реализации единицы продукции, д.е.	Полная себестоимость единицы продукции, д.е.	
		Предприятие А	Предприятие В
1	12	8	10
2	8	5	4
3	4	2	1

В результате маркетингового исследования рынка продукции региона была определена функция спроса на продукцию:

$$Y = 10 – 0,6*X,$$

где Y – количество продукции, которое приобретёт население региона (тыс. ед.), а X – средняя цена продукции предприятий, д.е.

Значения долей продукции предприятия А, приобретенной населением, зависят от соотношения цен на продукцию предприятия А и предприятия В. В результате маркетингового исследования эта зависимость установлена и значения вычислены (табл. 2).

Таблица 2.Доля продукции предприятия А, приобретаемой населением в зависимости от соотношения цен на продукцию

Цена реализации 1 ед. продукции, д.е.		Доля продукции предприятия А, купленной населением
Предприятие А	Предприятие В	
12	12	0,31
12	8	0,33
12	4	0,18
8	12	0,7
8	8	0,3
8	4	0,2
4	12	0,92
4	8	0,85
4	4	0,72

В задаче необходимо определить:

1. Существует ли в данной задаче ситуация равновесия при выборе технологий производства продукции обоими предприятиями?

2. Существуют ли технологии, которые предприятия заведомо не будут выбирать вследствие невыгодности?

3. Сколько продукции будет реализовано в ситуации равновесия? Какое предприятие окажется в выигрышном положении?

Решение

Одной из главных задач каждого предприятия является максимизация прибыли от реализации продукции. Но в данном случае более важной проблемой является конкурентная борьба. В конкурентном конфликте выигрыш будет определяться не размером прибыли каждого предприятия, а разностью их прибылей. При таком подходе конфликт можно рассматривать как матричную игру двух игроков с нулевой суммой, т.к. выигрыш одного предприятия равен проигрышу другого.

Формализуем конфликтную ситуацию – составим платежную матрицу. Для этого определим стратегии каждого игрока:

A1 – предприятие A выбирает технологию 1

A2 – предприятие A выбирает технологию 2

A3 – предприятие A выбирает технологию 3

B1 – предприятие B выбирает технологию 1

B2 – предприятие B выбирает технологию 2

B3 – предприятие B выбирает технологию 3

Элементами платежной матрицы будет разность прибыли предприятия A и предприятия B.

Найдем a11 (выбраны стратегии A1 и B1 – оба предприятия реализуют продукцию по 12 д.е.)

Прибыль = Доход – Затраты

И доход и затраты зависят от количества купленной населением продукции, которое определяется функцией спроса Y = 10 – 0,6*X.

Средняя цена на продукцию равна: X = (12 +12)/2 = 12.

Значит, Y = 10 – 0,6 * 12 = 10 – 7,2 = 2,8 (тыс. ед.)

Из таблицы 2 следует, что у предприятия A купят 31% от всей купленной населением продукции:

2,8 тыс. ед. * 31% =2800 ед. * 0,31 = 868 ед.

Тогда у предприятия B купят 69% от всей купленной населением продукции:

2,8 тыс. ед. * 69% =2800 ед. * 0,69 = 1932 ед.

или 2800 – 868 = 1932 (ед.)

Значит:

Прибыль A = 868 * 12 – 868 * 8 = 868 * (12 – 8) = 868 * 4 = 3472 д.е.

Прибыль B = 1932 * (12 – 10) = 1932 * 2 = 3864 д.е.

a11 = 3472 – 3864 = – 392 (ед.) = – 0,392 (тыс.ед.)

Можно использовать следующую формулу для расчета элементов платежной матрицы:

aij = (10 – 0,3 * (p1 + p2)) * 1000 * (d * (p1 – s1) – (1 – d) * (p2 – s2)),

где p1 – стоимость реализации единицы продукции предприятием A при выборе им стратегии Ai;

p2 – стоимость реализации единицы продукции предприятием B при выборе им стратегии Bj;

s1 – себестоимость единицы продукции предприятия A при выборе им стратегии Ai;

s2 – себестоимость единицы продукции предприятия B при выборе им стратегии Bj;

d – доля продукции предприятия A, купленной населением при ценах p1 и p2.

Для простоты выполним все расчеты в Excel/

	A	B	C	D	E	F	G	H
1		Цена реализации 1 ед. продукции, д.е.		Доля продукции предприятия А, купленной населением	Технология	Цена реализации единицы продукции, д.е.	Полная себестоимость единицы продукции, д.е.	
2		Предприятие А	Предприятие В				Предприятие А	Предприятие В
3		12	12	0,31	1	12	8	10
4		12	8	0,33	2	8	5	4
5		12	4	0,18	3	4	2	1
6		8	12	0,7				
7		8	8	0,3				
8		8	4	0,2				
9		4	12	0,92				
10		4	8	0,85				
11		4	4	0,72				

После введенных данных определим на том же листе формулы для расчета.

	A	B
13		A1
14	B1	a11 *0,001
15	B2	a21*0,001
16	B3	a31*0,001
17		
18		A1
19	B1	.=0,001*((10-0,3*(B3+C3))*1000*(D3*(B3-G3)-(1-D3)*(C3-H3)))
20	B2	.=0,001*((10-0,3*(B6+C6))*1000*(D6*(B6-G4)-(1-D6)*(C6-H3)))
21	B3	.=0,001*((10-0,3*(B9+C9))*1000*(D9*(B9-G5)-(1-D9)*(C9-H3)))

	C
13	A2
14	a12*0,001
15	a22*0,001
16	a32*0,001
17	
18	A2
19	.=0,001*((10-0,3*(B4+C4))*1000*(D4*(B4-G3)-(1-D4)*(C4-H4)))
20	.=0,001*((10-0,3*(B7+C7))*1000*(D7*(B7-G4)-(1-D7)*(C7-H4)))
21	.=0,001*((10-0,3*(B10+C10))*1000*(D10*(B10-G5)-(1-D10)*(C10-H4)))
22	

	D
13	A3
14	a13*0,001
15	a23*0,001
16	a33*0,001
17	
18	A3
19	.=0,001*((10-0,3*(B5+C5))*1000*(D5*(B5-G3)-(1-D5)*(C5-H5)))
20	.=0,001*((10-0,3*(B8+C8))*1000*(D8*(B8-G4)-(1-D8)*(C8-H5)))
21	.=0,001*((10-0,3*(B11+C11))*1000*(D11*(B11-G5)-(1-D11)*(C11-H5)))

Проведя все расчеты, получаем платежную матрицу (в тыс. ед.):

	B1	B2	B3
A1	-0,392	-5,44	-9,048
A2	6	-9,88	-11,52
A3	8,736	7,04	4,56

1. Проверим наличие ситуации равновесия – седловой точки. Для это найдем нижнюю и верхнюю цены игры.

В каждой строчке определим минимальный элемент и запишем его в новом столбце, а из найденных минимальных выберем максимальный: $\underline{\alpha}$= 4,56 – нижняя цена игры. В каждом столбце найдем максимальный элемент и запишем их в новой строке и из них выберем минимальный $\overline{\alpha}$ = 4,56 – верхняя цена игры.

	B1	B2	B3	Мин
A1	-0,392	-5,44	-9,048	-9,048
A2	6	-9,88	-11,52	-11,52
A3	8,736	7,04	4,56	4,56
Макс	8,736	7,04	4,56	

Так как $\underline{\alpha} = \overline{\alpha} = 4{,}56$, то в конфликтной ситуации есть точка равновесия – седловая точка, которую образуют стратегии (A3, B3).

Если одно предприятие будет придерживаться своей оптимальной стратегии, то самое лучшее поведение второго предприятия – также придерживаться своей оптимальной стратегии. В приложении к условию это означает, что предприятиям необходимо использовать свои третьи технологии и минимальные цены реализации.

2. Определим наличие заведомо невыгодных стратегий у предприятий.

Так как элементы третьей строки больше соответствующих элементов первой строки и второй строки, то стратегии A1 и A2 – заведомо невыгодные, так как предприятие A стремится максимизировать разницу прибылей.

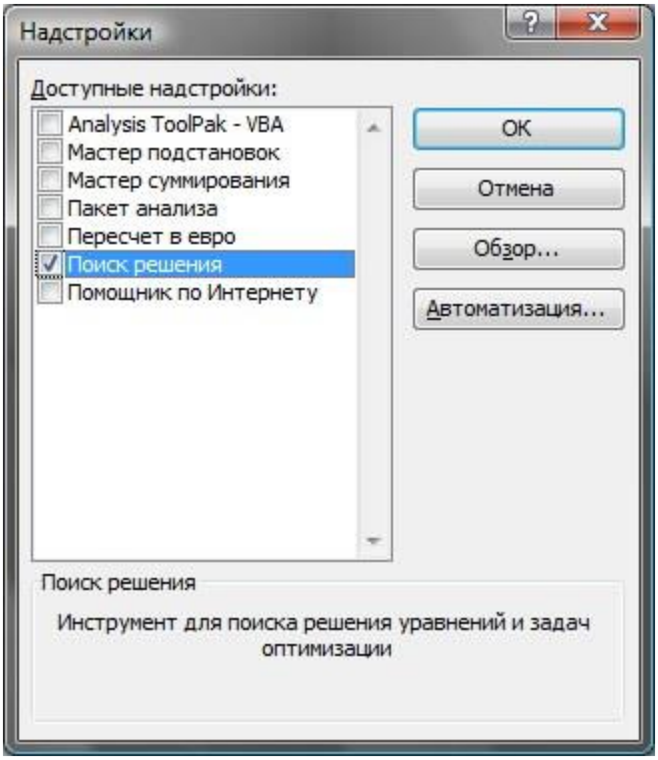
Аналогично для предприятия B. Все элементы третьего столбца меньше соответствующих элементов первого и второго столбцов, значит стратегии B1 и B2 – заведомо невыгодные (доминируемые).

3. В ситуации равновесия будет реализовано 7600 единиц продукции (Y = 10 – 0,6 * (4 + 4)/2 = 7,6). У первого предприятия купят 7600*0,72=5472 ед. продукции, а у второго 7600*0,28=2128 ед. продукции. В выигрышном положении будет предприятие A.

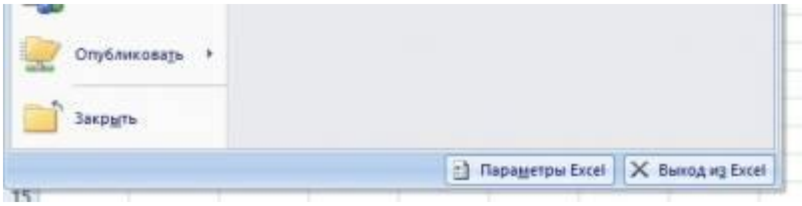
Проверить решение задач в Excel.

Алгоритм решения типового примера

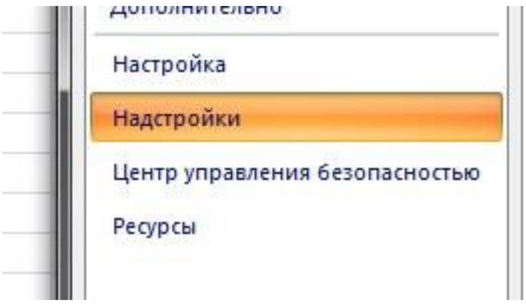
Для того чтобы решать задачи линейного программирования, в Excel есть надстройка, которая называется «Поиск решения». Для начала надо проверить подключена ли она. Если у вас Excel 2003, то идёте в меню «Сервис», дальше в «Надстройки…». Откроется список, где рядом с «Поиском решения» должна стоять галочка, как на картинке.



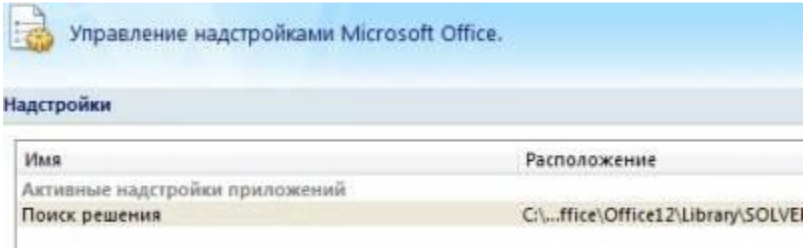
Если галочки нет, то ставите её сами и нажмете «ОК» - надстройка установится сама. После этого, в меню «Сервис» появляется пункт «Поиск решения», который нам и нужен. Если у вас Excel 2007, то нажмёте на кнопку главного меню вверху слева, нажмёте внизу кнопку «Параметры Excel»,



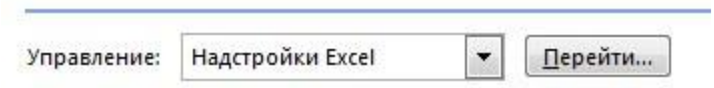
справа выбираете закладку «Надстройки»



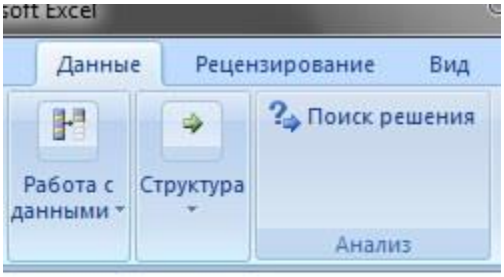
и смотрите, какие из них уже активны. Если всё, как на картинке,



то ничего делать не надо. Если же нет, то снизу нажимаете «Перейти…»,



ставите галочку напротив «Поиска решения» и жмёте «ОК». После этого пункт «Поиск решения» появляется в меню «Данные».



Теперь нужно подготовить типовой задачи для вставки в Excel.

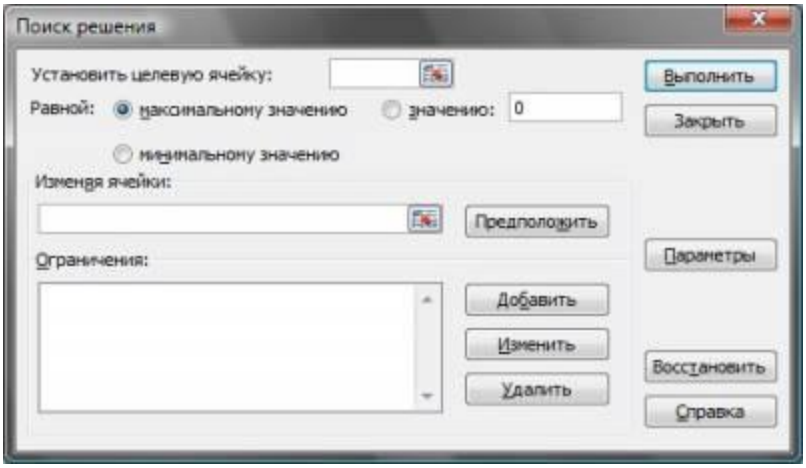
Когда в матрице есть элементы <= 0, то надо прибавить ко всей матрице одно такое число, чтобы все элементы стали > 0. Для наглядности покажем решение примера. Делаем в Excel табличку, куда записываем наши ограничения, и оставляем ячейки для иксов, суммы иксов и оптимальной стратегии для первого игрока p*. Иксов нам нужно столько, сколько у нас в матрице строк.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	X_1	0	Ограничения (чтобы были больше нуля, прибавили 12)	11,608	6,560	2,952	условие	-0,392	-5,440	-9,048
2	X_2	0		18,000	2,120	0,480		6,000	-9,880	-11,520
3	X_3	0		20,736	19,040	16,560		8,736	7,040	4,560
4	Сумма А	.=СУММ(B1:B3)		.=СУММПРОИЗВ($B$1:$B$3;D1:D3)						
5	P*:	.=(1/СУММ($B$1:$B$3))*B1								
6		.=(1/СУММ($B$1:$B$3))*B2								
7		.=(1/СУММ($B$1:$B$3))*B3								
8										
9										

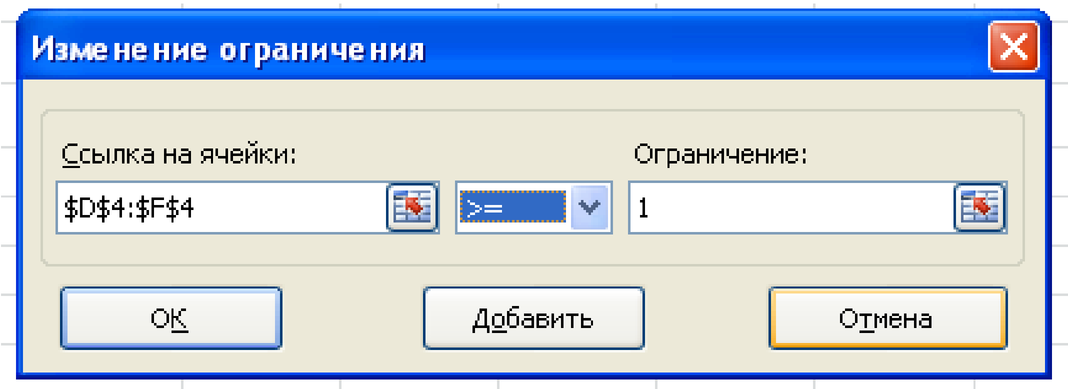
Дальше вставляем в ячейки иксов нули, а для их суммы пишем в ячейку формулу =СУММ(B1:B3), т.е. суммировать все ячейки в диапазоне от B1 до B3. Если у вас больше иксов, то просто замените B3 на ячейку последнего икса (например, для четырёх иксов =СУММ(B1:B4)). Чтобы автоматически считалась оптимальная стратегия p*, напишите в первой её ячейке формулу =(1/СУММ($B$1:$B$3))*B1 и растяните её вниз на столько ячеек, сколько у вас иксов, не забывая исправлять $B$3 на нужную, если у вас больше двух иксов. Ячейка здесь записывается со знаками $, чтобы при растягивании она не сбилась, а осталась такой же. Excel напишет ошибку деления на 0, но всё в порядке – иксы у нас пока и вправду нулевые.

Теперь нам нужно записать формулы ограничений. Ставим курсор в ячейку под первым столбиком ограничений и пишем туда =СУММПРОИЗВ($B$1:$B$3;D1:D3), меняя, если нужно, адреса ячеек с иксами и адреса с первым столбиком ограничений. Такая формула просуммирует все произведения иксов на нужные числа из матрицы. Теперь копируем эту формулу вправо на все столбцы.

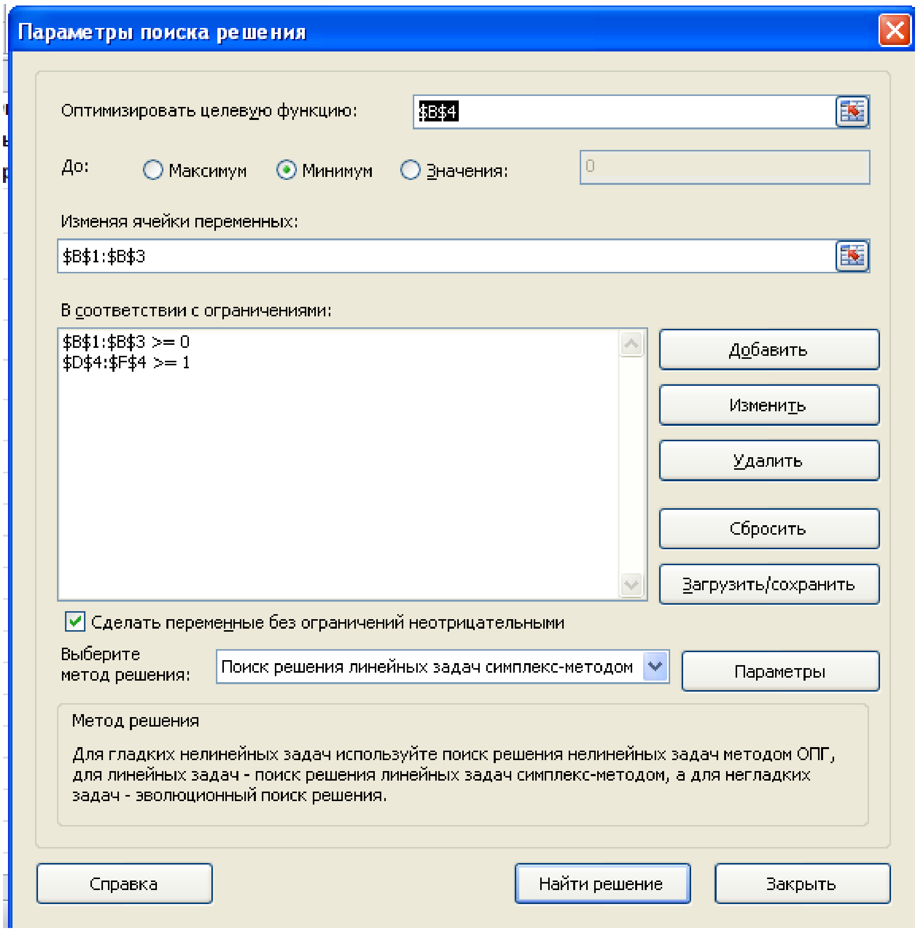
Теперь всё готово, и можно искать решение. Вызываем меню «Поиск решения» , открывается такое окно:



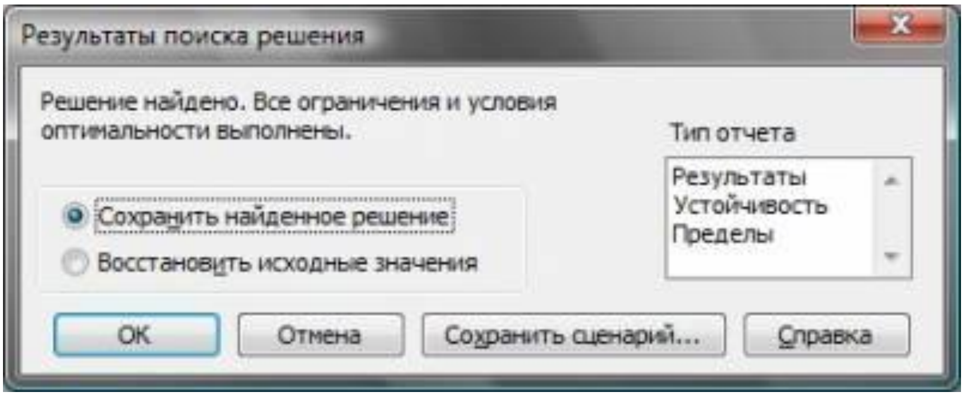
Целевой ячейкой устанавливаете ячейку с суммой иксов (у меня это $B$4). Переключатель ниже устанавливаете на «равной минимальному значению». Потом нажмёте кнопку «Предположить», и если вы вписали в иксы нули, то в окне автоматически появится диапазон ячеек иксов. Дальше вводим ограничения, всего их два: все иксы >= 0 и все ограничения >=1. Можно не выделять каждую клетку отдельно, а добавить весь диапазон для ограничений сразу, вот так:



Нажимаете «Добавить», записываете другое ограничение и нажмёте «ОК». Если вы всё сделали правильно, вы увидите примерно такое заполненное окно:



Всё готово, нажмёте «Выполнить». Если всё ок, то появится такое окно:



Можно нажать «ОК» и наслаждаться результатом – в ячейках иксов стоят нужные значения, а в ячейках p* нас ждёт уже посчитанная оптимальная стратегия для первого игрока! Это стратегия 3. Подставляя в формулу получаем ответ   Y = 10 – 0,6 * (4 + 4)/2 = 7,6 (тыс.ед)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	X_1	0	Ограничения (чтобы были больше нуля, прибавили 12)	11,608	6,560	2,952	условие	-0,392	-5,440	-9,048
2	X_2	0		18,000	2,120	0,480		6,000	-9,880	-11,520
3	X_3	0,060386473		20,736	19,040	16,560		8,736	7,040	4,560
4	Сумма A	0,060386473		1,2522	1,1498	1				
5	P*:	0								
6		0								
7		1								

Оптимальную стратегию для второго игрока считать абсолютно так же – игроков должно быть по количеству столбцов, в окне решения надо указать уже «равной максимальному значению», а ограничения должны быть <= 1. Выглядит это примерно так:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1	Условие	-0,392	-5,44	-9,048	В ограничения (чтобы были больше нуля, прибавили 12	11,608	6,560	2,952	.=СУММПРОИЗВ($F$5:$H$5;F1:H1)	
2		6	-9,88	-11,52		18,000	2,120	0,480	.=СУММПРОИЗВ($F$5:$H$5;F2:H2)	
3		8,736	7,04	4,56		20,736	19,040	16,560	.=СУММПРОИЗВ($F$5:$H$5;F3:H3)	
4										
5						0	0	0,060386	.=СУММ(F5:H5)	.=(1/СУММ($F$5:$H$5))*F5
6						y1	y2	y3	сумма Y	
7										
8										
9										
10										

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	Условие	-0,392	-5,440	-9,048	**Ограничения (чтобы были больше нуля, прибавили 12)**	11,608	6,56	2,952	0				
2		6,000	-9,880	-11,520		18	2,12	0,48	0				
3		8,736	7,040	4,560		20,736	19,04	16,56	0				
4													
5						0	0	0	0	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!	#ДЕЛ/0!
6						Y1	Y2	Y3	сумма Y	q*			
7													
8													

Результат решения

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	Условие	-0,392	-5,440	-9,048	**Ограничения (чтобы были больше нуля, прибавили 12)**	11,608	6,56	2,952	0,178261			
2		6,000	-9,880	-11,520		18	2,12	0,48	0,028986			
3		8,736	7,040	4,560		20,736	19,04	16,56	1			
4												
5						0	0	0,06039	0,060386	0	0	1
6						Y1	Y2	Y3	сумма Y	q*		
7												
8												
9												
10												

Для второго игрока является оптимальной третья стратегия, что соответствует ответу.

Самостоятельная работа (N=5) к лабораторной работе №6

Борьба двух предприятий за рынок в регионе (N – номер варианта)

Две компании, занимающиеся производством антивирусного программного обеспечения, практически полностью делят рынок некоторого региона. Разрабатывая новую версию программного продукта для мобильных телефонов, каждая из компаний может использовать один из четырех вариантов продвижения нового программного продукта на рынок, который влияет на конечную стоимость продукции.

В зависимости от сделанного выбора компании могут установить цену реализации единицы продукции на уровне 25, 22, 19 и 16 условных единиц соответственно. Соотношение цен реализации и себестоимость представлены в таблице:

Вариант продвижения нового продукта	Цена реализации единицы продукции, у.е.	Полная себестоимость единицы продукции, у.е.	
		Компания А	Компания В
1	25	17	21–0,1*N
2	22	15	10+0,1*N
3	19	10+0,1*N	10

N – номер варианта, предложенный преподавателем.

В результате маркетингового исследования рынка была определена функция спроса на программные продукты:

$$Y = 20 - 0{,}5 \cdot X,$$

где Y – количество продукции, которое будет реализовано в регионе (тыс. ед.), а X – средняя цена продукции компаний, у.е.

Значения долей продукции, реализованной компанией А, зависят от соотношения цен на продукцию компании А и компании В. Маркетинговое исследование позволило установить эту зависимость:

Цена реализации 1 ед. продукции, у.е.		**Доля реализованной продукции компании А**
Компания А	**Компания В**	
25	25	0,31
25	22	0,33
25	19	0,25
25	16	0,2
22	25	0,4
22	22	0,35
22	19	0,32
22	16	0,28
19	25	0,52
19	22	0,48
19	19	0,4
19	16	0,35
16	25	0,6
16	22	0,58
16	19	0,55
16	16	0,5

1. Существует ли в данной задаче ситуация равновесия при выборе варианта продвижения продукта на рынок обоими компаниями?

2. Существуют ли варианты, которые компании заведомо не будут выбирать вследствие невыгодности?

3. Сколько продукции будет реализовано в ситуации равновесия? Какая компания получит больше прибыль в ситуации равновесия? Какая компания будет иметь большую долю рынка в ситуации равновесия? Дайте краткую экономическую интерпретацию результатов решения задачи.

Проверить решение задач в Excel.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 7. КОРРЕЛЯЦИОННО-РЕГРЕССИОННЫЙ АНАЛИЗ В EXCEL С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ НАСТРОЙКИ ПАКЕТ АНАЛИЗА

Для проведения **корреляционно-регрессионного анализа** в первую очередь необходимо построить **матрицу коэффициентов парной корреляции** для оценки степени влияния факторов на зависимую переменную и друг на друга. Для построения

матрицы коэффициентов парной корреляции необходимо выбирать команду меню *Данные/Анализ данных/Корреляция*.
Проведение множественного корреляционно-регрессионного анализа.

7.1.Теоретические аспекты корреляционного анализа.

Изменение любого экономического показателя зависит от большого числа факторов, но из них лишь некоторые оказывают существенное воздействие на исследуемый показатель. Доля влияния остальных факторов столь незначительна, что их игнорирование не может привести к существенным отклонениям исследуемого объекта.

В большинстве случаев между экономическими явлениями не существует строгой функциональной взаимосвязи, поэтому в экономике говорят не о функциональных, а о корреляционных или статистических зависимостях.

Нахождение, оценка и анализ таких зависимостей и оценка их параметров являются одним из разделов эконометрики.

Эконометрика - это наука, в которой на базе реальных статистических данных строятся, анализируются и совершенствуются модели реальных экономических явлений.

При рассмотрении взаимосвязей выделяют одну из величин как независимую, а другие как зависимые. При рассмотрении зависимости двух случайных величин говорят о парной регрессии. Зависимость нескольких переменных называют множественной регрессией.

В регрессионных моделях зависимая (объясняемая) переменная Y может быть представлена в виде функции $f(X_1, X_2, ..., X_n)$, где $X_1, X_2, ..., X_n$ - независимые (объясняющие) переменные или факторы. В зависимости от вида функции $f(X_1, X_2, ..., X_n)$ модели делятся на линейные и нелинейные. В зависимости от количества включенных в модель факторов X модели делятся на однофакторные и многофакторные.

Основными этапами построения регрессионной модели являются:

- Построение системы показателей (факторов). Сбор и предварительный анализ исходных данных. Построение матрицы коэффициентов парной корреляции.
- Выбор вида модели и численная оценка ее параметров.
- Проверка качества модели.
- Оценка влияния отдельных факторов на основе модели.
- Прогнозирование на основе модели регрессии.

Выбор факторов, влияющих на исследуемый показатель, производится на основании качественного и количественного анализа исследуемых явлений.

Исключение части факторов осуществляется на основе анализа парных коэффициентов корреляции и оценкой их значимости. Коэффициент парной корреляции определяется по формуле:

$$r_{y,x} = \frac{\sum(y-\bar{y})(x-\bar{x})}{\sqrt{\sum(y-\bar{y})^2\sum(x-\bar{x})^2}}$$

где $\bar{x}$ – среднее значение факторного признака,

$\bar{y}$ – среднее значение результативного признака.

Значение коэффициентов парной корреляции лежит в интервале от *-1*до*+1*. Его положительное значение свидетельствует о прямой связи, отрицательное - об обратной, т.е. когда растет одна переменная, другая уменьшается. Связь считается достаточно сильной, если коэффициент корреляции по абсолютной величине превышает *0,7* и слабой, если меньше *0,4*.

Для оценки значимости коэффициента корреляции применяется t - критерий Стьюдента. при этом фактическое значение этого критерия ($t_{набл}$)

$$t_{набл} = \sqrt{\frac{r^2}{1-r^2}(n-2)}$$

сравнивается с критическим значением $t_{кр}$ которое берется из таблицы значений t с учетом заданного уровня значимости ($\alpha = 0.05$) и числа степеней свободы (n - 2).

Если $t_{набл} > t_{кр}$, то полученное значение коэффициента парной корреляции признается значимым.

Одним из условий регрессионной модели является предположение о функциональной независимости объясняющих переменных. связь между факторами называется мультиколлинеарностью, которая делает вычисление параметров модели либо невозможным, либо затрудняет содержательную интерпретацию параметров модели. Считают явление мультиколлинеарности в исходных данных установленным, если коэффициент парной корреляции между двумя переменными больше *0.8*. Чтобы избавиться от мультиколлинеарности, в модель включают лишь один из функционально связанных между собой факторов, причем тот который в большей степени связан с зависимой переменной.

7.2 Математическая постановка задачи.

Переменные:

X_0 - валовой внутренний продукт, млрд. руб.

X_1 - объем промышленной продукции, млрд. руб.

X_2 - инвестиции в основной капитал, млрд. руб.

X_3 - розничный товарооборот, млрд. руб.

X_4 - объем платных услуг населению, млрд. руб.

X_5 - доходы консолидированного бюджета, млрд. руб.

X_6 - расходы консолидированного бюджета, млрд. руб.

X_7 - общая численность официально зарегистрированных безработных, тыс. чел.

X_8 - номинальная начисленная среднемесячная заработная плата, тыс. руб.

X_9 - денежные доходы населения, млрд. руб.

X_{10} - денежные расходы и сбережения населения, млрд. руб.

Вариант	Зависимая переменная	Независимые переменные
1	X_0	$X_1 – X_{10}$
2	X_1	X_0, X_2 - X_{10}
3	X_2	X_0, X_1, X_3 - X_{10}
4	X_3	X_0 - X_2, X_4 - X_{10}
5	X_4	$X_0 – X_3, X_5$ - X_{10}
6	X_5	$X_0 – X_4, X_6$ - X_{10}
7	X_6	$X_0 – X_5, X_7$ - X_{10}
8	X_7	$X_0 – X_6, X_8$ - X_{10}
9	X_8	$X_0 – X_7, X_9$ - X_{10}
10	X_9	$X_0 – X_8, X_{10}$
11	X_{10}	$X_0 – X_9$
12	X_0	$X_1 – X_{10}$
13	X_1	X_0, X_2 - X_{10}
14	X_2	X_0, X_1, X_3 - X_{10}
15	X_3	X_0 - X_2, X_4 - X_{10}

Даны данные для показателей X_0-X_{10}. Исследовать их зависимость. Для этого:

1.Построить матрицу коэффициентов парной корреляции, проанализировать ее, сделать вывод о необходимости включения в модель данных факторов.

2. Рассчитать параметры линейной и экспоненциальной моделей. Для расчета параметров линейной модели использовать функцию *ЛИНЕЙН* и инструмент *Регрессия* надстройки *Пакет анализа*, для расчета параметров экспоненциальной - функцию *ЛГРФПРИБЛ*. Для линейной и экспоненциальной моделей рассмотреть случаи, когда аргумент *Константа* в функциях *ЛИНЕИН* и *ЛГФРФПРИБЛ* имеет значение *ИСТИНА* и *ЛОЖЬ*.

3. Сделать выводы: 1) о значимости коэффициентов, входящих в модель; 2) об адекватности модели фактическим данным;

4. На основе проведенного анализа определить вид модели, наиболее точно описывающей фактические данные;

5. Рассчитать прогнозные значения, используя выбранную модель. Найти отклонение фактических данных от расчетных. Сделать вывод;

6. Построить график, отражающий фактические и расчетные данные.

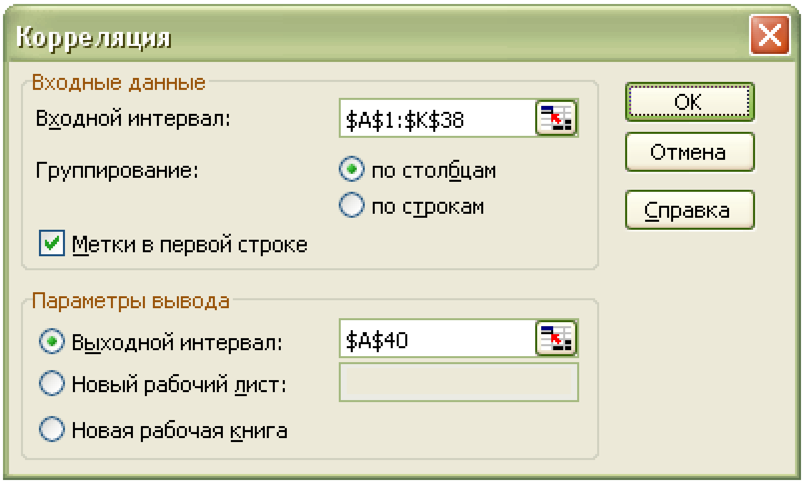
Исходные данные к заданию 1

X_0	X1	X2	X3	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10
4044,3	4356,4	605,1	1626,7	500,2	2063,2	1604	84,7	398,2	2612,8	2651
4201,3	4376,5	620,1	1602,5	512,7	2143,7	1869,2	84,7	400,4	2554,4	2497,4
4861,2	5012	914	1880,7	562	2447,7	2320,2	82,2	427,6	2783,4	2785
4560	4906,7	862,1	1982,7	556,1	2406,4	2496,5	80,3	440,6	2922,6	2837,7
4886,3	4854,9	958,4	2037	535,4	2592,9	2277,3	77,4	449,9	2842,8	2839,9
5788,8	4926,3	1488,9	2193,9	582,7	2698	2834,4	84,4	476,4	3339,9	3274,4
5539,7	4835,1	1231,5	2152,1	533,1	2529,7	2563,8	73,1	487,9	3252,5	3188,2
6431,4	5254,4	1429,6	2227	532,9	2644,9	2434,2	73	497,4	3164	3224
6681,5	5588,4	1679,5	2344,4	550,7	2793,7	2616,7	72,5	485,2	3503,3	3444,4
5836	5416,7	1326,2	2341,7	567,6	2669,2	2565,9	71,1	501,5	3309,6	3318,1
5881,2	5477,2	1456,8	2211,9	625,9	2845	2904,5	69,3	503,3	3350,4	3336,6
6355,4	5503,9	2523,6	2629,8	716,9	2990,5	4770,1	67,9	562,2	4172,2	4072,7
4995,9	5842,5	846	2017,5	633,6	2659,8	1982,3	72,2	519	3299,1	3328,2
5175,2	5984,6	923,8	2009,4	635,5	2636,6	2517,9	73,4	525,4	3335,3	3292,8
5971,6	6446,3	1173,3	2260	679,5	2943,1	3048,8	72,8	558,5	3619,7	3608,4
5568,1	6082,5	1156,7	2400,1	622,6	2890,9	2984,8	71,8	561,6	3836,6	3732,5
6025,1	6301,7	1450,2	2508,1	635,3	3051,5	2788,9	69,3	579,3	3361,1	3376,4
7025,8	6603,9	1845,2	2684,1	680,9	3249	3344	66,5	604	4203,3	4082
6782,7	6593,6	1566,4	2736,6	670	3052,6	3026,7	62,3	612,3	3961,9	3932,6
7775,5	7003,6	1729,7	2824,5	678,6	3349,7	2894,7	60	623,5	4016,9	3999,9
7993,4	6823,4	1987,3	2880,2	684,4	3456,3	3094,8	56,4	606,4	4247,3	4192,3
7169,8	6610,8	1902,7	2812,9	788,2	3731,2	3119,8	53,2	618,4	4146,8	4186,5
7155,5	6482,3	1839,1	2704,2	765,1	3517,8	3327,3	52,6	611,5	4277,5	4255,5
7628,4	6491,8	3953,7	3224,2	833,5	3823,1	4507	52	668	6379,6	6297
6194,3	6319,8	1351,2	2584,7	795,3	3482,9	2321,8	53,5	617,2	4148,2	4283,1
6352,4	6607,3 '	1185,3	2466,7	770,1	3347,6	2941	53	614,3	4180,2	4152,6

7220,6	7068,7	1715,5	2928,3	815,7	3585,4	3284,1	51,7	659,4	4601,5	4584,6
6804,6	6895,9	1536,4	3036,4	758,7	3678,3	3856,4	50,2	661,9	4800,2	4687,9
7325,9	7459,9	1823,1	3021,1	777,8	3801,6	3647,7	47,7	686,9	4242,8	4284,6
8336,5	7647,9	2452,1	3237,6	837,3	4002,1	4038,2	46,3	710,2	5270,7	5144,8
8236,2	7660,3	2076,6	3247,1	820,4	3990,3	4067,5	46,7	732	4788	4769,1
9214,2	8158,4	2129,2	3436,9	829,1	4212	3588,1	48,6	737,3	4984,9	4984,9
9721,8	7857,1	2502,7	3472,8	820,8	4154,2	3781,3	46,5	713,4	5239	5198,5
8686,4	8336,9	2238,7	3504,1	872,2	4322,7	4369,4	45,5	738	4993,5	5050,6
8615,6	8589,3	2417,6	3357,1	916	4623,1	4506,1	45,2	736,4	5327,6	5300,1
9378,7	8902,3	3838,4	4034,7	974,8	4817,9	7101,1	44,1	795,4	6410,2	6293,5
7860,4	9516,9	1468,6	3450,4	938,5	4632	2747,2	49,6	756,3	5257	5272,2

7.3. Проведение корреляционного анализа средствами MS Excel .

Для построения матрицы коэффициентов парной корреляции необходимо выбирать команду меню *Сервис/Анализ данных/Корреляция.* Откроется следующее диалоговое окно:



Далее следует нажать кнопку *OK*. После этого будет создана матрица коэффициентов парной корреляции:

	Y	X0	X1	X2	X4	X5	X6	X7	X8	X9	X10
Y	1										
X0	0.954	1									
X1	0.926	0.880	1								
X2	0.820	0.795	0.609	1							
X4	0.917	0.835	0.926	0.716	1						
X5	0.969	0.918	0.960	0.740	0.965	1					
X6	0.817	0.739	0.660	0.888	0.747	0.751	1				
X7	-0.920	-0.885	-0.891	-0.689	-0.928	-0.939	-0.680	1			
X8	0.968	0.914	0.963	0.721	0.954	0.973	0.746	-0.953	1		
X9	0.943	0.874	0.852	0.881	0.923	0.924	0.833	-0.885	0.921	1	
X10	0.947	0.879	0.863	0.873	0.934	0.934	0.819	-0.898	0.930	0.998	1

Анализ матрицы коэффициентов парной корреляции показывает, что существенное влияние на зависимую переменную оказывают все факторы. Для исключения явления мультиколлинеарности все факторы кроме X_2 и X_5 следует исключить из модели.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА 8 (продолжение). РЕГРЕССИОННЫЕ МОДЕЛИ И СПОСОБЫ ИХ РАСЧЕТА

7.4. Регрессионные модели и способы их расчета.

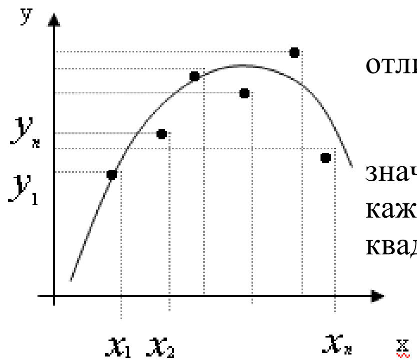
Пусть в результате измерений в процессе опыта получена таблица некоторой зависимости *f(x)*:

x				x_i		
$f(x)$				y_i		

Нужно найти формулу, выражающую эту зависимость аналитически.

Поставим задачу так, чтобы с самого начала учитывался характер исходной функции. Найти функцию заданного вида $y = F(x)$, которая в узловых точках принимает как можно более близкие значения к значениям из таблицы $y_1, y_2, \ldots, y_n$.

Практически вид приближающей функции F устанавливают следующим образом: по таблице строится точечный график функции f, а затем проводится плавная кривая, по возможности наилучшим образом отражающая характер расположения точек:



В узловых точках функции *f(x)* и *F(x)* будут отличаться на величину $\varepsilon_i = f(x_i) - F(x_i)$. (1)

Отклонения ε_i могут принимать «+» или «-» значения. Чтобы эти знаки не учитывать, возведем каждое отклонение в квадрат и просуммируем квадраты отклонений по всем узлам:

$$Q = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(f(x_i) - F(x_i) \right)^2 . \quad (2)$$

Метод построения приближающих функции F(x) из условия минимума величины Q называется методом наименьших квадратов.

В качестве приближающих функций в зависимости от характера точечного графика функции f часто используют следующие функции:

1. $y = ax + b$; ; 3. $y = ax^m$ 5. $y = \dfrac{1}{ax+b}$; 7. $y = a\dfrac{1}{x} + b$;

2. $y = ax^2 + bx + c$; 4. $y = ae^{mx}$; 6. $y = a\ln x + b$; 8. $y = \dfrac{x}{ax+b}$.

Здесь a,b,c,m – параметры. Когда вид приближающей функции (1-8) установлен, задача сводится только к отысканию параметров.

Рассмотрим метод их нахождения в общем виде на примере F с тремя параметрами:

Пусть $y = F(x,a,b,c)$ (3), где a,b,c - постоянные, x - независимая переменная, тогда значения ε и Q из выражения (2) примет вид

$$Q = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - F(x_i,a,b,c)\right)^2 = \Phi(a,b,c) \quad (4)$$

и является функцией трех переменных (параметров *a, b, c*). Задача сводится к отысканию ее минимума.

Используем необходимое условие экстремума частная производная функции должна быть равна нулю: $\dfrac{\partial\Phi}{\partial a} = 0, \dfrac{\partial\Phi}{\partial b} = 0, \dfrac{\partial\Phi}{\partial c} = 0$, т. е. получаем систему из следующих уравнений

$$\begin{cases} 2\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\left[y_i - F(x_i,a,b,c)\right]\cdot F'_a(x_i,a,b,c) = 0; \\ 2\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\left[y_i - F(x_i,a,b,c)\right]\cdot F'_b(x_i,a,b,c) = 0; \\ 2\cdot\sum\limits_{i=1}^{n}\left[y_i - F(x_i,a,b,c)\right]\cdot F'_c(x_i,a,b,c) = 0. \end{cases} \quad (5)$$

Решив эту систему трех уравнений с тремя неизвестными относительно параметров *a, b, c*, мы и получим конкретный вид искомой функции *F(x, a, b, c).*

Изменение количества параметров не изменит самого подхода, а приведет лишь к изменению количества уравнений в системе (5).

Построив функцию *F(x)*, находят сумму квадратов отклонений *Q*. Из двух различных приближений выбирают то, для которого эта сумма минимальна. Обычно при обработке экспериментальных данных, определенных с погрешностью ε, согласуют погрешность ε с погрешностью МНК, т. е. $\sqrt{Q} \approx \varepsilon$. Это дает оптимальный результат.

7.4.1. Линейная функция (линейная регрессия).

Пусть приближающая функция имеет вид: *F(x, a, c)=ax+b*

Тогда частные производные: $\dfrac{\partial F}{\partial a} = x, \dfrac{\partial F}{\partial b} = 1.$

Составим систему вида (3): $\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)x_i = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b) = 0 \end{cases}$ (1)

$$\begin{cases} \sum y_i x_i - a\sum x_i^2 - b\sum x_i = 0 \\ \sum y_i - a\sum x_i - nb = 0 \end{cases} \quad (2)$$

Разделим каждое уравнение системы (2) на *n* и приведем ее к следующему виду:

$$\begin{cases} a\cdot\left(\dfrac{1}{n}\sum x_i^2\right) + b\cdot\left(\dfrac{1}{n}\sum x_i\right) = \dfrac{1}{n}\sum x_i y_i \\ a\cdot\left(\dfrac{1}{n}\sum x_i\right) + b = \dfrac{1}{n}\sum y_i \end{cases}.$$

Обозначим:

$$\frac{1}{n}\sum x_i^2 = M_{x^2}, \frac{1}{n}\sum x_i = M_x, \frac{1}{n}\sum x_i y_i = M_{xy}, \frac{1}{n}\sum y_i = M_y \qquad (3)$$

Тогда система имеет вид: $\begin{cases} M_{x^2}a + M_x b = M_{xy} \\ M_x a + b = M_y \end{cases}$ (4)

Коэффициенты этой системы – числа, которые легко вычисляются в каждой конкретной задаче по формулам (3) через значения x_i и y_i из исходной таблицы.

Решив последнюю систему (4), получаем конкретный вид линейной функции *y=ax+b*.

7.4.2. Квадратная регрессия (параболическая функция).

В этом случае приближенная функция имеет вид:

$$F(x,a,b,c) = a\,x^2 + bx + c.$$

Частная производная $\frac{\partial F}{\partial a} = x^2; \frac{\partial F}{\partial b} = x; \frac{\partial F}{\partial c} = 1.$

Составим систему вида: $\begin{cases} \sum\left(y_i - ax_i^2 - bx_i - c\right)x_i^2 = 0 \\ \sum\left(y_i - ax_i^2 - bx_i - c\right)x_i = 0 \\ \sum\left(y_i - ax_i^2 - bx_i - c\right) = 0 \end{cases}.$

Приведем подобные слагаемые аналогично методу получения методу линии регрессии и обозначим $M_{x^4} = \frac{1}{n}\sum x_i^4; M_{x^3} = \frac{1}{n}\sum x_i^3; M_{x^2y} = \frac{1}{n}\sum x_i^2 y_i;$

тогда система примет вид:

$$\begin{cases} M_{x^4} \cdot a + M_{x^3} \cdot b + M_{x^2} \cdot c = M_{x^2y} \\ M_{x^3} \cdot a + M_{x^2} \cdot b + M_{x} \cdot c = M_{xy} \\ M_{x^2} \cdot a + M_{x} \cdot b + c = M_{y} \end{cases}$$

Решение последней системы дает значения параметров *a, b, c* для приближенной функции в виде параболы.

7.4.3. Степенная функция (геометрическая регрессия).

Уравнение линии степенной функции иногда еще называют геометрической регрессией. Покажем, что нахождение приближенных функций с двумя параметрами *F(x, a, b)* в виде элементарных функций может быть сведено к нахождению параметров линейной функции.

Будем искать функцию в виде: $F(x,a,m) = a\,x^m$ (1)

Предположим, что любые $x_i > 0$ и $y_i > 0.$

Прологарифмируем (1): $\ln F = \ln(a \cdot x^m);$

$$\ln F = \ln a + \ln x^m;$$

$$\ln F = \ln a + m \cdot \ln x \qquad (2).$$

Т. к. F – приближающая функция для *f*, то $\ln F$ – приближающая для $\ln f$.

Введем новую переменную $u = \ln x$ и обозначим $m = A; \ln a = B.$ (*)

Тогда $\ln F$ - функция от $u : \Phi(u).$

Тогда (2) примет вид: $\Phi(u,A,B) = Au + B$ (3),

т. е. задача свелась к отысканию приближающей функции в виде линейной.

Практически при нахождении приближающей степенной функции необходимо выполнить следующие действия:

- По исходной таблице составить новую, прологарифмировав значения x и y.
- По новой таблице найти параметры A и B для линейной функции вида (3).
- Используя введенные обозначения (*), найти a и m и подставить в выражение (1).

7.4.4. Показательная функция.

Пусть приближающая функция имеет вид: $F(x,a,m) = a\,e^{mx}, a > 0$.

Прологарифмируем это равенство: $ln\,F = ln(\,a \cdot x^{mx}\,);$

$$ln\,F = ln\,a + ln\,x^{mx};$$
$$ln\,F = ln\,a + m \cdot x.$$

Обозначения те же: $m = A; ln\,a = B.\ ln\,F = Ax + B.$

Т. о. алгоритм построения приближающей функции следующий:

- Прологарифмировать значения функции y в исходной таблице.
- Для новой таблицы с исходными значениями x_i и новыми y_i найти параметры A и B.
- Используя введенное обозначение $m = A; \ln a = B,$ найти a и m, подставить их в формулу показательной функции.

7.4.5. Дробно – линейная функция.

Пусть приближающая функция имеет вид: $F(x,a,b) = \dfrac{1}{ax+b}$.

Перепишем равенство следующим образом: $\dfrac{1}{F(x,a,b)} = ax + b$. Отсюда следует, что для нахождения параметров *a* и *b* необходимо в исходной таблице значения x_i оставить прежние, а значения y_i заменить обратными числами, после чего по полученной таблице найти приближенную функцию *ax+b*.

7.4.6. Логарифмическая функция.

Пусть приближающая функция имеет вид: $F(x,a,b) = a\,ln\,x + b$.

Для перехода к линейной функции достаточно сделать подстановку: $u = ln\,x$.

Практически:

- в исходной таблице логарифмируем значения x_i;
- по новым значениям аргумента и исходным значениям y_i находятся параметры a и b, которые подставляют в новое равенство.

6.4.7. Гипербола.

Если точечный график, построенный по исходной таблице, дает ветвь гиперболы, то приближающую функцию можно искать в виде: $F(x,a,b)=\frac{a}{x}+b$.

Выполнив подстановку $u=\frac{1}{x}$, получим: $\Phi(x,a,b)=au+b$.

Практический алгоритм:

- в исходной таблице значения аргумента следует заменить обратными числами и найти для новой таблицы приближающую функцию в виде линейной;
- полученные параметры a и b подставить в исходную формулу.

7.4.8. Дробно-рациональная функция.

Пусть приближающая функция будет иметь вид: $\frac{1}{F(x,a,b)}=a+\frac{b}{x}$.

Имеем: $F(x,a,b)=a\ln x+b$.

Алгоритм вычисления:

- в исходной таблице значения *x* и *y* заменяем обратными величинами: $\frac{1}{x}$ и $\frac{1}{y}$;
- по новой таблице строим функцию вида $u=bz+a.$
- найденные значения *a* и *b* будут искомыми.

7.5.6 Проведение регрессионного анализа средствами MS Excel.

Расчет параметров линейной регрессии с использованием функции *ЛИНЕЙН*.

Для линейной аппроксимации в Excel существует функция *ЛИНЕЙН(изв. зн. Y, изв. зн. X, константа, статистика)* она возвращает массив значений описывающих кривую вида:

$$Y\ =\ b+m_1\cdot x_1+m_2\cdot x_2+\ldots+m_n\cdot x_n$$

где *изв. зн. Y* – это известные значения функции

изв. зн. X – это известные значения аргументов

константа – определяет чему должно равняться *b*, если *константа* имеет значение *ЛОЖЬ* то *b* полагается равным *1*, иначе *b* вычисляется обычным образом.

статистика – если значение равно *ИСТИНА* то будет представлена дополнительная регрессионная статистика, если *ЛОЖЬ* то нет.

Для получения линейной регрессионной зависимости, с выводом всей статистической информации следует выделить диапазон **A54:C58,** нажать клавишу *F2*, и ввести формулу *=ЛИНЕЙН(P2:P38;N2:O38;1;1)*, после окончания ввода формулы нажать комбинацию клавиш *Ctrl+Shift+Enter* так как данная функция возвращает массив значений. В результате в данных ячейках будет полная статистическая информация:

Линейная зависимость

			0.17		229.
	0.645	6		123	
			0.03		94.9
	0.039	8		69	
			115.		#Н/
	0.963	657		Д	
					#Н/
	441.156		34	Д	
	118023		4548		#Н/
58		05		Д	

Полученные числа имеют следующий смысл:

m_n	m_{n-1}	…	b
S_{en}	S_{en-1}	…	S_{eb}
R^2	S_{ey}		
F	Df		
$Ssreg$	$Ssresid$		

S_e – стандартная ошибка для коэффициента m

S_{eb} – стандартная ошибка для свободного члена b

R^2 – коэффициент детерминированности, который показывает как близко уравнение описывает исходные данные. Чем ближе он к 1, тем больше сходится теоретическая зависимость и экспериментальные данные.

S_{ey} – стандартная ошибка для y

F – критерий Фишера определяет случайная или нет взаимосвязь между зависимой и независимой переменными

Df – степень свободы системы

Ssreg – регрессионная сумма квадратов

Ssresid – остаточная сумма квадратов

Аналогичным образом построим линейную регрессионную зависимость при аргументе *Константа* равном 0, в диапазоне **E54:G58,** введя формулу *=ЛИНЕЙН(P2:P38;N2:O38;0;1)*:

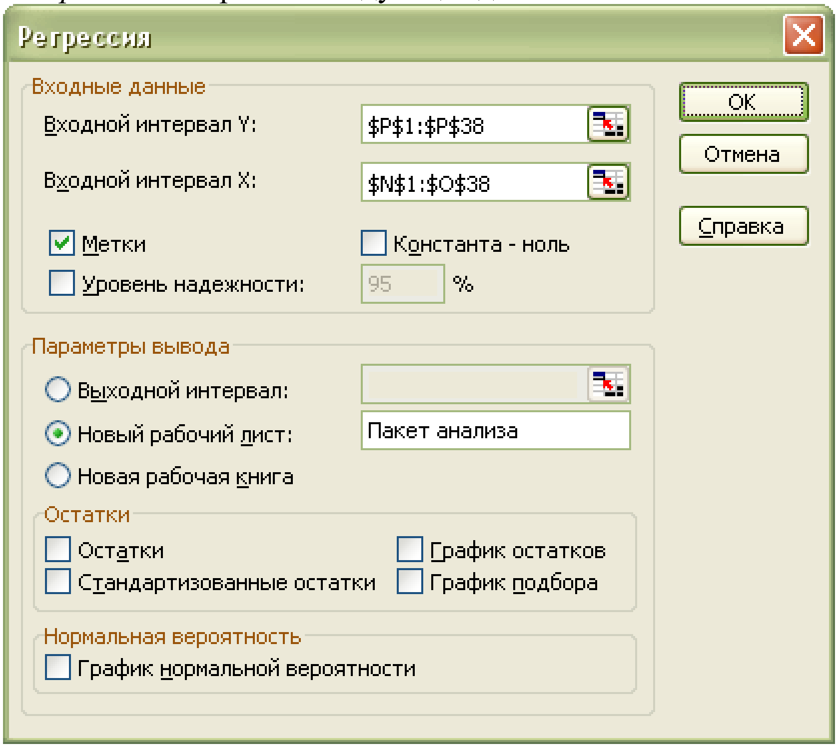
Линейная зависимость

		0.1	
0.728	46		0

			0.0		#
	0.021	39		Н/Д	
	0.998		123		#
0		.365		Н/Д	
	8925.				#
124			35	Н/Д	
	2.7E		532		#
+08		666		Н/Д	

Расчет параметров линейной регрессии с использованием инструмента *Регрессия* надстройки *Пакет анализа*.

Для проведения регрессионного анализа выберем пункт меню *Данные/Анализ данных/Регрессия*. Откроется следующее диалоговое окно:



После заполнения полей ввода нажимаем кнопку *OK* и получаем следующие результаты:

Регрессионная статистика	
Множественный	0
R	.981
	0
R-квадрат	.963
Нормированный	0
R-квадрат	.961
Стандартная	1

ошибка	15.6573
Наблюдения	7

Дисперсионный анализ

	f	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*
Регрессия		11802358	5901179	441.156	4.79E-25
Остаток	4	454805.4	13376.63		
Итого	6	12257163			

	Коэффициенты	*Стандартная ошибка*	*t статистика*	*P Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*	*Нижние 95.0%*	*Верхние 95.0%*
Y	229.123	94.969	2.413	0.021	36.122	422.123	36.122	422.123
X2	0.176	0.038	4.597	0.000	0.098	0.255	0.098	0.255
X5	0.645	0.039	16.336	1.15E-17	0.565	0.726	0.565	0.726

Результаты, полученные при расчете с использованием инструмента *Регрессия* надстройки *Пакет анализа*, совпали с результатами, полученными при помощи функции *ЛИНЕЙН* при аргументе *Константа* имеющем значение *ИСТИНА*.

Расчет параметров экспоненциальной регрессии с использованием функции *ЛГРФПРИБЛ*.

Для экспоненциальной аппроксимации в Excel существует функция *ЛГРФПРИБЛ(изв. зн. Y, изв. зн. X, константа, статистика)* она возвращает массив значений описывающих кривую вида:

$$Y = b \cdot {m_1}^{x_1} \cdot {m_2}^{x_3} \cdot \ldots \cdot {m_n}^{x_n}$$

изв. зн. Y – это известные значения функции

изв. зн. X – это известные значения аргументов

константа – определяет чему должно равняться b, если *константа* имеет значение *ЛОЖЬ* то b полагается равным *1*, иначе b вычисляется обычным образом.

статистика – если значение равно *ИСТИНА* то будет представлена дополнительная регрессионная статистика, если *ЛОЖЬ* то нет.

Для получения экспоненциальной регрессионной зависимости, с выводом всей статистической информации следует выделить диапазон **I54:K58,** нажать клавишу *F2*, и ввести формулу *=ЛГРФПРИБЛ(P2:P38;N2:O38;1;1)*, после окончания ввода формулы нажать комбинацию клавиш *Ctrl+Shift+Enter* так как данная функция возвращает массив значений. В результате в данном диапазоне будет получена полная статистическая информация:

Экспоненциальная зависимость

1.0002	1.00007	1030.47
1.9E-05	0.000	0.046
0.940	0.057	#Н/Д
266.115	34	#Н/Д
1.702	0.109	#Н/Д

Полученные числа имеют следующий смысл:

m_n	m_{n-1}	…	b
S_{en}	S_{en-1}	…	S_{eb}
R^2	S_{ey}		
F	Df		

Ssreg	*Ssresid*		

S_e – стандартная ошибка для коэффициента m

S_{eb} – стандартная ошибка для свободного члена b

R^2 – коэффициент детерминированности, который показывает как близко уравнение описывает исходные данные. Чем ближе он к 1, тем больше сходится теоретическая зависимость и экспериментальные данные.

S_{ey} – стандартная ошибка для y

F – критерий Фишера определяет случайная или нет взаимосвязь между зависимой и независимой переменными

Df – степень свободы системы

Ssreg – регрессионная сумма квадратов

Ssresid – остаточная сумма квадратов

Аналогичным образом построим экспоненциальную регрессионную зависимость при аргументе *Константа* равном 0, в диапазоне **M54:O58,** введя формулу *=ЛГРФПРИБЛ(P2:P38;N2:O38;0;1)*:

Экспоненциальная зависимость

1.003	0.99913	1
0.000244	0.000447	#Н/Д
0.969	1.429	#Н/Д
542.226	35	#Н/Д
2215.263	71.496	#Н/Д

Определение модели наиболее точно описывающей фактические данные.

Зависимость	Вид уравнения	R^2
Линейная	$y(x) = b_0 + b_1 \cdot x$	0.963
Линейная	$y(x) = b \cdot x$	**0.998**
Экспоненциальная	$y(x) = b_0 \cdot b_1^x$	0.940
Экспоненциальная	$y(x) = b^x$	0.969

Моделью наиболее точно описывающей фактические данные является линейная модель вида $y(x) = b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2$, так как для нее коэффициент детерминированности R^2 имеет наибольшее значение.

Оценка значимости коэффициентов модели и адекватности модели.

Оценка качества модели по критериям Стьюдента и Фишера будет проводиться путём сравнения расчетных значений с табличными.

Для оценки качества модели по критерию Стьюдента фактическое значение этого критерия *($t_{набл}$)*

$$t_{набл} = \sqrt{\frac{r^2}{1 - r^2}(n - 2)}$$

сравнивается с критическим значением $t_{кр}$ которое берется из таблицы значений t с учетом заданного уровня значимости ($\alpha = 0.05$) и числа степеней свободы *(n - 2)*.

Если $t_{набл} > t_{кр}$, то полученное значение коэффициента парной корреляции признается значимым.

Критическое значение при $\alpha = 0{,}05$ и $v = 35$ равно $t_{кр}(35{,}0.005) = 2.030$.

Критерий Стьюдента

Фактор	$t_{набл}$	$t_{кр}$	Значимость
X_2	7.568	2.030	существенна
X_5	20.913	2.030	существенна

Проверим значимость коэффициента детерминации, используя F-критерий Фишера.

Вычислим статистику F по формуле:

$$F = \frac{R^2}{1 - R^2} \cdot \frac{N - m}{m - 1}$$

где:

$m = 3$ – число параметров в уравнении регрессии;

$N = 37$ – число наблюдений в выборочной совокупности.

Математической моделью статистического распределения F-статистики является распределение Фишера с $v_1 = m - 1 = 3 - 1 = 2$ и $v_2 = N - m = 37 - 3 = 34$ степенями свободы. Критическое значение этой статистики при $a = 0{,}05$ и $v_1 = 2$ и $v_2 = 34$ степенях свободы равно $F_{кр}(2, 34, 0.05) = 3.276$.

Критерий Фишера

F	[illegible]	Уравнение

расч	*кр*	регрессии
8916.383	.276	адекватно

Таким образом, модель $Y = 0.146 \cdot X_2 + 0.728 \cdot X_5$ объясняет ***99.8%*** общей дисперсии признака *Y*. Это указывает на то, что подобранная модель является адекватной. 1.6. Расчет прогнозных значений и суммы квадратов отклонений.

Введем в ячейку **Q2** формулу *=$F$54*N2+$E$54*O2* (расчет прогнозных значений), затем скопируем ее в ячейки **Q3:Q38**. В ячейку **R2** формулу *=(P2-Q2)^2* (расчет суммы квадратов отклонений), затем скопируем ее в ячейки **R3:R38**, и подсчитаем сумму полученных значений в ячейке **R39**.

X_2	X_5	Y	$y(x)$	$(Y - y(x))^2$
605.1	2063.2	1626.7	1589.7	1367.523
620.1	2143.7	1602.5	1650.5	2303.318
914	2447.7	1880.7	1914.5	1144.709
862.1	2406.4	1982.7	1876.9	11189.53
958.4	2592.9	2037	2026.7	106.5821
1488.9	2698	2193.9	2180.4	182.342
1231.5	2529.7	2152.1	2020.4	17335.88
1429.6	2644.9	2227	2133.1	8814.026
1679.5	2793.7	2344.4	2277.8	4436.216
1326.2	2669.2	2341.7	2135.8	42415.15
1456.8	2845	2211.9	2282.7	5014.463
2523.6	2990.5	2629.8	2543.9	7377.384
846	2659.8	2017.5	2059.0	1722.637
923.8	2636.6	2009.4	2053.4	1939.955
1	2	226	2	279

173.3	943.1	0	312.8	2.24
1 156.7	2 890.9	240 0.1	2 272.4	162 98.85
1 450.2	3 051.5	250 8.1	2 432.0	578 4.146
1 845.2	3 249	268 4.1	2 633.3	258 1.453
1 566.4	3 052.6	273 6.6	2 449.8	822 75.65
1 729.7	3 349.7	282 4.5	2 689.8	181 52.31
1 987.3	3 456.3	288 0.2	2 804.9	567 6.928
1 902.7	3 731.2	281 2.9	2 992.6	322 97.9
1 839.1	3 517.8	270 4.2	2 828.0	153 36.69
3 953.7	3 823.1	322 4.2	3 358.1	179 22.28
1 351.2	3 482.9	258 4.7	2 731.6	215 84.07
1 185.3	3 347.6	246 6.7	2 609.0	202 46.66
1 715.5	3 585.4	292 8.3	2 859.2	476 8.047
1 536.4	3 678.3	303 6.4	2 900.8	183 89.81
1 823.1	3 801.6	302 1.1	3 032.3	124. 6986
2 452.1	4 002.1	323 7.6	3 269.8	103 4.273
2 076.6	3 990.3	324 7.1	3 206.5	164 7.633
2 129.2	4 212	343 6.9	3 375.5	376 7.099
2 502.7	4 154.2	347 2.8	3 387.8	722 0.377
2 238.7	4 322.7	350 4.1	3 472.0	102 8.291
2 417.6	4 623.1	335 7.1	3 716.7	129 321.2
3 838.4	4 817.9	403 4.7	4 065.3	937. 7363

1468.6	4632	3450.4	3585.0	18128.14

532
∑ **666.2**

Приложения.

Задание 1.

Таблица Excel в режиме формул:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
22	4247.3	7993.4	6823.4	1987.3	2880.2	684.4	3456.3	3094.8	56.4	606.4	4192.3	
23	4146.8	7169.8	6610.8	1902.7	2812.9	788.2	3731.2	3119.8	53.2	618.4	4186.5	
24	4277.5	7155.5	6482.3	1839.1	2704.2	765.1	3517.8	3327.3	52.6	611.5	4255.5	
25	6379.6	7628.4	6491.8	3953.7	3224.2	833.5	3823.1	4507	52	668	6297	
26	4148.2	6194.3	6319.8	1351.2	2584.7	795.3	3482.9	2321.8	53.5	617.2	4283.1	
27	4180.2	6352.4	6607.3	1185.3	2466.7	770.1	3347.6	2941	53	614.3	4152.6	
28	4601.5	7220.6	7068.7	1715.5	2928.3	815.7	3585.4	3284.1	51.7	659.4	4584.6	
29	4800.2	6804.6	6895.9	1536.4	3036.4	758.7	3678.3	3856.4	50.2	661.9	4687.9	
30	4242.8	7325.9	7459.9	1823.1	3021.1	777.8	3801.6	3647.7	47.7	686.9	4284.6	
31	5270.7	8336.5	7647.9	2452.1	3237.6	837.3	4002.1	4038.2	46.3	710.2	5144.8	
32	4788	8236.2	7660.3	2076.6	3247.1	820.4	3990.3	4067.5	46.7	732	4769.1	
33	4984.9	9214.2	8158.4	2129.2	3436.9	829.1	4212	3588.1	48.6	737.3	4984.9	
34	5239	9721.8	7857.1	2502.7	3472.8	820.8	4154.2	3781.3	46.5	713.4	5198.5	
35	4993.5	8686.4	8336.9	2238.7	3504.1	872.2	4322.7	4369.4	45.5	738	5050.6	
36	5327.6	8615.6	8589.3	2417.6	3357.1	916	4623.1	4506.1	45.2	736.4	5300.1	
37	6410.2	9378.7	8902.3	3838.4	4034.7	974.8	4817.9	7101.1	44.1	795.4	6293.5	
38	5257	7860.4	9516.9	1468.6	3450.4	938.5	4632	2747.2	49.6	756.3	5272.2	
39												
40		*Y*	*X0*	*X1*	*X2*	*X3*	*X4*	*X5*	*X6*	*X7*	*X8*	*X10*
41	Y	1										
42	X0	**0.873745084258706**	1									
43	X1	**0.852112098354572**	**0.880119601496517**	1								
44	X2	**0.880894613769373**	0.794689073518184	0.608760808569823	1							
45	X3	**0.942676305710393**	**0.95362953063419**	**0.926389704579263**	**0.819542**	1						
46	X4	**0.92312802074209**	**0.834978696875886**	**0.925502763793296**	0.715842	**0.9167**	1					
47	X5	**0.923816830278551**	**0.918193989879179**	**0.959884743656317**	0.740002	**0.9694**	**0.965167303549175**	1				
48	X6	**0.832729617990783**	0.739201370897937	0.659629368295943	**0.888435**	**0.8167**	0.747419774720327	0.75146	1			
49	X7	**-0.884757500815514**	**-0.884631909599532**	**-0.890915315232249**	-0.68938	**-0.920**	**-0.92782226708191**	**-0.93904**	-0.679	1		
50	X8	**0.921461825687001**	**0.914008652684483**	**0.963210317836625**	0.721198	**0.9680**	**0.95409739101679**	**0.97280**	0.746	**-0.953408033396766**	1	
51	X10	**0.998260346728011**	**0.879068871402411**	**0.86307832305655**	**0.872862**	**0.9470**	**0.93410198063338**	**0.93417**	**0.818**	**-0.898078038113001**	**0.93043**	1
52												
53	Линейная зависимость			Линейная зависимость			Экспоненциальная зависимость			Экспоненциальная зависимость		
54	=ЛИНЕЙН(A2:A38;K2:	=ЛИНЕЙН(A2:A38;K2:K38;1;1)		=ЛИНЕЙН(A2:A38;K2:K38;0;1)	=ЛИНЕЙ		=ЛГРФПРИБЛ(A2:A38;K2:K38;1;1)	=ЛГРФП		=ЛГРФПРИБЛ(A2:A38;K2:K38;0;1)	=ЛГРФП	
55	=ЛИНЕЙН(A2:A38;K2:	=ЛИНЕЙН(A2:A38;K2:K38;1;1)		=ЛИНЕЙН(A2:A38;K2:K38;0;1)	=ЛИНЕЙ		=ЛГРФПРИБЛ(A2:A38;K2:K38;1;1)	=ЛГРФП		=ЛГРФПРИБЛ(A2:A38;K2:K38;0;1)	=ЛГРФП	
56	=ЛИНЕЙН(A2:A38;K2:	=ЛИНЕЙН(A2:A38;K2:K38;1;1)		=ЛИНЕЙН(A2:A38;K2:K38;0;1)	=ЛИНЕЙ		=ЛГРФПРИБЛ(A2:A38;K2:K38;1;1)	=ЛГРФП		=ЛГРФПРИБЛ(A2:A38;K2:K38;0;1)	=ЛГРФП	
57	=ЛИНЕЙН(A2:A38;K2:	=ЛИНЕЙН(A2:A38;K2:K38;1;1)		=ЛИНЕЙН(A2:A38;K2:K38;0;1)	=ЛИНЕЙ		=ЛГРФПРИБЛ(A2:A38;K2:K38;1;1)	=ЛГРФП		=ЛГРФПРИБЛ(A2:A38;K2:K38;0;1)	=ЛГРФП	
58	=ЛИНЕЙН(A2:A38;K2:	=ЛИНЕЙН(A2:A38;K2:K38;1;1)		=ЛИНЕЙН(A2:A38;K2:K38;0;1)	=ЛИНЕЙ		=ЛГРФПРИБЛ(A2:A38;K2:K38;1;1)	=ЛГРФП		=ЛГРФПРИБЛ(A2:A38;K2:K38;0;1)	=ЛГРФП	
59												
60	Критерий Стьюдента											
61	Фактор	$t_{набл}$	$t_{кр}$	Значимость								
62	X_{10}	=КОРЕНЬ(B51^2/(1-B51^2)*28)	= СТЬЮДРАСПОБР(0.05;35)	=ЕСЛИ(B62>C62;"существенна";"нес								
63												
64	Критерий Фишера											
65	$F_{расч}$	$F_{кр}$	Уравнение регрессии									
66	=D56^2/(1-D56^2)*35/1	= FРАСПОБР(0.05;1;35)	=ЕСЛИ(A66>B66;"адекватно";"не									

ЛАБОРАТОРНА РОБОТА №9, 10. АЛГОРИТМ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ОБЪЁМА ПРОДАЖ В MS EXCEL

На сегодняшний день наука достаточно далеко продвинулась в разработке технологий прогнозирования. Специалистам хорошо известны методы нейросетевого прогнозирования, нечёткой логики и т.п. Разработаны соответствующие программные пакеты, но на практике они, к сожалению, не всегда доступны рядовому пользователю, а в то же время многие из этих проблем можно достаточно успешно решать, используя методы исследования операций, в частности имитационное моделирование, теорию игр, регрессионный и трендовый анализ, реализуя эти алгоритмы в широко известном и распространённом пакете прикладных программ MS Excel.

В данной статье представлен один из возможных алгоритмов построения прогноза объёма реализации для продуктов с сезонным характером продаж. Сразу следует отметить, что перечень таких товаров гораздо шире, чем это кажется. Дело в том, что понятие “сезон” в прогнозировании применим к любым систематическим колебаниям, например, если речь идёт об изучении товарооборота в течение недели под термином “сезон” понимается один день. Кроме того, цикл колебаний может существенно отличаться (как в большую, так и в меньшую сторону) от величины один год. И если удаётся выявить величину цикла этих колебаний, то такой временной ряд можно использовать для прогнозирования с использованием аддитивных и мультипликативных моделей.

Аддитивную модель прогнозирования можно представить в виде формулы:

F = T + S + E

где: **F** – прогнозируемое значение; **T** – тренд; **S** – сезонная компонента; **E** – ошибка прогноза.

Применение мультипликативных моделей обусловлено тем, что в некоторых временных рядах значение сезонной компоненты представляет собой определенную долю трендового значения. Эти модели можно представить формулой:

F = T x S x E

На практике отличить аддитивную модель от мультипликативной можно по величине сезонной вариации. Аддитивной модели присуща практически постоянная сезонная вариация, тогда как у мультипликативной она возрастает или убывает, графически это выражается в изменении амплитуды колебания сезонного фактора, как это показано на рисунке 1.

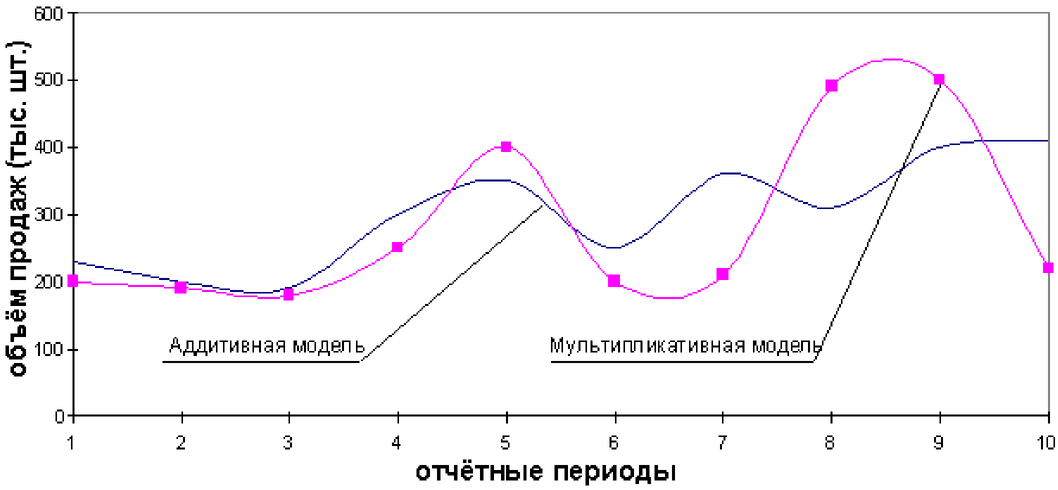


Рис. 1. Аддитивная и мультипликативные модели прогнозирования.

Алгоритм построения прогнозной модели

Для прогнозирования объема продаж, имеющего сезонный характер, предлагается следующий алгоритм построения прогнозной модели:

1.Определяется тренд, наилучшим образом аппроксимирующий фактические данные. Существенным моментом при этом является предложение использовать полиномиальный тренд, что позволяет сократить ошибку прогнозной модели.

2.Вычитая из фактических значений объёмов продаж значения тренда, **определяют величины сезонной компоненты** и корректируют таким образом, чтобы их сумма была равна нулю.

3.Рассчитываются ошибки модели как разности между фактическими значениями и значениями модели**.**

4.Строится модель прогнозирования:

$$F = T + S \pm E$$

где:

F– прогнозируемое значение;

T– тренд;

S – сезонная компонента;

E - ошибка модели.

5.На основе модели строится окончательный прогноз объёма продаж. Для этого предлагается использовать методы экспоненциального сглаживания, что позволяет учесть возможное будущее изменение экономических тенденций, на основе которых построена трендовая модель. Сущность данной поправки заключается в том, что она нивелирует недостаток адаптивных моделей, а именно, позволяет быстро учесть наметившиеся новые экономические тенденции.

$$F_{пр\ t} = a\, F_{ф\ t\text{-}1} + (1\text{-}a)\, F_{м\ t}$$

где:

$F_{пр\ t}$ - прогнозное значение объёма продаж;

$F_{ф\ t-1}$ – фактическое значение объёма продаж в предыдущем году;

$F_{м\ t}$ - значение модели;

a – константа сглаживания

Практическая реализация данного метода выявила следующие его особенности:

- для составления прогноза необходимо точно знать величину сезона. Исследования показывают, что множество продуктов имеют сезонный характер, величина сезона при этом может быть различной и колебаться от одной недели до десяти лет и более;
- применение полиномиального тренда вместо линейного позволяет значительно сократить ошибку модели;
- при наличии достаточного количества данных метод даёт хорошую аппроксимацию и может быть эффективно использован при прогнозировании объема продаж в инвестиционном проектировании.

Применение алгоритма рассмотрим на следующем примере.

Исходные данные: объёмы реализации продукции за два сезона. В качестве исходной информации для прогнозирования была использована информация об объёмах сбыта мороженого “Пломбир” одной из фирм в Нижнем Новгороде. Данная статистика характеризуется тем, что значения объёма продаж имеют выраженный сезонный характер с возрастающим трендом. Исходная информация представлена в табл. 1.

Таблица 1.
Фактические объёмы реализации продукции

№п.п.	Месяц	Объем продаж (руб.	№п.п.	Месяц	Объем продаж (руб.)
1	июль	8174,40	13	июль	8991,84
2	август	5078,33	14	август	5586,16
3	сентябрь	4507,20	15	сентябрь	4957,92
4	октябрь	2257,19	16	октябрь	2482,91
5	ноябрь	3400,69	17	ноябрь	3740,76
6	декабрь	2968,71	18	декабрь	3265,58
7	январь	2147,14	19	январь	2361,85
8	февраль	1325,56	20	февраль	1458,12
9	март	2290,95	21	март	2520,05
10	апрель	2953,34	22	апрель	3248,67
11	май	4216,28	23	май	4637,91
12	июнь	8227,569	24	июнь	9050,3264

Задача: составить прогноз продаж продукции на следующий год по месяцам.

Реализуем алгоритм построения прогнозной модели, описанный выше. Решение данной задачи рекомендуется осуществлять в среде MS Excel, что позволит существенно сократить количество расчётов и время построения модели.

1. Определяем тренд, наилучшим образом аппроксимирующий фактические данные. Для этого рекомендуется использовать полиномиальный тренд, что позволяет сократить ошибку прогнозной модели).

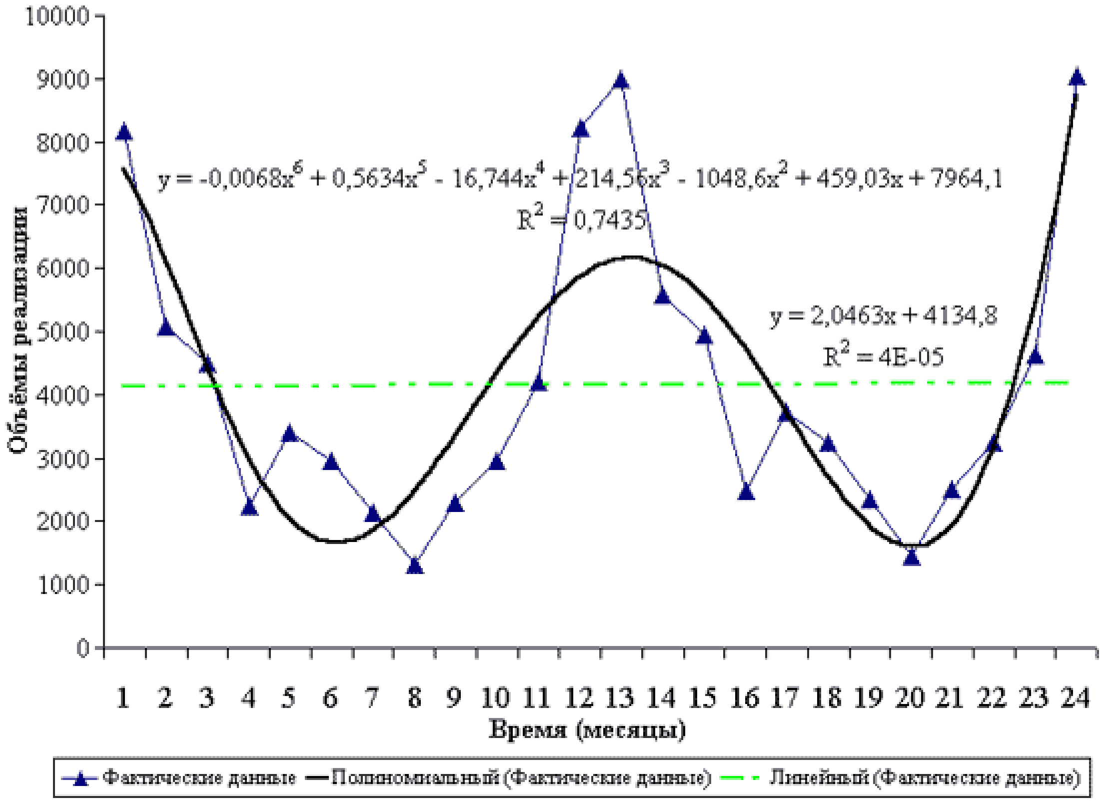


Рис. 2. Сравнительный анализ полиномиального и линейного тренда

На рисунке показано, что полиномиальный тренд аппроксимирует фактические данные гораздо лучше, чем предлагаемый обычно в литературе линейный. Коэффициент детерминации полиномиального тренда (0,7435) гораздо выше, чем линейного (4E-05). Для расчёта тренда рекомендуется использовать опцию “Линия тренда” ППП Excel.

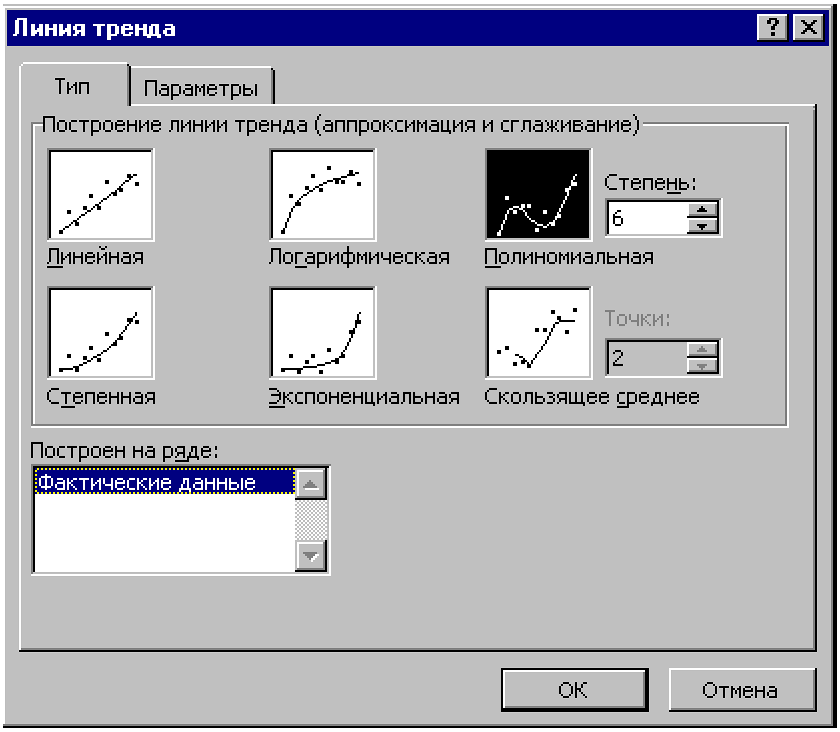
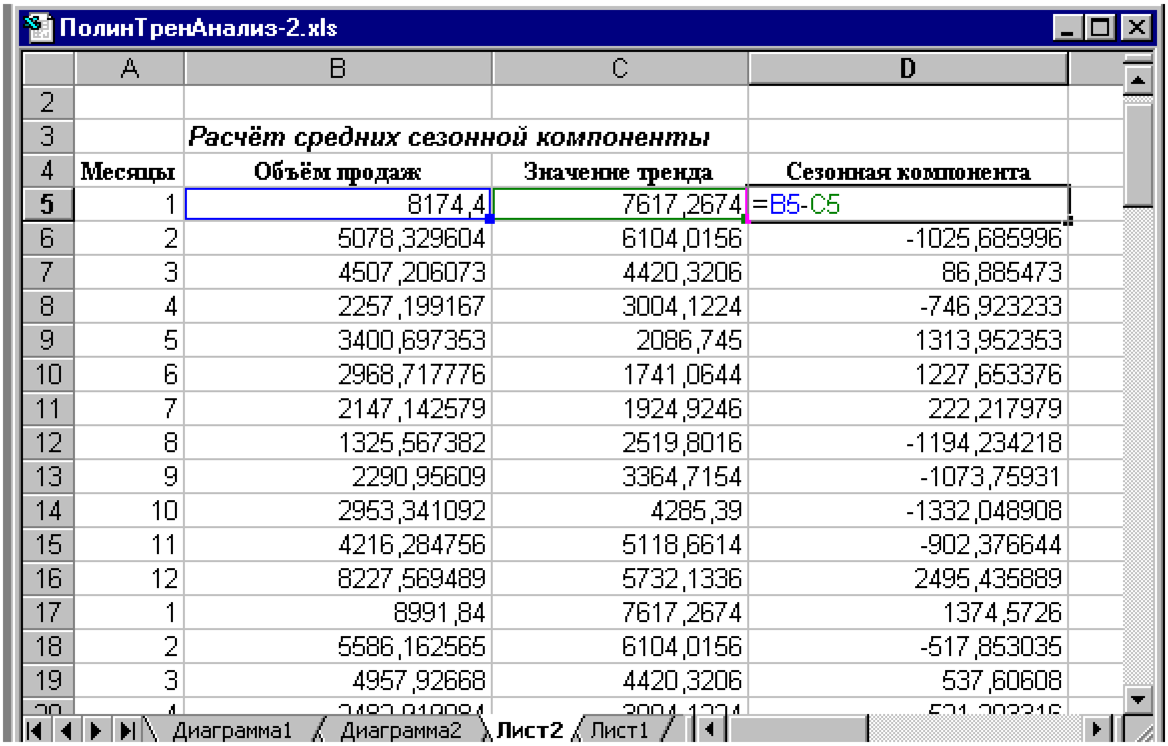


Рис. 3. Опция “Линии тренда”

Применение других типов тренда (логарифмический, степенной, экспоненциальный, скользящее среднее) также не даёт такого эффективного результата. Они неудовлетворительно аппроксимируют фактические значения, коэффициенты их детерминации ничтожно малы:

- логарифмический R^2 = 0,0166;
- степенной R^2 =0,0197;
- экспоненциальный R^2 =8E-05.

2. Вычитая из фактических значений объёмов продаж значения тренда**, определим величины сезонной компоненты**, используя при этом пакет прикладных программ MS Excel (рис. 4).



ПолинТренАнализ-2.xls

	A	B	C	D
2				
3		*Расчёт средних сезонной компоненты*		
4	**Месяцы**	**Объём продаж**	**Значение тренда**	**Сезонная компонента**
5	1	8174,4	7617,2674	=B5-C5
6	2	5078,329604	6104,0156	-1025,685996
7	3	4507,206073	4420,3206	86,885473
8	4	2257,199167	3004,1224	-746,923233
9	5	3400,697353	2086,745	1313,952353
10	6	2968,717776	1741,0644	1227,653376
11	7	2147,142579	1924,9246	222,217979
12	8	1325,567382	2519,8016	-1194,234218
13	9	2290,95609	3364,7154	-1073,75931
14	10	2953,341092	4285,39	-1332,048908
15	11	4216,284756	5118,6614	-902,376644
16	12	8227,569489	5732,1336	2495,435889
17	1	8991,84	7617,2674	1374,5726
18	2	5586,162565	6104,0156	-517,853035
19	3	4957,92668	4420,3206	537,60608

Диаграмма1 / Диаграмма2 / Лист2 / Лист1

Рис. 4. Расчёт значений сезонной компоненты в ППП MS Excel.

Таблица 2.

Расчёт значений сезонной компоненты

Месяцы	Объём продаж	Значение тренда	Сезонная компонента
1	8174,4	7617,2674	557,1326
2	5078,3296	6104,0156	-1025,686
3	4507,2061	4420,3206	86,885473
4	2257,1992	3004,1224	-746,92323
5	3400,6974	2086,745	1313,95235
6	2968,7178	1741,0644	1227,65338
7	2147,1426	1924,9246	222,217979
8	1325,5674	2519,8016	-1194,2342
9	2290,9561	3364,7154	-1073,7593
10	2953,3411	4285,39	-1332,0489
11	4216,2848	5118,6614	-902,37664
12	8227,5695	5732,1336	2495,43589
1	8991,84	7617,2674	1374,5726
2	5586,1626	6104,0156	-517,85304

3	4957,9267	4420,3206	537,60608
4	2482,9191	3004,1224	-521,20332
5	3740,7671	2086,745	1654,02209
6	3265,5896	1741,0644	1524,52515
7	2361,8568	1924,9246	436,932237
8	1458,1241	2519,8016	-1061,6775
9	2520,0517	3364,7154	-844,6637
10	3248,6752	4285,39	-1036,7148
11	4637,9132	5118,6614	-480,74817
12	9050,3264	5732,1336	3318,19284

Скорректируем значения сезонной компоненты таким образом, чтобы их сумма была равна нулю.

Месяцы	**1-й сезон**	**2-й сезон**	**Итого**	**Среднее**	**Сезонная компонента**
1	557,1326	1374,5726	1931,7052	965,8526	798,7176058
2	-1025,686	-517,853035	-1543,539	-771,7695155	-938,90451
3	86,885473	537,60608	624,491553	312,2457765	145,1107823
4	-746,92323	-521,203316	-1268,1265	-634,0632745	-801,198269
5	1313,9524	1654,022089	2967,97444	1483,987221	1316,852227
6	1227,6534	1524,525154	2752,17853	1376,089265	1208,954271
7	222,21798	436,932237	659,150216	329,575108	162,4401138
8	-1194,2342	-1061,677479	-2255,9117	-1127,955849	-1295,09084
9	-	-	-	-	-

	1073,7593	844,663701	1918,423	959,2115055	1126,3465
10	-1332,0489	-1036,714798	-2368,7637	-1184,381853	-1351,51685
11	-902,37664	-480,748169	-1383,1248	-691,5624065	-858,697401
12	2495,4359	3318,192838	5813,62873	2906,814363	2739,679369
			Сумма	**2005,61993**	**0**

Таблица 3.

Расчёт средних значений сезонной компоненты

3. Рассчитываем ошибки модели как разности между фактическими значениями и значениями модели.

Таблица 4.

Расчёт ошибок

Месяц	**Объём продаж**	**Значение модели**	**Отклонения**
1	8174,4	8415,985006	-241,585006
2	5078,3296	5165,11109	-86,7814863
3	4507,2061	4565,431382	-58,2253093
4	2257,1992	2202,924131	54,27503571
5	3400,6974	3403,597227	-2,89987379
6	2968,7178	2950,018671	18,69910521
7	2147,1426	2087,364714	59,77786521
8	1325,5674	1224,710757	100,8566247
9	2290,9561	2238,3689	52,58718971
10	2953,3411	2933,873153	19,46793921

11	4216,2848	4259,963999	-43,6792433
12	8227,5695	8471,812969	-244,24348
13	8991,84	8415,985006	575,8549942
14	5586,1626	5165,11109	421,0514747
15	4957,9267	4565,431382	392,4952977
16	2482,9191	2202,924131	279,9949527
17	3740,7671	3403,597227	337,1698622
18	3265,5896	2950,018671	315,5708832
19	2361,8568	2087,364714	274,4921232
20	1458,1241	1224,710757	233,4133637
21	2520,0517	2238,3689	281,6827987
22	3248,6752	2933,873153	314,8020492
23	4637,9132	4259,963999	377,9492317
24	9050,3264	8471,812969	578,5134687

Находим среднеквадратическую ошибку модели (E) по формуле:

$E = \Sigma O^2 : \Sigma (T+S)^2$

где:

T- трендовое значение объёма продаж;

S – сезонная компонента;

O- отклонения модели от фактических значений

E= 0,003739 или 0.37 %

Величина полученной ошибки позволяет говорить, что построенная модель хорошо аппроксимирует фактические данные, т.е. она вполне отражает экономические тенденции, определяющие объём продаж, и является предпосылкой для построения прогнозов высокого качества.

Построим модель прогнозирования:

$F = T + S \pm E$

Построенная модель представлена графически на рис. 5.

5. На основе модели строим окончательный прогноз объёма продаж. Для смягчения влияния прошлых тенденций на достоверность прогнозной модели, предлагается сочетать трендовый анализ с экспоненциальным сглаживанием. Это позволит нивелировать недостаток адаптивных моделей, т.е. учесть наметившиеся новые экономические тенденции:

$F_{пр\, t} = a\, F_{ф\, t-1} + (1-a)\, F_{м\, t}$

где:

$F_{пр\ t}$ - прогнозное значение объёма продаж;
$F_{ф\ t-1}$ – фактическое значение объёма продаж в предыдущем году;
$F_{м\ t}$ - значение модели;
a – константа сглаживания.

Константу сглаживания рекомендуется определять методом экспертных оценок, как вероятность сохранения существующей рыночной конъюнктуры, т.е. если основные характеристики изменяются / колеблются с той же скоростью / амплитудой что и прежде, значит предпосылок к изменению рыночной конъюнктуры нет.

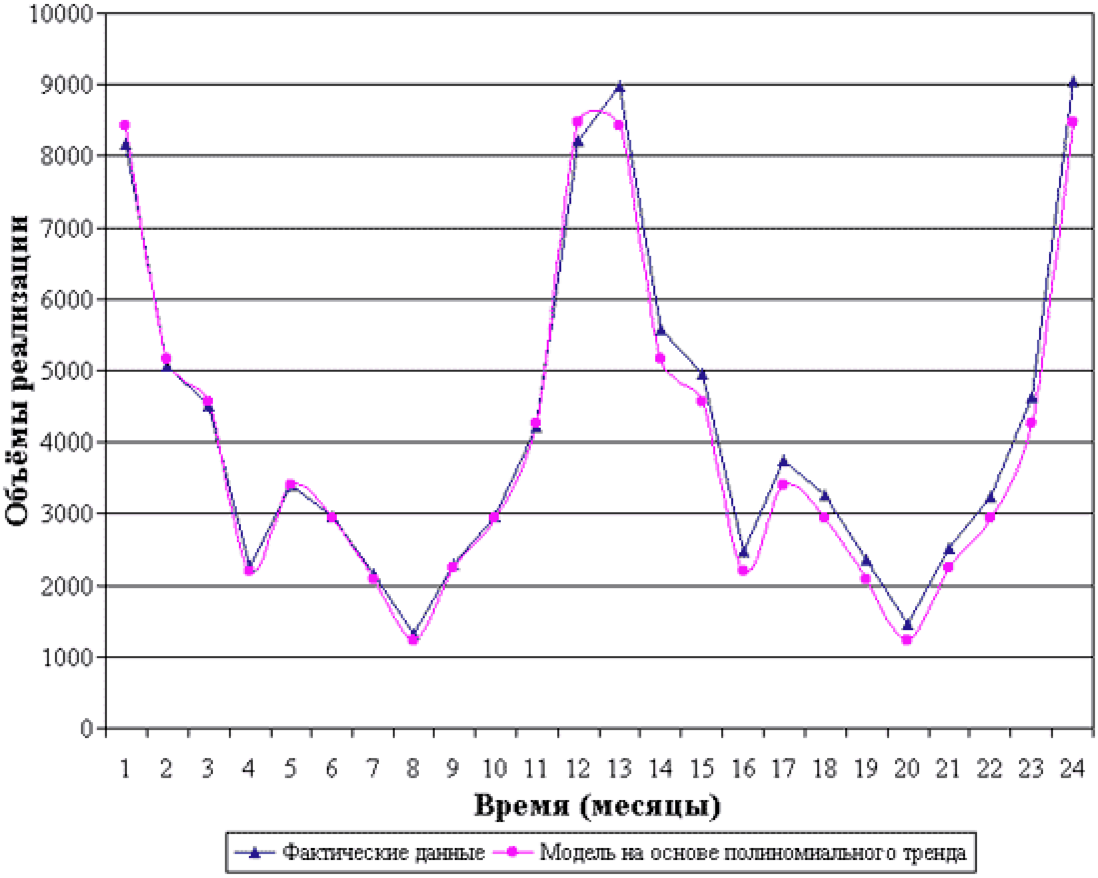


Рис. 5. Модель прогноза объёма продаж

Таким образом, прогноз на январь третьего сезона определяется следующим образом.

Определяем прогнозное значение модели:

$F_{м\,t}$ = 1 924,92 + 162,44 =2087 ± 7,8 (руб.)

Фактическое значение объёма продаж в предыдущем году **($F_{ф\ t-1}$)** составило 2 361руб. Принимаем коэффициент сглаживания 0.8. Получим прогнозное значение объёма продаж:

$F_{пр\,t}$ = 0,8*2 361 + (1-0.8) *2087 = 2306,2 (руб.)

Для учёта новых экономических тенденций рекомендуется регулярно уточнять модель на основе мониторинга фактически полученных объёмов продаж, добавляя их или заменяя ими данные статистической базы, на основе которой строится модель.

Кроме того, для повышения надёжности прогноза рекомендуется строить все возможные сценарии прогноза и рассчитывать доверительный интервал прогноза.

Задание. Определить объем продаж мороженного на июнь третьего сезона.

Литература

1. Замков О.О., Толстонятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. М. ДНСС. 1997г.
2. Лук'яненко І. Г., Краснікова Л. І. Економетрика: Підручник. – К.: Т-во"Знання", КОО, 1998. – 494 с.
3. Конюховский П. Математические методы исследования в экономике. – СПб.: Питер, 2000. – 208 с.
4. Монахов А. Математические методы анализа экономики. – СПб.: Питер, 2002. – 176 с.
5. Экономико-математические методы и прикладные модели: Уч. Пособие для вузов / В. В. Федосеев, А. Н. Гармаш, Д. М. Дайитбегов и др. – М.: ЮНИТИ, 1999. – 391 с.
6. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах.-М.: Высшая школа,1986.
7. Басов А.С. Линейное программирование в технико-экономических задачах. – М.: Наука, 1974.
8. Вентцель Е.С. Введение в иследование операцій. – М.: Радио, 1984.
9. Гасс С. Линейное программирование. – М.: Физматгиз, 1971.
10. Гершгорн А.С. Математическое программирование и его применение в экономических рас четах. – М.: Экономика,1978.
11. Дегтярёв Ю.И. Исследование операцій. – М.: Высшая школа, 1988.
12. Зайченко Ю.П. Исследование операцій. – Л.: Высшая школа, 1988.
13. Карасёв А.И. и др.. Курс высшей математики для экономических вузов, ч. II. – М: Высшая школа,1983.
14. Карманов В.Г. Математическое программирование. – М.: Наука,1980.
15. Ляшенко И.Н. Линейное и нелинейное программирование. – К.: Высшая школа,1975.
16. Щедрин Н.И., Кархов А.И. Математические методы программирования в экономике. – М.: Статистика, 1974.