

Министерство транспорта Российской Федерации
РОСМОРФЛОТ
ГОСУДАРСТВЕННАЯ МОРСКАЯ АКАДЕМИЯ
имени адмирала С.О. Макарова

КАФЕДРА СУДОВОЖДЕНИЯ

В.В. Афанасьев, В.А.Логиновский

**Расчет координат
места судна по избыточным
навигационным измерениям**

**Учебное пособие по Математическим
основам судовождения**

**Санкт-Петербург
2002**

Учебное пособие разработано на кафедре Судовождения ГМА имени адмирала С.О. Макарова к.т.н., профессором В.В. Афанасьевым и д.т.н., профессором В.А. Логиновским и предназначено для изучения материала по навигационным функциям и линейных методов обработки навигационной информации при подготовке курсовой работы по дисциплине Математические основы судовождения.

Учебное пособие рассмотрено и утверждено к изданию на заседании **кафедры Судовождения**, протокол N 9. от 30 апреля 2002 года.

СОДЕРЖАНИЕ

	Введение	4
1	Теоретические основы определения места судна	6
1.1	Общие сведения	6
1.2	Навигационная функция расстояния до ориентира на плоскости	8
1.3	Навигационная функция пеленга на плоскости	9
1.4	Навигационная функция горизонтального угла	10
1.5	Навигационная функция вертикального угла	11
1.6	Навигационная функция расстояния на сфере	13
1.7	Навигационная функция разности расстояний на плоскости и сфере	14
1.8	Навигационная функция прямого и обратного пеленга на сфере	15
1.9	Навигационная функция высоты светила	16
1.10	Прямой аналитический расчет координат места судна	18
2	Линейные методы расчета координат места судна	20
2.1	Линеаризация навигационных функций	20
2.2	Аналитический расчет координат места судна по двум линиям положения	21
2.3	Расчет координат при избыточном числе измерений навигационных параметров	22
2.3.1	Равноточные измерения	22
2.3.2	Неравноточные измерения	24
2.4	Априорная оценка точности рассчитанных координат	25
2.5	Апостериорная оценка точности рассчитанных координат	29
2.6	Графоаналитический расчет	32

Введение

МОС

Курсовая работа «Расчет координат места судна по избыточным навигационным измерениям» выполняется по дисциплине Математические Основы Судовождения (МОС) и имеет целью изучение основ теории навигационных функций и линейных методов обработки навигационной информации, включая классический вариант Метода Наименьших Квадратов (МНК) с применением современного матричного исчисления.

Работа выполняется на листах бумаги формата А4 и включает теоретическую и практическую части.

СОДЕРЖАНИЕ курсовой работы:

1. Теоретическая часть.

- 1.1 Навигационные функции, навигационные параметры и изолинии.
- 1.2 Прямые аналитические методы расчета координат места судна.
- 1.3 Линеаризация навигационных функций.
- 1.4 Расчет координат места судна обобщенным методом линий положения.
- 1.5 Метод наименьших квадратов в задачах обработки навигационной информации.
- 1.6 Априорная и апостериорная оценка точности обсервации.
- 1.7 Графоаналитический вариант расчета координат.

2. Расчетная часть.

- 2.1 Исходные данные к работе.
- 2.2 Схема, изображающая навигационные ориентиры и счислимое место судна (в масштабе на листе миллиметровой бумаги формата А4).
- 2.3 Расчет координат места судна и систематической погрешности измерений Методом наименьших квадратов, (две итерации).
- 2.4 Априорная оценка точности обсервации.
- 2.5 Апостериорная оценка точности обсервации.
- 2.6 Схема, изображающая априорный и апостериорный эллипсы погрешностей обсервации для второй итерации (в масштабе на листе миллиметровой бумаги формата А4).
- 2.7 Расчет координат графоаналитическим способом (в масштабе на листе миллиметровой бумаги формата А4).

Рекомендуемый список литературы:

1. Баранов Ю.К., Гаврюк М.И., Логиновский В.А., Песков Ю.А. Навигация. Учебник для вузов. СПб, Лань, 1997 г., 512 с.
2. Кожухов В.П., Жухлин А.М., Кондраштин В.Т., Логиновский В.А., Лукин А.Н. Математические основы судовождения. М., Транспорт, 1993 г., 200с.
3. Груздев Н.М. Оценка точности морского судовождения, М., Транспорт, 1989, 192 с.
4. Ривкин С.С. и др. Статистическая оптимизация навигационных систем, Л., Судостроение, 1976, 280 с.
5. Соболев В.И. Информационно - статистическая теория измерений, М., Машиностроение, 1983, 224 с.
6. Стренг Г. Линейная алгебра и ее приложения, М., Мир, 1980, 454 с.

7. Лоусон И., Хенсон Р. Численное решение задач методом наименьших квадратов, М., Наука, 1986, 232 с.
8. Белявский Л.С. и др. Обработка и отображение радионавигационной информации, М., Радио и Связь, 1990, 232 с.
9. Вульфович Б.А. Методы расчета основных элементов навигационных изолиний, М., Пищевая промышленность, 1979.
10. Каврайский В.В. Избранные труды, т.1, 2, Л., УГС ВМФ, 1953.
11. Кондрашихин В.Т. Определение места судна, М., Транспорт, 1989, 229 с.
12. Кондрашихин В.Т. Теория ошибок, М., Транспорт, 1969.
13. Попеко Г.П., Соломатин Е.П. Навигация. Курс кораблевождения, т.1, Л., УГС ВМФ, 1961.
14. Красавцев Б.И. Мореходная астрономия, М., Транспорт, 1986,
15. Статьи в журналах “Записки по гидрографии”, сборник “Судовождение”, ГМА им. адм.С.О.Макарова; “Навигация и гидрография”, “Navigation (США, Великобритания, Франция, Германия).

Образец титульного листа:

Министерство Транспорта Российской Федерации Государственная Служба РОСМОРФЛОТ ГМА им. адмирала С.О. Макарова Кафедра Судовождения
Курсовая работа на тему РАСЧЕТ КООРДИНАТ МЕСТА СУДНА ПО ИЗБЫТОЧНЫМ НАВИГАЦИОННЫМ ИЗМЕРЕНИЯМ
Работу выполнил _____ Иванов И.И. (С-111) подпись
Работу проверил _____ проф. Петров П.П. подпись
Санкт-Петербург 2003

В конце курсовой работы необходимо вставить 2 чистых листа формата А4, которые будут использоваться при защите.

Вычисления в курсовой работе производятся с полной разрядной сеткой калькулятора, если же для расчета применялся компьютер, то при защите работы курсант должен показать умение применять использованное программное обеспечение.

Теоретические основы определения места судна

1

Из этой главы вы узнаете, что такое навигационный параметр, навигационная функция, навигационная изолиния, и как они используются для определения координат места судна, а также познакомитесь с важной характеристикой навигационной функции - ее градиентом.

1.1 Общие сведения

Счисление пути судна с помощью автономных средств навигации (лаг, гирокомпас), кроме важного преимущества, которое заключается непосредственно в автономности определения *счислимых координат*, обладает и существенными недостатками. Эти недостатки характеризуются погрешностями курсоуказателей (компасов) и относительных измерителей скорости (лагов). На показания лагов влияют гидрометеорологические факторы (ветер, волнение, течение, качка). Погрешности счисления растут во времени, снижая точность счислимых координат. Для их компенсации применяют внешние измерения, на точность которых указанные факторы влияния не оказывают. С помощью таких измерений можно получить координаты места судна, которые называются *обсервованными*, а сама процедура получения координат называется *обсервацией*. Таким образом координаты места судна могут быть *счислимыми* и *обсервованными*. В большинстве случаев обсервованные координаты точнее счислимых, хотя бывает и наоборот.

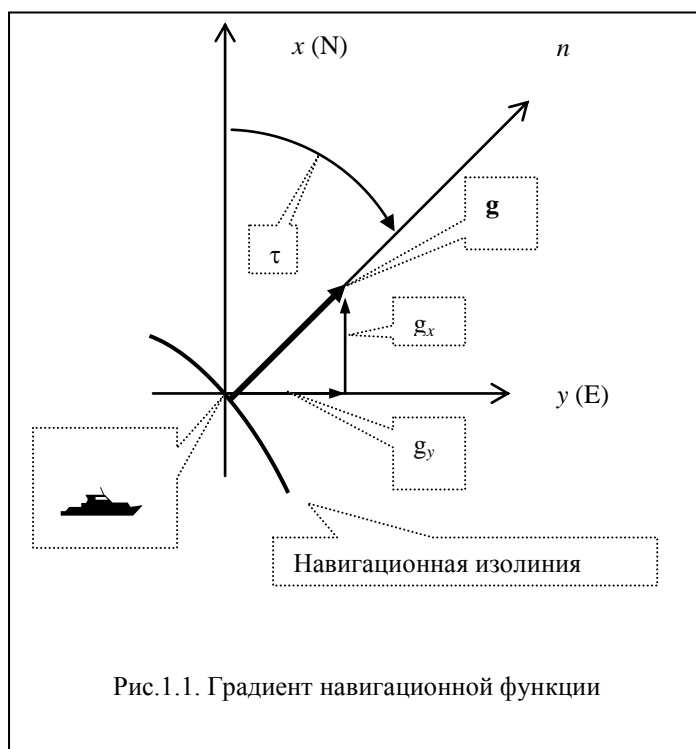
Для определения обсервованных координат с помощью различных навигационных средств измеряются *навигационные параметры (НП)*.

НП - это линейные или угловые величины, функционально зависящие от координат места судна и координат навигационных ориентиров.

Именно эта функциональная математическая зависимость и позволяет решить задачу определения места судна (ОМС). Навигационные ориентиры являются обычно точечными.

Наиболее распространенные навигационные параметры:

- Дистанция до ориентира (D)
- Пеленг на ориентир (Π). Здесь под пеленгом понимается истинный пеленг ($ИП$), но для упрощения записей в сокращении будем использовать букву Π .
- Горизонтальный угол между двумя ориентирами (α)
- Вертикальный угол ориентира (β)
- Разность расстояний до двух ориентиров (ΔD)
- Высота светила (h)



Множество НП образует скалярное поле этих параметров на поверхности Земли, и так как координаты навигационных ориентиров известны, то множество значений НП определяют *навигационную функцию* (НФ), т.е. зависимость НП от координат места судна.

НФ- это математическая зависимость НП от координат

В литературе по морской навигации НП обозначается буквой U , и тогда выражение для навигационной функции в общем виде может быть записано так:

$$U=f(\varphi, \lambda), \quad (1.1)$$

Или в локальной системе координат:

$$U=f(x, y). \quad (1.2)$$

Если же зафиксировать навигационный параметр $U=U_0=const$, то получим уравнение *навигационной изолинии* (НИ) :

$$U_0=f(\varphi, \lambda)=const \quad (1.3)$$

НИ- это геометрическое место точек равных значений навигационных параметров

Важнейшей характеристикой навигационной функции является ее *вектор-градиент* \mathbf{g} , который характеризует максимальную скорость изменения навигационной функции, или что одно и то же, скорость изменения навигационного параметра, в конкретной точке. НП меняется быстрее всего в направлении n , которое перпендикулярно касательной к навигационной изолинии в точке C . Другими словами, говорят, что градиент направлен по нормали n к НИ. Направление градиента \mathbf{g} условно принимается в сторону увеличения навигационного параметра.

Градиент навигационной функции - это вектор максимальной скорости изменения НФ в конкретной точке поля навигационных параметров, который направлен по нормали к навигационной изолинии в сторону увеличения НП.

Для вычисления этой скорости, т.е. модуля вектора градиента, необходимо вычислить производную от НФ по нормали n :

$$g = \frac{dU}{dn} \quad (1.4)$$

Запишем формулы для расчета \mathbf{g} (здесь \mathbf{g} – обозначение вектора, а g – его модуля).

В локальной прямоугольной системе координат \mathbf{g} может быть представлен в виде двухкомпонентного вектора следующим образом:

$$\mathbf{g} = \begin{pmatrix} \frac{\partial U}{\partial x} \\ \frac{\partial U}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

и тогда его модуль рассчитается по теореме Пифагора :

$$g = \sqrt{\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{g_x^2 + g_y^2} \quad (1.6)$$

здесь g_x , g_y - проекции вектора \mathbf{g} на координатные оси, а его направление определится так:

$$\tau = \arctg\left(\frac{g_y}{g_x}\right) \quad (1.7)$$

На рисунке 1.1 представлена иллюстрация формул (1.3)-(1.7):

1.2 Навигационная функция расстояния до ориентира на плоскости

Рассмотрим измерения навигационного параметра D , которым является расстояние до навигационного ориентира A . Это расстояние определяется дальномерными навигационными приборами. Одним из таких очень приборов является *радиолокационная станция* (РЛС).

С учетом практической точности решения навигационных задач на земной сфере (см. главу Сферическая тригонометрия), плоскость в качестве локальной модели земной поверхности можно использовать на расстояниях до 120-180 (?) миль от ориентира.

На рисунке 1.2 представлена навигационная функция расстояния $D(x,y)$ в виде поля навигационных изолиний, которые представляют на плоскости концентрические окружности с радиусом D и с центром в точке расположения навигационного ориентира A . Эти окружности в морской навигации называются *изостади*.

Аналитическое выражение для навигационной функции на плоскости с началом координат в точке A запишем в традиционном виде так, см. рис 1.3:

$$D = \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} \quad (1.8)$$

а для вычисления модуля и направления градиента расстояния \mathbf{g}_D в счислимой точке C воспользуемся формулами (1.1.5)-(1.1.7):

$$\begin{aligned} \frac{\partial D}{\partial x} &= [(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2]^{0,5} (x - x_A) = \cos \Pi \\ \frac{\partial D}{\partial y} &= [(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2]^{0,5} (y - y_A) = \sin \Pi \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$g_D = \sqrt{(\cos \Pi)^2 + (\sin \Pi)^2} = 1$$

$$\tau_D = \arctg \left(\frac{y - y_A}{x - x_A} \right) = \Pi \pm 180^\circ$$

Результаты вычислений по формулам (1.9) очевидны, что подтверждает их справедливость. Вычислительная модель адекватна реальной ситуации. Выражение в квадратных скобках – не что иное, как счислимое расстояние D_C от счислимой точки C до ориентира A . Модуль градиента расстояния безразмерен и он направлен по линии пеленга Π в сторону увеличения дистанции D . Знак «+» при определении τ_D принимается, если $\Pi < 180^\circ$; а знак «-», если $\Pi > 180^\circ$.

Иллюстрация векторного поля градиентов навигационной функции $D(x,y)$ представлена на рис. 1.4, из которого так же видно, что перемещение по линии пеленга от ориентира, т.е. по нормали n к изостадии на величину Δn равно такому же изменению расстояния ΔD до ориентира.

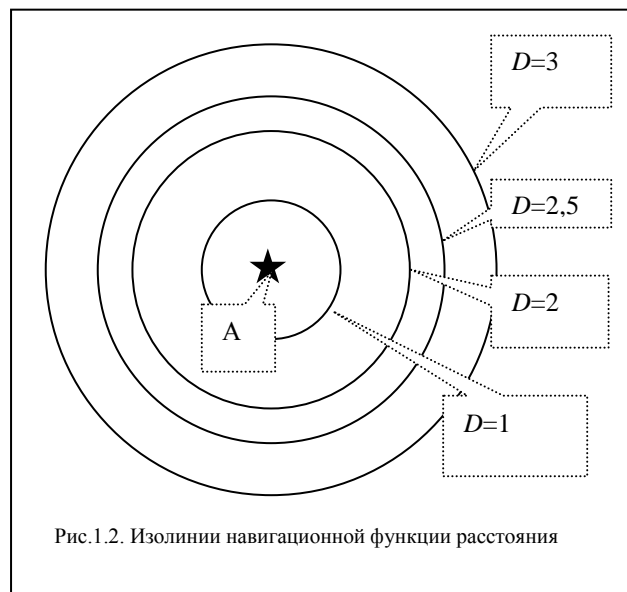


Рис.1.2. Изолинии навигационной функции расстояния

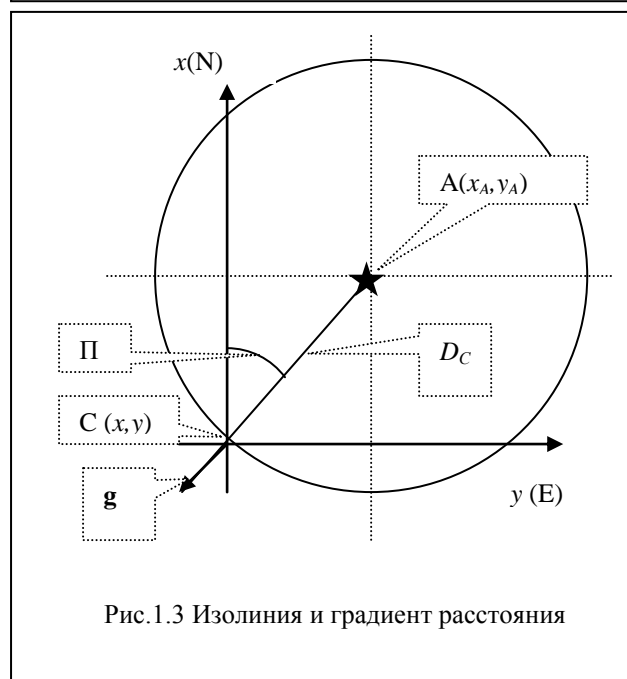


Рис.1.3 Изолиния и градиент расстояния

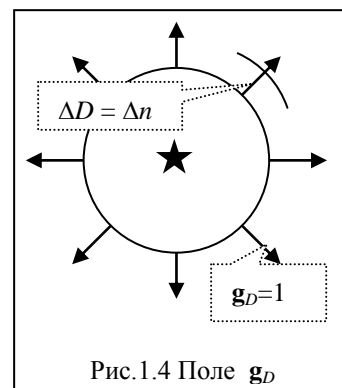


Рис.1.4 Поле \mathbf{g}_D

1.3 Навигационная функция пеленга на плоскости

Рассмотрим широко применяемую в навигации навигационную функцию пеленга на плоскости. Пределы использования локальной плоскости для моделирования земной поверхности описаны в учебнике [2]. В качестве приборов, измеряющих пеленг используются компасы и РЛС, в которую так же встроен *репитор* гидрокомпас.

На рисунке 1.5 представлена графически функция пеленга в виде множества навигационных изолиний – линий пеленгов на навигационный ориентир А. При движении по такой изолинии пеленг на навигационный ориентир остается всегда постоянным.

Для вывода формулы градиента рассмотрим рисунок 1.6 и напишем выражение для тангенса пеленга, а затем и для навигационной функции:

$$\operatorname{tg} \Pi = \frac{y_A - y}{x_A - x} \quad (1.10)$$

$$\Pi = \operatorname{arctg} \frac{y_A - y}{x_A - x}$$

Для вычисления модуля и направления градиента расстояния g_{Π} в числимой точке С воспользуемся опять формулами (1.1.5)-(1.1.7).

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial x} &= \left[(x_A - x)^2 + (y_A - y)^2 \right]^{-1} (y_A - y) \\ \frac{\partial \Pi}{\partial y} &= \left[(x_A - x)^2 + (y_A - y)^2 \right]^{-1} (x - x_A) \\ g_{\Pi} &= \sqrt{\left[\frac{(x_A - x)^2 + (y_A - y)^2}{\left[(x_A - x)^2 + (y_A - y)^2 \right]^2} \right]} = \frac{1}{D} \quad (1.11) \\ \tau_{\Pi} &= \operatorname{arctg} \left(-\frac{x_A - x}{y_A - y} \right) = \Pi - 90^\circ \end{aligned}$$

После вычислений по формулам мы видим, что модуль градиента пеленга является величиной, обратной расстоянию до пеленгуемого ориентира, или иначе, чем дальше находится ориентир тем медленнее меняется пеленг на него. Это свойство является важным и влияет на точность определения места.

Направление градиента для прямого пеленга выбирается перпендикулярно линии пеленга, т.е. по нормали в сторону увеличения пеленга- нетрудно увидеть, что если судно будет перемещаться по направлению τ относительно меридиана, то пеленг на ориентир А будет увеличиваться.

Если D выражено в милях, то единицы модуля градиента (1.11) - «радиан на милю» (1/миля). Если же пеленг выражен в градусах или других единицах, то соответствующую размерность имеет и градиент, например по формуле (1.12) расчет модуля производится в единицах « $^\circ$ / миля».

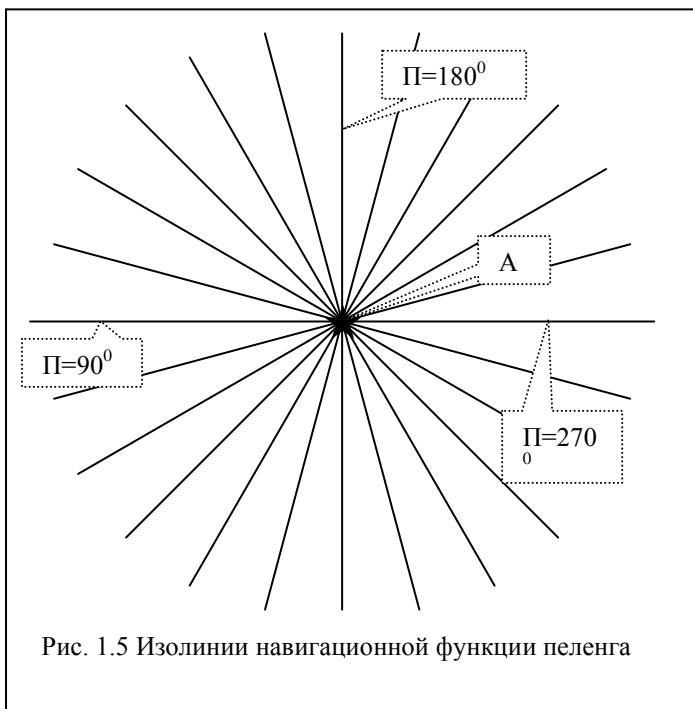


Рис. 1.5 Изолинии навигационной функции пеленга

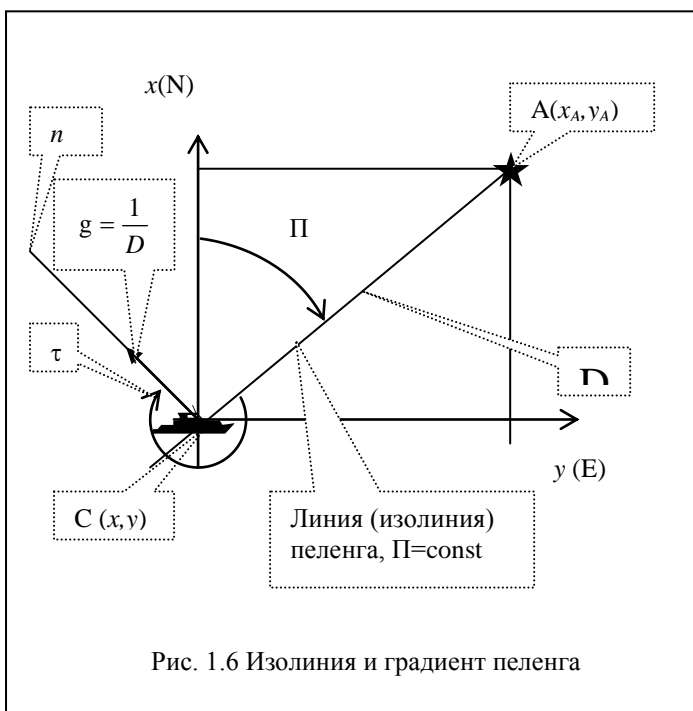


Рис. 1.6 Изолиния и градиент пеленга

$$g = \frac{d\Pi}{dn} = \frac{57,3^0}{D} \quad (1.12)$$

Если же для решения навигационной задачи используется обратный пеленг, т.е. с ориентира на судно, то естественно, что направление его измениться по сравнению с прямым пеленгом на 180^0 , т.е. для обратного пеленга:

$$\tau_{\Pi} = \Pi + 90, \quad (1.13)$$

а модуль вектора может быть рассчитан по тем же, приведенным выше формулам.

Примерная иллюстрация поля градиентов пеленга представлена на рисунке 1.7.

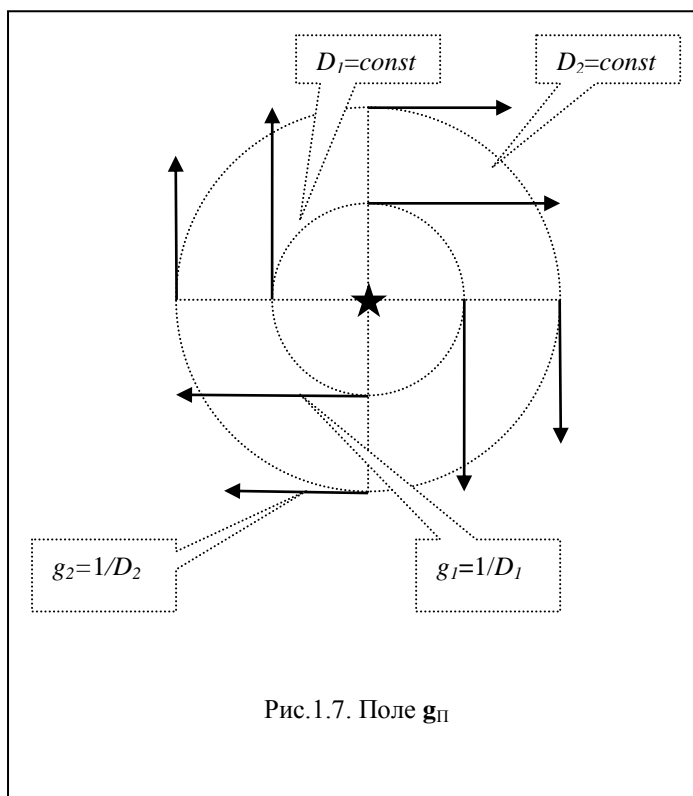


Рис. 1.7. Поле g_{Π}

1.4 Навигационная функция горизонтального угла

Одним из самых точных методов классической навигации является метод определения места по горизонтальным углам. Измерения в этом методе проводятся с помощью секстана или пеленгатора компаса и навигационная функция определяется навигационным параметром α – горизонтальным углом между двумя навигационными ориентирами А и В, рис. 1.8.

Расстояние между ориентирами d – называется *базой*.

Навигационной изолинией, вмещающей измеренный угол является окружность с центром в точке О, которая в навигации называется *изогоной*. При решении задачи ОМС на плоскости – это плоская изогона.

Уравнение семейства окружностей, вмещающей горизонтальные углы α , т.е. уравнение НФ в неявном виде запишется так:

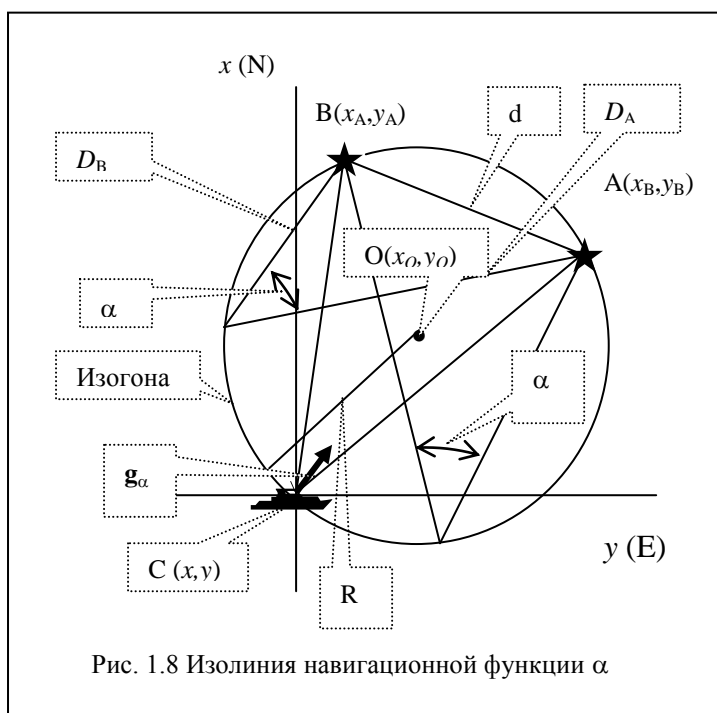


Рис. 1.8 Изолиния навигационной функции α

$$R = \frac{d}{2 \sin \alpha} = \sqrt{(x_O - x)^2 + (y_O - y)^2} \quad (1.14)$$

Преобразуем (1.14) относительно навигационного параметра α и получим выражение НФ в явном виде:

$$\alpha = \arcsin \left[\frac{d}{2\sqrt{(x_O - x)^2 + (y_O - y)^2}} \right] \quad (1.15)$$

Для дальнейших выводов можно воспользоваться формулами (1.1.5)-(1.1.7), но покажем несколько иной подход вывода формул градиента.

Угол α можно получить, как разность двух пеленгов на ориентиры А и В:

$$\alpha = \Pi_A - \Pi_B, \quad (1.16)$$

и тогда справедливо векторное равенство:

$$\mathbf{g}_\alpha = \mathbf{g}_{\Pi_A} - \mathbf{g}_{\Pi_B}, \quad (1.17)$$

или в векторно-матричных обозначениях:

$$\mathbf{g}_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{\partial \alpha}{\partial x} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Pi_A}{\partial x} \\ \frac{\partial \Pi_A}{\partial y} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \frac{\partial \Pi_B}{\partial x} \\ \frac{\partial \Pi_B}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Pi_A}{\partial x} - \frac{\partial \Pi_B}{\partial x} \\ \frac{\partial \Pi_A}{\partial y} - \frac{\partial \Pi_B}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (1.18)$$

Подставляя в (1.18) выражения из (1.11) для частных производных пеленга и применяя к треугольнику ABC на рис.1.7 теорему косинусов для плоского треугольника, получим следующие выражения для горизонтального угла:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial x} &= \frac{y_A - y}{D_A^2} - \frac{y_B - y}{D_B^2} = \frac{\cos \Pi_A}{D_A} - \frac{\cos \Pi_B}{D_B} = \frac{D_B \cos \Pi_A - D_A \cos \Pi_B}{D_A D_B}, \\ \frac{\partial \alpha}{\partial y} &= \frac{x_B - x}{D_B^2} - \frac{x_A - x}{D_A^2} = \frac{\sin \Pi_B}{D_B} - \frac{\sin \Pi_A}{D_A} = \frac{D_A \sin \Pi_B - D_B \sin \Pi_A}{D_A D_B}, \\ g &= \sqrt{\frac{D_B^2 \cos^2 \Pi_A + D_A^2 \cos^2 \Pi_B + D_B^2 \sin^2 \Pi_A + D_A^2 \sin^2 \Pi_B - 2D_A D_B (\cos \Pi_A \cos \Pi_B + \sin \Pi_A \sin \Pi_B)}{D_A^2 D_B^2}} = (1.19) \\ &= \sqrt{\frac{D_A^2 + D_B^2 - 2D_A D_B \cos(\Pi_A - \Pi_B)}{D_A^2 D_B^2}} = \sqrt{\frac{D_A^2 + D_B^2 - 2D_A D_B \cos \alpha}{D_A^2 D_B^2}} = \sqrt{\frac{d^2}{D_A^2 D_B^2}} = \frac{d}{D_A D_B}, \\ \tau &= \arctg \left(\frac{D_A \sin \Pi_B - D_B \sin \Pi_A}{D_B \cos \Pi_A - D_A \cos \Pi_B} \right) \end{aligned}$$

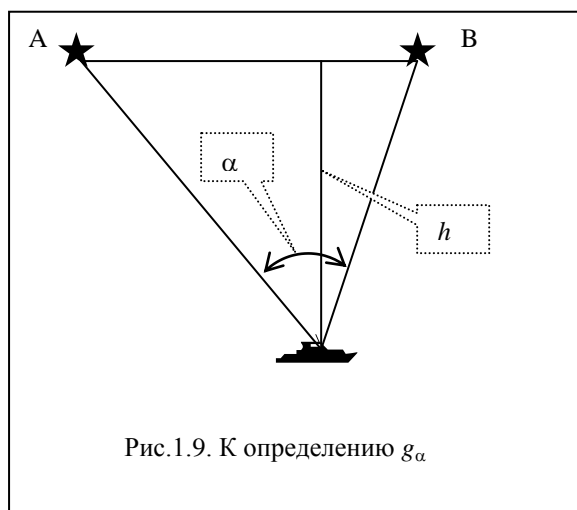
Еще одна формула для градиента g_α , применяемая в навигации для анализа геометрических и точностных характеристик имеет следующий вид, см. рисунок 1.9:

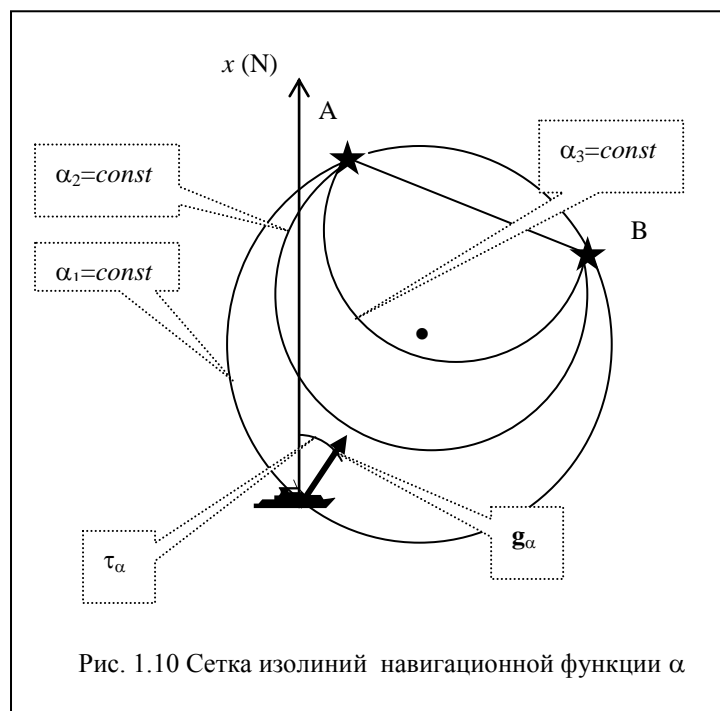
$$g = \frac{\sin \alpha}{h} \quad (1.20)$$

Градиент направлен к центру изогоны по направлению τ .

Как видно из рис.1.10, где представлены изолинии навигационной функции горизонтального угла, при приближении к ориентирам скорость изменения функции увеличивается (изолинии становятся гуще), т.е. модуль градиента растет.

Примечательно, что если ориентир находится вблизи северного географического полюса то пеленг Π может считаться горизонтальным углом α между полюсом и навигационным ориентиром, и он измеряется с помощью пеленгатора компаса.





1.5 Навигационная функция вертикального угла

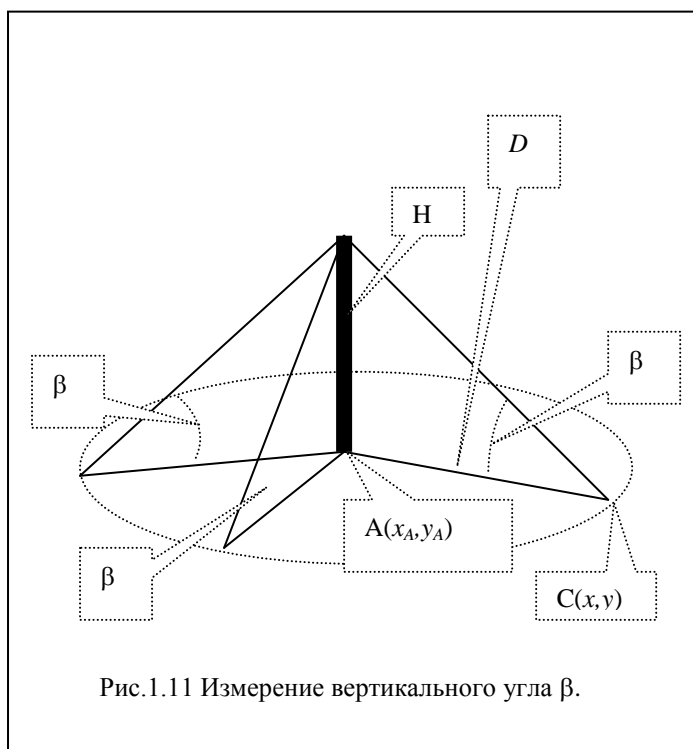
Если высота навигационного ориентира известна, то измерив с помощью секстана его вертикальный угол β , можно рассчитать расстояние до ориентира. В данном случае навигационным параметром является угол β , навигационная изолиния-окружность, а навигационная функция может быть записана так, см. рис. 1.11 :

$$\beta = \text{arcctg}\left(\frac{D}{h}\right) \quad (1.21)$$

Угол β пересчитывается в другой навигационный параметр, это расстояние до ориентира D :

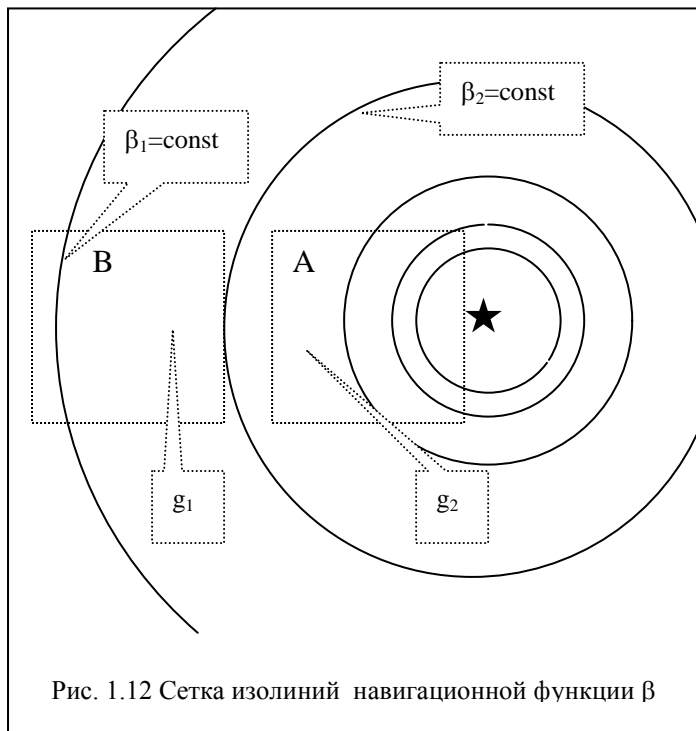
$$D = h \text{ctg} \beta \quad (1.22)$$

Для получения формул градиента функции (1.21) воспользуемся применявшимися ранее формулами:



$$\begin{aligned}\frac{\partial \beta}{\partial x} &= \frac{1}{1 + \frac{D^2}{H^2}} = \frac{x_A - x}{\sqrt{(x_A - x)^2 + (y_A - y)^2}} = \frac{H(x_A - x)}{(H^2 + D^2)D} \\ \frac{\partial \beta}{\partial y} &= \frac{H(y_A - y)}{(H^2 + D^2)D} \\ g &= \sqrt{\frac{H^2[(x_A - x)^2 + (y_A - y)^2]}{(H^2 + D^2)^2 D^2}} = \frac{H}{H^2 + D^2} \\ \tau &= \arctg\left(\frac{y_A - y}{x_A - x}\right) = \Pi_A\end{aligned}$$

Анализ формул (1.23) позволяет сделать вывод, что модуль вектора градиента вертикального угла увеличивается при приближении к навигационному ориентиру, а его направление совпадает с пеленгом на ориентир. На рисунке 1.12 представлена навигационная функция β в виде сетки изолиний, проведенных через равные промежутки $\Delta\beta$. Как видим «густота» сетки увеличивается с приближением к ориентиру, увеличивается скорость изменения навигационного параметра, т.е. модуль градиента функции. В районе А градиент больше, чем в районе В. Кстати, все навигационные функции обладают таким свойством, за исключением тех, у которых модуль градиента равен единице.

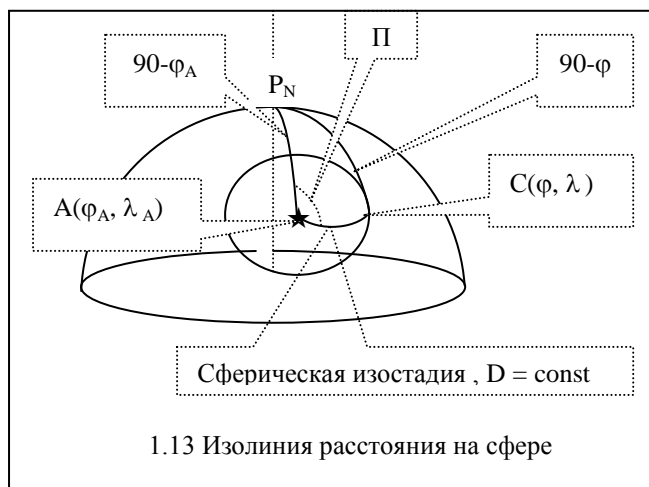


1.6 Навигационная функция расстояния на сфере.

При измерении больших расстояний навигационная функция должна быть представлена на сфере. Это можно сделать, обратившись к рисунку 1.13. Тогда из сферического треугольника $AP_N C$ по теореме косинуса стороны получим следующее уравнение навигационной функции:

$$D = \arccos(\sin\varphi_A \sin\varphi + \cos\varphi_A \cos\varphi \cos\Delta\lambda) \quad (1.24)$$

Навигационной изолинией в данной ситуации является малый круг на поверхности сферы, который имеет сферический радиус D и называется *сферической изостадией*.



Очевидно, что по аналогии с плоской изостазией: $g=1$, $\tau=\Pi \pm 180$.

1.7 Навигационная функция разности расстояний на плоскости и сфере

Навигационный параметр и функция разности расстояний от судна до двух ориентиров описывают семейство изолиний, которые называются гиперболами. Функция используется в качестве геометрической основы разностно-дальномерных радионавигационных систем, таких как «Лоран-С» и «Чайка».

С точки зрения математики гипербола – это геометрическое место точек постоянной разности расстояний ΔD до двух ее фокусов. В этих фокусах находятся навигационные ориентиры, до которых измеряется разность расстояний.

На рис. 1.14 показаны навигационные ориентиры А (x_A, y_A) и В (x_B, y_B). Из текущей точки С(x, y) до них измерена разность расстояний $\Delta D = D_A - D_B$. Эта разность расстояний постоянна на изолинии, которая называется гиперболой. Линия, соединяющая навигационные ориентиры называется *базой*. Из точки С(x, y) база видна под углом ω , который называется *базовым углом*.

Запишем функции расстояний, используя формулу (1.8):

$$\begin{aligned} D_A &= \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} \\ D_B &= \sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2} \end{aligned}, \quad (1.24)$$

тогда навигационная функция ΔD запишется так:

$$\Delta D = D_A - D_B \quad (1.25)$$

В соответствие с (1.8), (1.9) и (1.25) формула для градиента функции может быть представлена в векторном виде:

$$\mathbf{g}_{\Delta D} = \mathbf{g}_{DA} - \mathbf{g}_{DB} = \begin{pmatrix} \cos \Pi_A - \cos \Pi_B \\ \sin \Pi_A - \sin \Pi_B \end{pmatrix} \quad (1.26)$$

Модуль его рассчитаем по теореме Пифагора:

$$\begin{aligned} g &= \sqrt{(\cos \Pi_A - \cos \Pi_B)^2 + (\sin \Pi_A - \sin \Pi_B)^2} = \\ &= \sqrt{2[1 - \cos(\Pi_A - \Pi_B)]} = \\ &= 2\sqrt{\frac{1}{2}(1 - \cos \omega)} = 2\sin \frac{\omega}{2} \end{aligned} \quad (1.27)$$

Направление градиента определится в соответствие с (1.7):

$$\tau = \arctg \left(\frac{\sin \Pi_A - \sin \Pi_B}{\cos \Pi_A - \cos \Pi_B} \right) \quad (1.28)$$

Анализ (1.27) показывает, что при удалении от базы модуль градиента разности расстояний уменьшается. Поле гипербол показано на рис. 1.15.

Применяя формулу косинуса стороны сферического треугольника, запишем навигационную функцию.

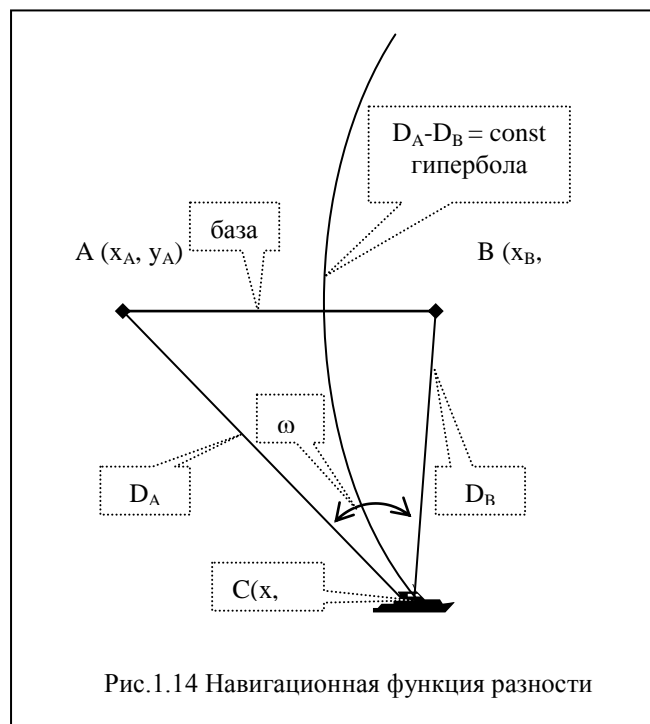
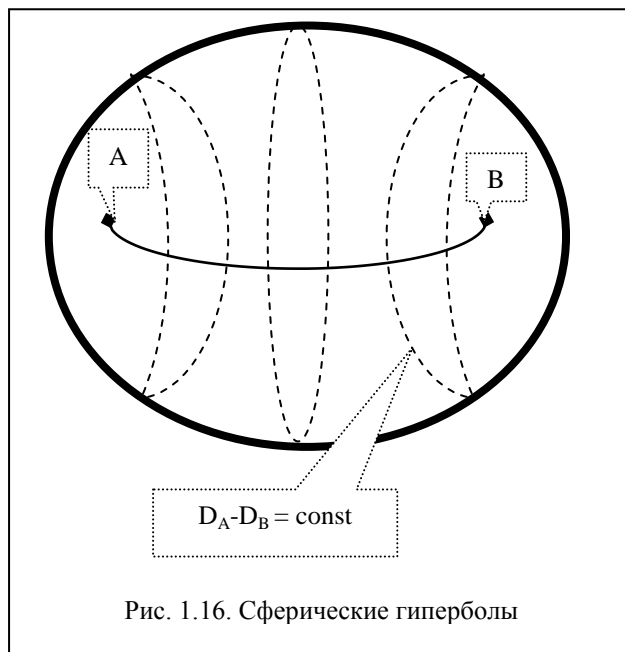
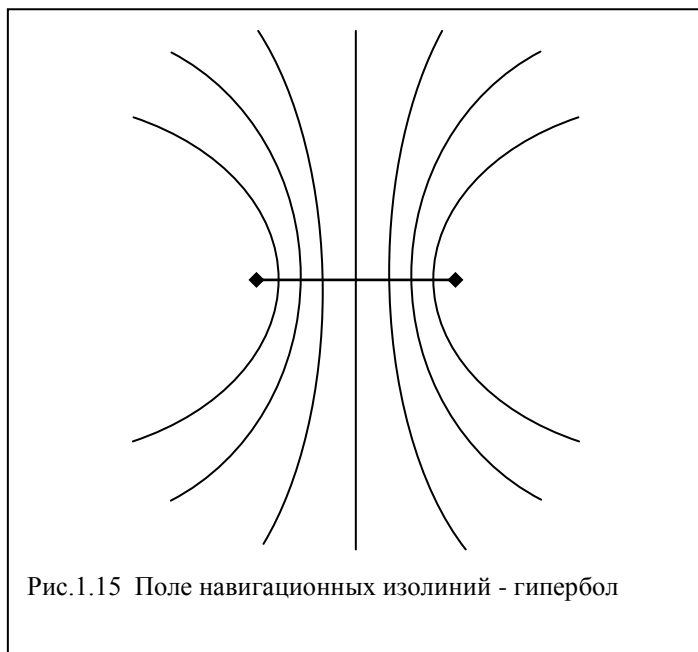


Рис.1.14 Навигационная функция разности

$$\Delta D = \arccos D_A - \arccos D_B \quad (1.29)$$

На сфере гипербола представляется замкнутой кривой, см. рис. 1.16. Модуль градиента g и его направление τ определится по формулам (1.27) и (1.28).



1.8 Навигационная функция прямого и обратного пеленга на сфере

При пеленговании на сфере различают два случая:

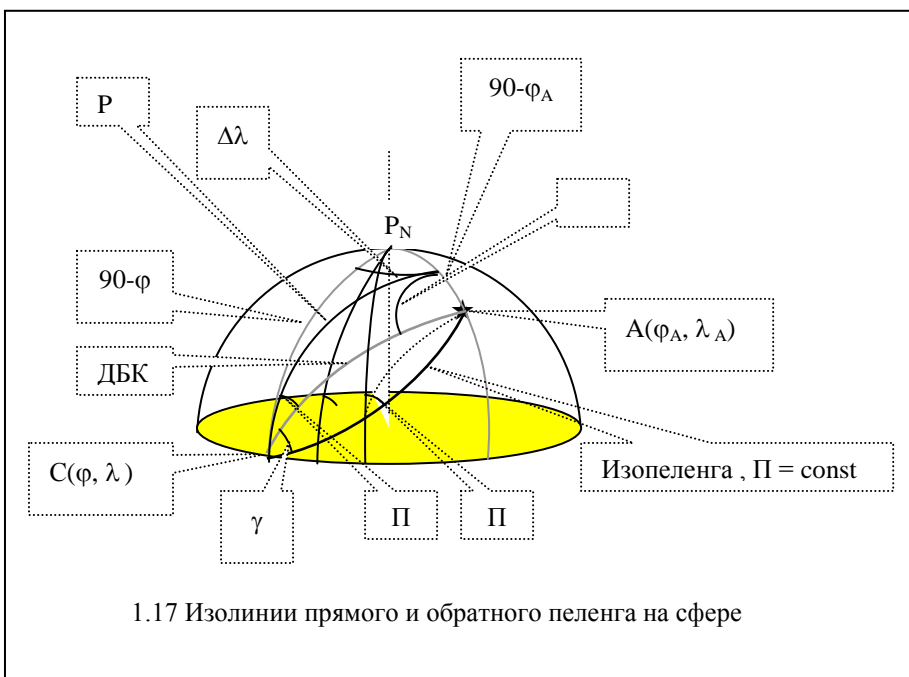
- с судна пеленгуется навигационный ориентир А, т.е. измеряется прямой пеленг Π (*обратная радиозасечка*)
- с ориентира пеленгуется судно С, т.е. измеряется обратный пеленг В (*прямая радиозасечка*)

В случае (а) прямого пеленгования

навигационного ориентира с судна на больших расстояниях

навигационная функция может быть получена средствами сферической тригонометрии.

На рис.1.17 навигационный ориентир А пеленгуется из точки С. Если мы хотим двигаться так, чтобы навигационный параметр Π на ориентир А всегда был постоянен, то необходимо следовать по некоторой кривой, которая называется *изопеленгой* или *изоазимутой*. Эта кривая показана на рисунке яркой линией и в любой ее точке угол Π между нордовой частью истинного меридиана и направлением на ориентир (дуга большого круга) будет постоянным.



Если же судно запеленговано с помощью *пеленгаторной станции* (b), то изолинией постоянного пеленга В с ориентира на судно будет ДБК (ортодромия), которая по кратчайшему расстоянию соединяет точки А и С. Обе кривые в точке А и в точке С по разному ориентированы относительно меридиана и эта разница определяется углом γ , который равен *сферическому схождению меридианов*.

В обоих случаях уравнения навигационных функций может быть получено из сферического треугольника P_nAC по теореме котангенсов:

$$ctg\Pi \sin(\lambda_A - \lambda) = ctg(90 - \varphi_A) \sin(90 - \varphi) - \cos(90 - \varphi) ctg(\lambda_A - \lambda) \quad (1.30)$$

Для случая (a):

$$ctg\Pi = tg\varphi_A \cos\varphi \operatorname{cosec}(\lambda_A - \lambda) - \sin\varphi ctg(\lambda_A - \lambda) \quad (1.31)$$

Для случая (b):

$$tg\varphi = ctg\Pi \sin(\lambda_A - \lambda) \sec\varphi_A + \cos(\lambda_A - \lambda) tg\varphi_A \quad (1.32)$$

В (1.32) задавая координатами навигационного ориентира, величиной ортодромического пеленга В, и долготой судна, имеем возможность вычислять широту точек ортодромии.

Параметры градиентов можно получить используя традиционные приемы, показанные выше. Мы приводим готовые результаты, известные в литературе по навигации:

$$a. g_n = \sin\Pi / tgP, \quad \tau = \Pi - 90 + \gamma \quad (1.33)$$

$$b. g_B = 1 / \sin D, \quad \tau = B + 90 + \gamma \quad (1.34)$$

Здесь P- сферический перпендикуляр, опущенный из точки С на меридиан точки А; D= AC- расстояние от точки А до точки С по ортодромии.

1.9 Навигационная функция высоты светила

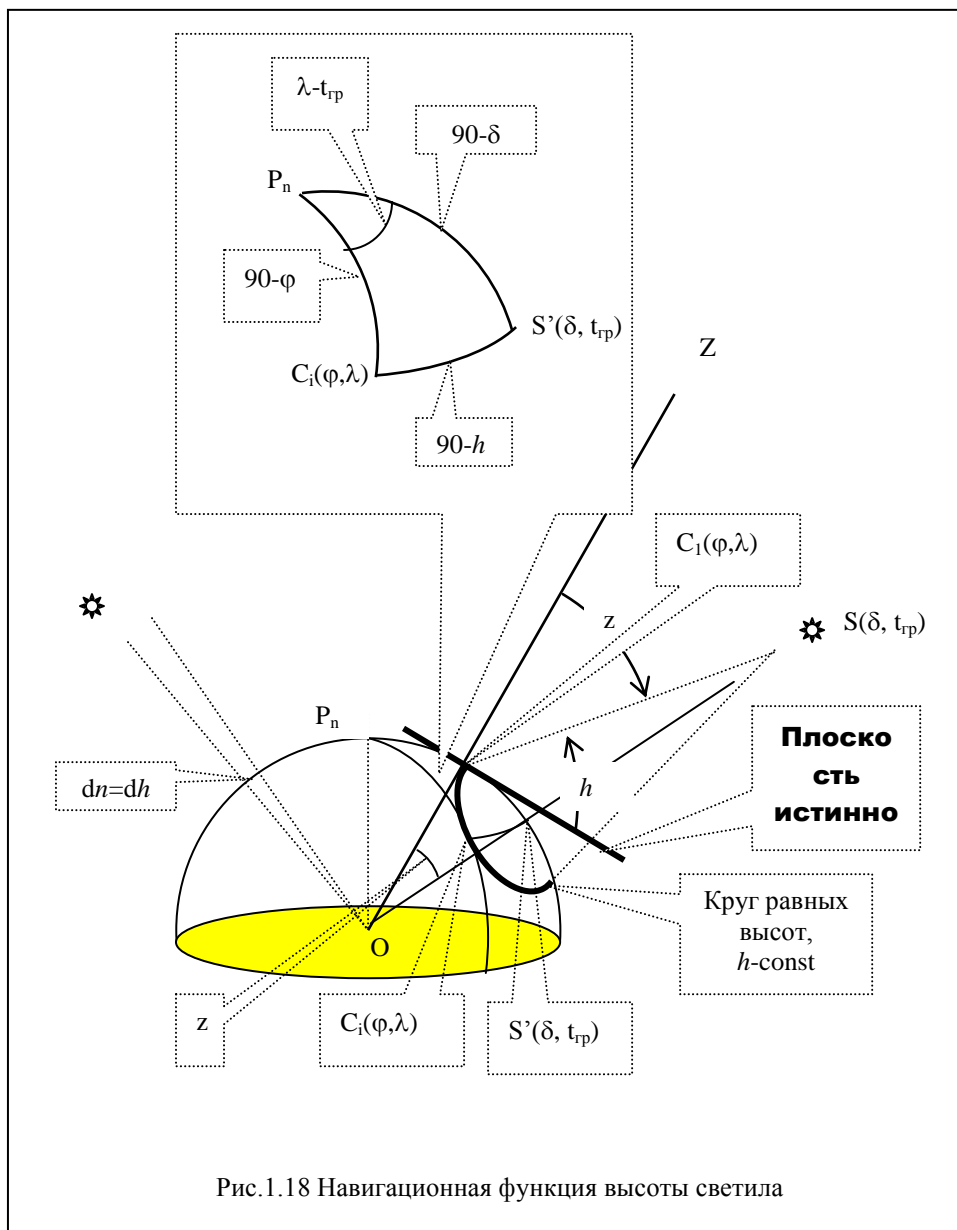
Навигационным параметром для определения места по небесным светилам является *высота светила* h измеренная над плоскостью истинного горизонта с помощью секстана, а навигационная изолиния- это малый круг на поверхности Земли, принятой за сферу – круг равных высот. С точки геометрии измерению h можно сопоставить измерение вертикального угла β (параграф 1.5) , и различие заключается в том, что светило находится на бесконечном ,с точки зрения практической навигации расстоянии от Земли, а задачу определения места судна необходимо решать на сфере , а не на плоскости. Получить все аналитические зависимости можно с помощью формул сферической тригонометрии ,и существенным здесь является то, что сам радиус сферы никак не задействован в этих формулах, а поэтому для фиксации положения наблюдателя и положения светила можно использовать земную сферу.

Выведем формулу навигационной функции h , а для этого обратимся к рис. 1.18. На рисунке представлена Северное полушарие Земли. В точке $S(\delta, t_p)$ находится небесное тело. Здесь δ, t_p - координаты светила, которые являются полной аналогией географических координат. Фактически на некоторой воображаемой концентрической Земле сфере (Небесная сфера) $\delta = \varphi$, а $t_p = \lambda$. С помощью центрального проектирования светило $S(\delta, t_p)$ перенесено на поверхность Земли в точку $S'(\delta, t_p)$. Наблюдатель находится в точке $C_1(\varphi, \lambda)$ или в любой другой точке $C_i(\varphi, \lambda)$, из которых над горизонтом измерен навигационный параметр h . В точке $C_1(\varphi, \lambda)$ показана плоскость истинного горизонта (касательная плоскость), проведена нормаль к поверхности, указывающая на зенит. Угол z между нормалью и направлением на светило называется зенитным расстоянием. В соответствии с рисунком $h + z = 90$. Светило видно под углом h к горизонту не в одной точке, а на некоторой кривой , все точки которой равноудалены от проекции светила S' . Этот малый круг с полюсом в точке S' – круг равных высот.

Рассмотрим сферический треугольник $P_nS'C_i$. В этом треугольнике сторона $C_iS' = z = 90 - h$, так как точка C_i - проекция зенита Z на земную сферу. Теперь по теореме косинуса стороны сферического треугольника запишем навигационную функцию h :

$$\begin{aligned} \sinh &= \sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos(\lambda - t_p) \\ h &= \arcsin[\sin\varphi \sin\delta + \cos\varphi \cos\delta \cos(\lambda - t_p)] \end{aligned} \quad (1.35)$$

Высота измеряется в плоскости вертикала светила, которая ориентирована по направлению азимута. Плоскость вертикала образует на поверхности модели Земли, т.е. сферы, большой круг, поэтому элементарное приращение высоты $dh=dn$, а в соответствии с формулой (1.4) $g_h=1$. На рис. 1.16 вертикал светила совпадает с меридианом светила.



Для подтверждения очевидной догадки воспользуемся формулой (1.35), в которой для упрощения будем считать, что $\lambda = t_{\text{гп}}$, т.е. наблюдатель находится на меридиане светила, тогда:

$$\begin{aligned} h &= \arcsin(\sin \varphi \sin \delta + \cos \varphi \cos \delta) \\ h &= \arcsin[\cos(\delta - \varphi)] \\ \frac{\partial h}{\partial \varphi} &= \frac{\sin(\delta - \varphi)}{\sqrt{1 - \cos^2(\delta - \varphi)}} = 1 \\ \frac{\partial h}{\partial w} &= 0 \\ g_h &= 1 \\ \tau_h &= 180^\circ \end{aligned} \tag{1.36}$$

И так, мы установили, что модуль градиента высоты светила $g_h=1$, а $\tau_h=A=180^0$, где A - азимут светила (по нашим условиям наблюдатель и светило находятся на одном меридиане).

1.10 Прямой аналитический расчет координат места судна

Для определения координат места судна на двумерной поверхности земного эллипсоида или шара необходимо измерить, как минимум, два навигационных параметра, и зная выражение навигационной функции, записать систему уравнений навигационных изолиний.

В качестве примера на судне можем измерить два навигационных параметра (расстояния) D_A и D_B до ориентиров $A(x_A, y_A)$ и $B(x_B, y_B)$. Имеем систему уравнений навигационных функций:

$$\begin{aligned} D_A &= \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} \\ D_B &= \sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2} \end{aligned} \quad (1.37)$$

Если, например, $D_A = 5$, а $D_B = 10$, то система уравнений навигационных изолиний запишется так:

$$\begin{aligned} \sqrt{(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2} &= 5 \\ \sqrt{(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2} &= 10 \end{aligned} \quad (1.38)$$

Теперь необходимо решить систему (1.38) относительно неизвестных координат (x, y) , которые и являются координатами места судна.

Прямое аналитическое решение таких задач имеет достаточно сложный вид даже для простых навигационных функций. Рассмотрим задачу определения места по двум пеленгам на плоскости. Система уравнений запишется из (1.10), в соответствии с рис. 1.18 будет иметь вид:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \Pi_1 &= \frac{y_1 - y}{x_1 - x} \\ \operatorname{tg} \Pi_2 &= \frac{y_2 - y}{x_2 - x} \end{aligned} \quad (1.39)$$

где x_1, x_2, y_1, y_2 – координаты навигационных ориентиров.

Обозначив $\operatorname{tg} \Pi_1$ через T_1 , а $\operatorname{tg} \Pi_2$ через T_2 , $x_0 = x$, $y_0 = y$, запишем алгоритм решения системы:

- $T_1(x_1 - x_0) - y_1 = T_2(x_1 - x_0) - y_2$;
- $x_0 = (T_2 x_2 - T_1 x_1 + y_1 - y_2) / (T_2 - T_1)$;
- $y_0 = (T_1 T_2 (x_2 - x_1) + T_2 y_1 - T_1 y_2) / (T_2 - T_1)$;
- пусть $\Pi_1 = 30^\circ$, $\Pi_2 = 82^\circ$, тогда наблюдаемые прямоугольные координаты рассчитаем так:
- $x_0 = (\operatorname{tg}(82^\circ) * 3 - \operatorname{tg}(30^\circ) * 8 + 5 - 9) / (\operatorname{tg}(82^\circ) - \operatorname{tg}(30^\circ)) = 1.95$ мили
- $y_0 = (\operatorname{tg}(30^\circ) * \operatorname{tg}(82^\circ) * (3 - 8) + (\operatorname{tg}(82^\circ) * 5 - (\operatorname{tg}(30^\circ) * 9)) / (\operatorname{tg}(82^\circ) - \operatorname{tg}(30^\circ)) = 1.50$ мили.

Подобные решения существуют и при определении места судна другими способами: по двум расстояниям, двум горизонтальным углам, двум высотам светил (задача Гаусса), и т.д.

Прямые аналитические методы расчета координат имеют ряд недостатков:

Практически все навигационные функции являются нелинейными, а поэтому решение таких систем уравнений неоднозначно. Неоднозначность решения может привести к опасной ситуации.

Методы решения не универсальны, что не дает единого подхода к синтезированию алгоритмов и программного обеспечения.

Как мы видели выше все навигационные

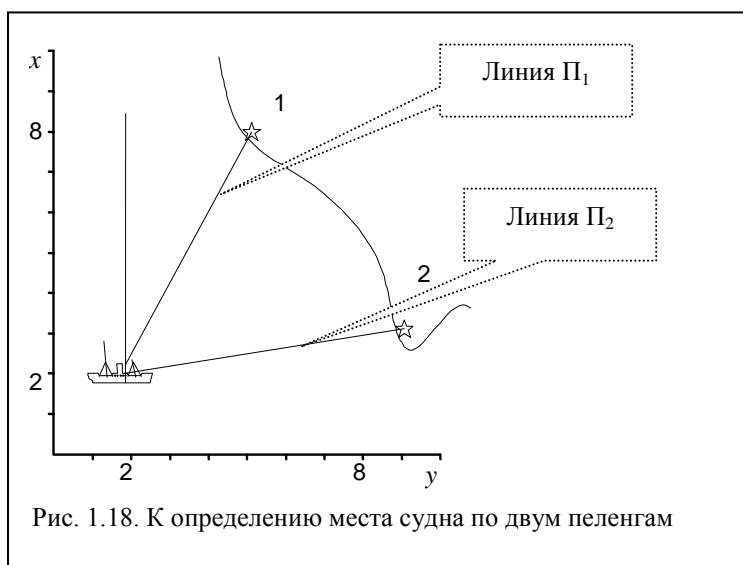


Рис. 1.18. К определению места судна по двум пеленгам

функции на сфере описываются с помощью тригонометрических функций, которые , в силу своей периодичности, вносят дополнительную многозначность в расчет координат.

На практике прямой аналитический метод заменяют графоаналитическим подходом, т.е. навигационные изолинии прокладывают или заранее наносят на навигационной карте.

Линейные методы расчета координат места судна

Эта глава содержит описание методов обработки навигационной информации и оценки точности обсервации.

2.1 Линеаризация навигационных функций

Для устранения недостатков прямых аналитических методов расчета координат применяют процедуру линеаризации навигационных функций в окрестности некоторой точки, которая, как предполагают, должна быть близка к обсервованной. В морской навигации – это счислимая точка (x_s, y_s) . Линеаризацию производят с помощью разложения навигационной функции в ряд Тейлора с сохранением только первых членов разложения. Геометрически, это замена графика функции в счислимой точке (навигационной изолинии) касательной к ней. Эта касательная называется *линией положения*. Так как в измерениях всегда присутствуют погрешности, то измеренный НП никогда не совпадет со НП в счислимой точке (счислимый НП), а поэтому линия положения из-за погрешности измерения сместится параллельно самой себе в сторону измеренной навигационного параметра.

Другими словами, разность между обсервованным U_o (измеренным) и счислимым U_c навигационными параметрами может быть элементарно мала и представлена в виде дифференциала навигационной функции $U=f(x,y)$, вычисленного для некоторой малой окрестности счислимой точки.

$$dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} dy \quad (2.1)$$

На практике дифференциалы dU, dx, dy заменяют конечными приращениями и формула (2.1) принимает вид:

$$\Delta U = \frac{\partial U}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \Delta y \quad (2.2)$$

В навигации же принято записывать линейное уравнение (2.2) в виде:

$$\frac{\partial U}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial U}{\partial y} \Delta y = \Delta U \quad (2.3)$$

или

$$a_{11}\Delta x + a_{12}\Delta y = \Delta U \quad (2.3a)$$

В (2.3) и (2.3a) $\Delta U = U_o - U_c$, $\Delta x = x_o - x_c$, $\Delta y = y_o - y_c$ – разности обсервованных и счислимых НП и координат.

Для графического решения задач определения места судна уравнения типа (2.3) используются в навигации в нормированном виде (2.4), который получается при делении (2.3) на модуль градиента навигационной функции:

$$\frac{\partial U}{\partial x(g)} \Delta x + \frac{\partial U}{\partial y(g)} \Delta y = \Delta U / g = \Delta n \quad (2.4)$$

Здесь выражения (2.3), как и (2.4) описывают *линию положения*, а Δn – *перенос линии положения* от счислимой точки по направлению вектора-градиента, т.е. по нормали к изолинии. Правая часть (2.4) полностью согласуется с выражением (1.4).

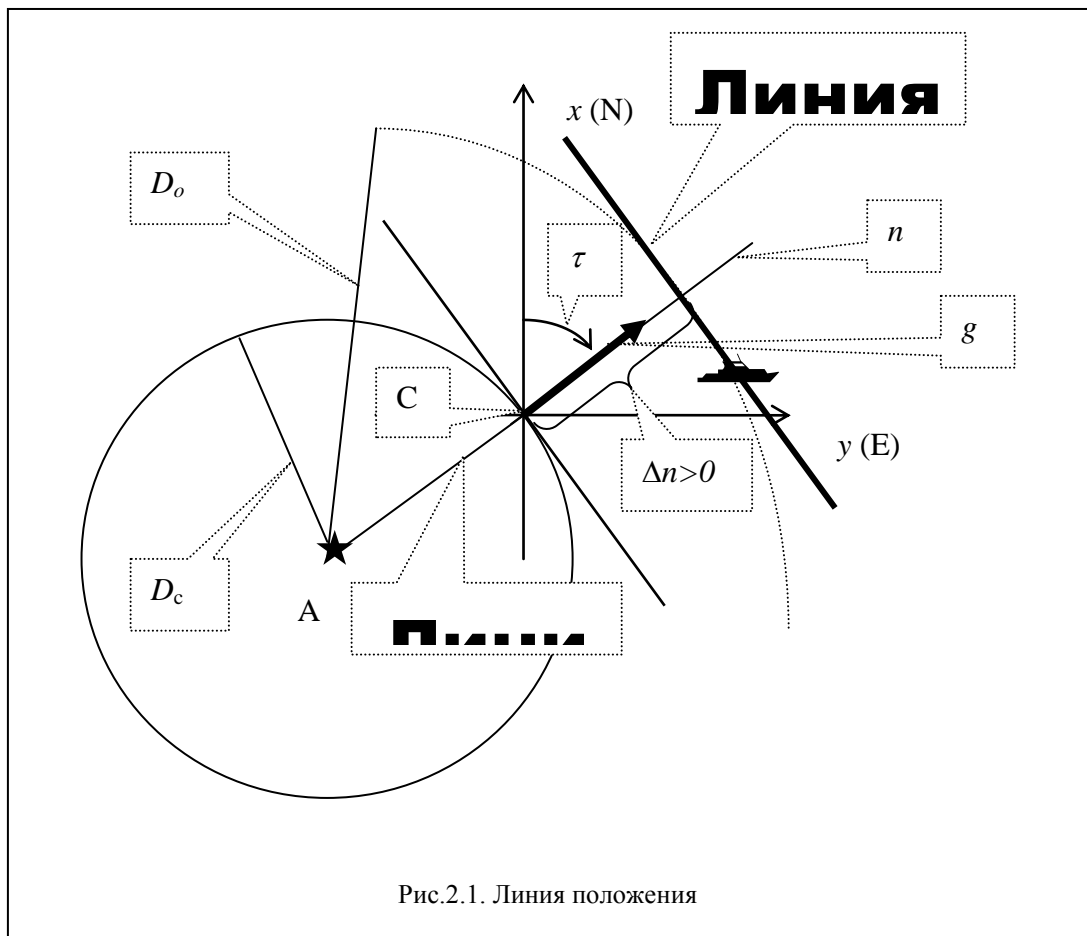
В соответствии с нашими рассуждениями дадим определение линии положения:

Линия положения- это касательная к навигационной

Уравнение (2.4) с учетом формул параграфа 1.1 может быть переписано так:

$$\cos \tau \Delta x + \sin \tau \Delta y = \Delta n \quad (2.5)$$

Для навигационной функции расстояния, иллюстрация линии положения представлена на рис. 2.1



2.2 Аналитический вариант расчета координат места судна по двум линиям положения

Для определения места судна достаточно измерение двух навигационных параметров, так как поверхность на которой ищутся обсервованные координаты двухмерная (положение точки определяется двумя координатами).

Алгоритм расчета таков:

- В момент времени t измеряются два навигационных параметра U_{o1} и U_{o2} .
- На этот же момент времени снимаются числимые координаты x_c, y_c и на них рассчитываются числимые навигационные параметры U_{c1} и U_{c2} .
- На числимые координаты рассчитываются коэффициенты линий положения a_{ij} , т.е. частные производные по навигационным параметрам от навигационных функций.
- Правые части уравнений линий положения рассчитываются так: $\Delta U_1 = U_{o1} - U_{c1}$, $\Delta U_2 = U_{o2} - U_{c2}$.
- Затем составляется система двух уравнений линий положения, которая может быть переписана в матричном виде, показанном ниже. Соответствующие матрицы имеют следующие названия: A - матрица коэффициентов линий положения, ΔX - вектор неизвестных, ΔU - вектор измерений (вектор свободных членов)

$$\begin{aligned}
 a_{11}\Delta x + a_{12}\Delta y &= \Delta U_1 \\
 a_{21}\Delta x + a_{22}\Delta y &= \Delta U_2
 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad \Delta X = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}, \quad \Delta U = \begin{pmatrix} \Delta U_1 \\ \Delta U_2 \end{pmatrix}, \quad \Rightarrow \quad A\Delta X = \Delta U \quad (2.6)$$

f. Решение системы уравнений линий положения (2.6) запишется так:

$$\Delta X = A^{-1}\Delta U \quad (2.7)$$

g. Если обозначить вектор счислимых координат, как X_c , а вектор *обсервованных координат*, как X_o , то можем записать:

$$X_o = X_c + \Delta X \quad (2.8)$$

где

$$X_o = \begin{pmatrix} x_o \\ y_o \end{pmatrix}, \quad X_c = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \end{pmatrix},$$

Так как в следствии линеаризации навигационных функций появляются методические погрешности, то для их компенсации используется итерационная процедура (метод последовательных приближений), а именно, обсервованные координаты принимаются за новые счислимые, $X_o = X_c$, и вычисления продолжаются с пункта b, а заканчиваются тогда, когда текущая длина вектора ΔX не будет меньше наперед заданной величины ϵ . Для навигационных задач- это обычно 2-3 итерации.

2.3 Расчет координат при избыточном числе измерений навигационных параметров

2.3.1 Равноточные измерения

Число навигационных измерений при определении места судна очень существенно. Если измеряются 2 навигационных параметра и определяются 2 координаты, то говорят, что в задаче отсутствует избыточность, т.е. система уравнений (2.6) как правило совместна.

Отсутствие избыточности измерений приводит к неконтролируемому влиянию различных видов погрешностей на результат, а особенно опасны грубые промахи и систематические погрешности.

Для получения более надежной обсервации применяют избыточные навигационные измерения.

Пусть для определения координат измерены три навигационных параметра ($n=3$), определить же нужно, две координаты ($k=2$). Говорят, что в этой ситуации избыточность $r = n - k = 1$.

Первоначально систему уравнений линий положения матричном виде запишем так же, как в (2.6):

$$A\Delta X = \Delta U \quad (2.9)$$

но матрицы будут иметь вид:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix}, \quad \Delta X = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix}, \quad \Delta U = \begin{pmatrix} \Delta U_1 \\ \Delta U_2 \\ \Delta U_3 \end{pmatrix},$$

В этой системе количество неизвестных k меньше, чем количество уравнений n . Решение любых двух уравнений дает положение одной из вершин треугольника. Это означает, что подстановка этого решения в третье уравнение, не обратит его в тождество. Такая система называется несовместной, т.е. решение пары уравнений не совместно с третьим. Для получения согласованного решения системы необходимо ввести дополнительные условия. Если предположить, что систематические погрешности в измерениях отсутствуют, т.е. они определены и исключены специальными приемами измерений, то все остальные погрешности измерений можно считать случайными. Известно, что центром группирования случайных величин является их математическое ожидание или его оценка - среднее значение. Это среднее

значение наиболее близко к истинному значению и имеет минимальную дисперсию. Очевидно, что и в нашем случае нам необходимо найти некоторое среднее из трех точек, которое будет иметь статус оценки математического ожидания множества из трех измерений. Ясно, что эта точка должна быть в фигуре погрешностей, а не вне ее. Несогласованность измерений возникает из-за погрешностей, которые называют *невязками* системы уравнений.

Теперь вместо системы (2.9) с учетом невязок более корректно следует записать следующее матричное уравнение (система уравнений поправок):

$$A\Delta X = \Delta U + V \quad (2.10)$$

здесь V - вектор невязок (погрешностей), который имеет вид:

$$V = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$$

Если принять, что для получения согласованного решения линии положения необходимо сдвинуть внутрь фигуры погрешностей на некоторые величины v_1 , v_2 и v_3 соответственно, то математическое условие поиска оптимального согласованного решения относительно этого среднего значения (точка O) определится формулой (2.11), т.е. минимальной длиной вектора V .

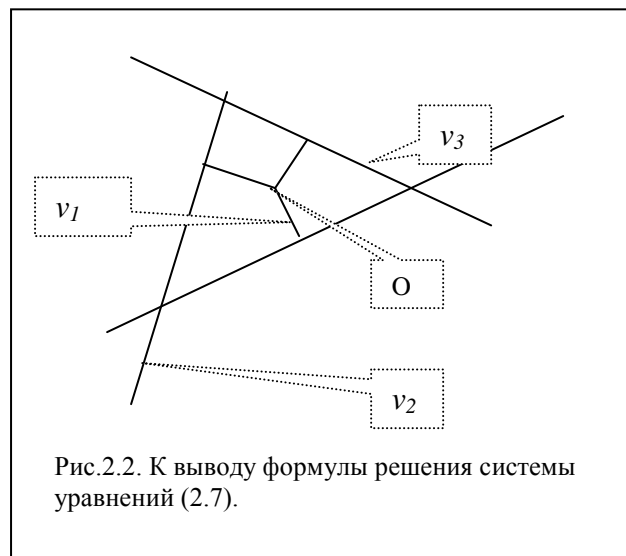


Рис.2.2. К выводу формулы решения системы уравнений (2.7).

$$Q = |V|^2 = v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = \min, \quad (2.11)$$

здесь величины v_1 , v_2 и v_3 , выраженные в единицах измерений, называются невязками, поправками или погрешностями измерений в зависимости от придаваемого им знака. Выражение (2.11) определяет условие решения системы (2.10), а отсюда и название рассматриваемого метода - МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ.

Для получения формулы решения системы (2.10), запишем это выражение относительно вектора V :

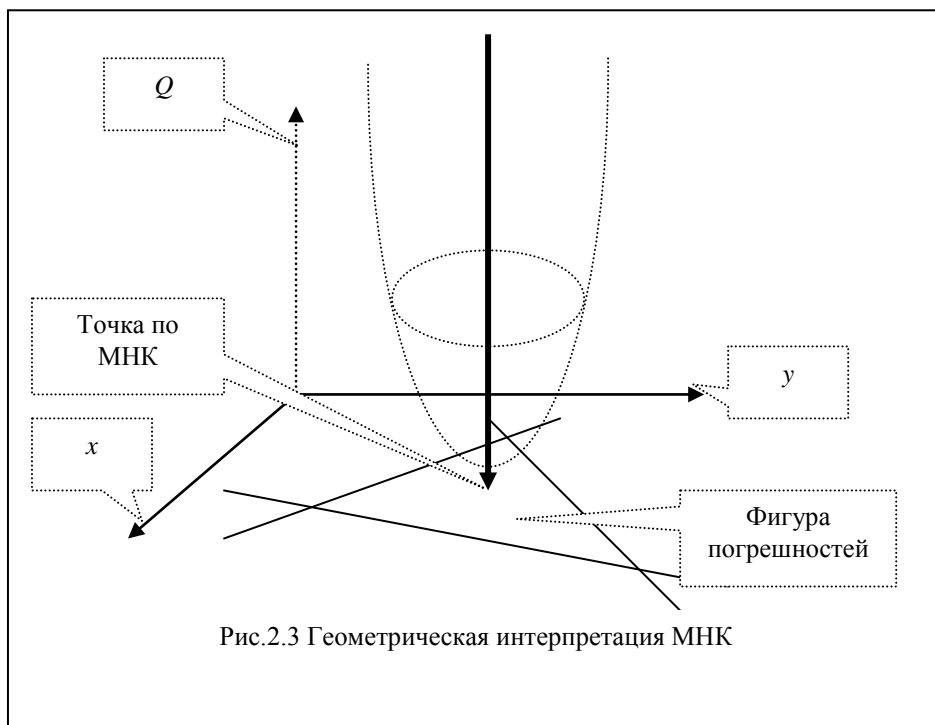


Рис.2.3 Геометрическая интерпретация МНК

$$V = A\Delta X - \Delta U$$

$$Q = V^T V = (A\Delta X - \Delta U)^T (A\Delta X - \Delta U), \quad (2.12)$$

Взяв производную от выражения (2.12) по вектору неизвестных и приравняв ее к нулю, находим формулу для решения системы (2.10):

$$Q = \Delta X^T A^T \Delta X - \Delta U^T A \Delta X - \Delta X^T A^T \Delta U + \Delta U^T \Delta U,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial(\Delta X)} = 2A^T A \Delta X - \Delta U^T A - A^T \Delta U = 2A^T A \Delta X - 2A^T \Delta U = 0$$

$$A^T A \Delta X = A^T \Delta U \quad (2.13)$$

Система (2.13) называется системой нормальных уравнений.

Теперь имеем возможность записать решение:

$$\Delta \hat{X} = (A^T A)^{-1} A^T \Delta U. \quad (2.14)$$

Знак “^” над вектором искомых величин означает, что решение получено с применением критерия оптимальности Q . Рис.2. 3 Иллюстрирует решение по МНК.

После получения решения по (2.14) относительно счислимой точки в локальной системе координат, используются формулы (2.8), а затем выполняется итерационная процедура. Точка, положение которой определяется вектором X_o , называется *вероятнейшей точкой*.

2.3.2 Неравноточные измерения

В предыдущем параграфе никак не оговаривались погрешности измеряемых навигационных параметров, так как они считались равноточными, т.е. имеющими одинаковые средние квадратические погрешности m .

В общем случае измерения навигационных параметров не являются равноточными, т.е. их средние квадратические погрешности могут отличаться, что и происходит на практике если измерения выполнены различными приборами или различными наблюдателями. Естественно, что вероятнейшая точка, полученная по МНК должна быть ближе к той линии положения, которая точнее, а поэтому уравнивание измерений происходит с учетом их *весов* - величин, обратно - пропорциональных квадратам среднеквадратических погрешностей измерений, которые формируют так называемую весовую матрицу.

Идеология вывода ничем не отличается от предложенной в параграфе 2.2.1.

Умножим слева правую и левую части (2.10) на матрицу W , которая имеет следующий вид:

$$W = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m_3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w_1 & 0 & 0 \\ 0 & w_2 & 0 \\ 0 & 0 & w_3 \end{pmatrix}, \quad (2.15)$$

здесь m - средняя квадратическая погрешность измерения соответствующего навигационного параметра. Получим следующее уравнение:

$$W A \Delta X = W \Delta U + W V \quad (2.16)$$

теперь выражение для Q , (2.12), перепишется так:

$$Q = (WV)^T (WV) = (WA \Delta X - W \Delta U)^T (WA \Delta X - W \Delta U) = \min \quad (2.17)$$

Используем изложенную выше методику и получим систему нормальных уравнений с учетом неравноточных измерений, предварительно обозначив матрицу $W^T W$ как весовую матрицу D^{-1} :

$$W^T W = D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{m_3^2} \end{pmatrix}, \quad (2.18)$$

Система нормальных уравнений запишется так:

$$A^T D^{-1} A \Delta X = A^T D^{-1} \Delta U \quad (2.19)$$

а решение будет иметь вид:

$$\Delta \hat{X} = (A^T D^{-1} A)^{-1} A^T D^{-1} \Delta U. \quad (2.20)$$

Если элементы матрицы (2.18) равны, это означает, что измерения равноточные и (2.20) превращается в (2.14). Формула (2.20) носит более общий характер, чем (2.14).

Для определения координат опять воспользуемся формулой (2.8):

Вероятнейшая точка, полученная по формуле (2.20) определяет средневзвешенные значения координат.

2.4 Априорная оценка точности рассчитанных координат

Априорная оценка точности измеряемых навигационных параметров основывается на многочисленных статистических исследованиях, которые происходили до конкретной обсервации. В качестве основного параметра для априорной оценки точности измеряемых величин применяется средняя квадратическая погрешность измеряемого навигационного параметра m .

Особенностью определения координат является тот факт, что измерения косвенные, то есть измеряются навигационные параметры, и их погрешности затем переносятся в погрешности координат. Рассмотрим процедуру переноса погрешностей измерений в погрешности координат на примере ОМС по двум измерениям.

В этом случае линеаризованная система принимает вид:

$$A \Delta X = \Delta U \quad (2.21)$$

Так как в измерениях присутствуют погрешности δU , то это приведет к погрешности вектора оценок и система переписывается в виде:

$$A(\Delta X + \delta X) = \Delta U + \delta U, \quad (2.22)$$

Тогда

$$A \delta X = \delta U,$$

Откуда

$$\delta X = A^{-1} \delta U \quad (2.23)$$

Формирование ковариационной матрицы погрешности измерений выполняется по формуле

$$D(\Delta U) = D(\delta U \delta U^T), \quad (2.24)$$

здесь D – обозначение ковариационной матрицы или, что тоже самое, символ дисперсии вектора вектора δU .

Для двумерного случая умножение $\delta U \delta U^T$ выглядит так:

$$\delta U \delta U^T = \begin{pmatrix} \delta U_1 \\ \delta U_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta U_1 & \delta U_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta U_1 \delta U_1 & \delta U_1 \delta U_2 \\ \delta U_2 \delta U_1 & \delta U_2 \delta U_2 \end{pmatrix},$$

а операция математического ожидания, выполненная над матрицей $\delta U \delta U^T$ превращает ее в ковариационную матрицу D :

$$D = \begin{pmatrix} m_1^2 & m_1 m_2 \\ m_1 m_2 & m_2^2 \end{pmatrix}.$$

На главной диагонали D находятся дисперсии измеряемых навигационных параметров, а вне диагонали – ковариационные моменты, которые характеризуют статистическую связь между измерениями.

Аналогично определим ковариационную матрицу погрешностей определяемых параметров, используя правила матричного исчисления $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$ и $(B^{-1})^{-T} = (B^T)^{-1}$,

получим:

$$N = D(\Delta X) = D(\delta X \delta X^T) = D[(A^{-1} \delta U)(A^{-1} \delta U)^T] = (A^T D^{-1} A)^{-1}$$

В дальнейшем при написании ковариационных матриц, где это не вносит двусмысленности, будем опускать аргумент при D .

И так, ковариационная матрица погрешностей координат N рассчитывается так:

$$N = (A^T D^{-1} A)^{-1} \quad (2.25)$$

Для двумерного случая матрица N имеет вид:

$$N = \begin{pmatrix} n_{11} & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} \end{pmatrix},$$

где n_{11} - дисперсия погрешностей широты, n_{22} - дисперсия погрешностей отшествия, $n_{12} = n_{21}$ - ковариационные моменты.

Вся информация о погрешностях содержится в матрице N . В судовождении часто используется ее геометрическая интерпретация в виде эллипса погрешностей. Установим связь между элементами матрицы N и параметрами эллипса: полуосями и углом ориентации.

В общем случае такая задача рассматривалась Хоттелингом Г. в 1933 г. и им было показано, что для ковариационной матрицы существуют векторы, направлениям которых соответствуют максимальные и минимальные значения рассеивания (погрешностей). Численно эти значения соответствуют собственным числам матрицы. Направления собственных векторов, указывающие на направление максимального и минимального рассеивания (дисперсии), соответствуют направлениям полуосей эллипса. Собственные числа - это экстремальные значения дисперсий. Для перехода к линейным величинам - полуосям эллипса (гипер - эллипса для n -мерного пространства), необходимо извлечь квадратный корень.

Рассмотрим эту задачу для двумерного случая, то есть для плоскости. Физика и геометрия собственных чисел и векторов заключается в том, что результатом умножения исходной матрицы на собственный вектор будет вектор, коллинеарный собственному, по длине отличающийся в число раз, пропорциональное собственному значению. Математически это запишется так:

$$Nz = p = \lambda z \quad (2.26)$$

Поставим численный эксперимент, который прояснит этот факт.

Выполним умножение Nz , где в качестве z будем выбирать единичный вектор с направлением Ψ от 0° до 360° . Формирование компонент единичного вектора выполним по формулам:

$$z = \begin{pmatrix} \cos(\psi) \\ \sin(\psi) \end{pmatrix}$$

В качестве примера возьмем матрицу

$$N = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \quad (2.27)$$



В результате перемножения конец вектора p опишет эллипс. (Рис.2.4)

Процедуру умножения матрицы N на z можно рассматривать как оператор, преобразующий единичный вектор z . После перемножения вектор изменит направление и длину. Ниже приведены результаты такого перемножения с дискретностью в один градус, а компоненты вектора p (значения x и y), приведены в таблице 2.1

Табл. 2.1

Ψ	Ψ_i	x	y	R
0	8.13	21.000	3.000	21.213
1	8.48	21.049	3.139	21.282
2	8.83	21.092	3.277	21.345
3	9.18	21.128	3.415	21.402
4	9.53	21.158	3.551	21.454
5	9.87	21.182	3.686	21.500
6	10.22	21.199	3.820	21.540
7	10.55	21.209	3.953	21.574
8	10.90	21.213	4.084	21.603
9	11.24	21.211	4.215	21.625
10	11.58	21.202	4.344	21.642
11	11.92	21.187	4.471	21.653
12	12.26	21.165	4.598	21.658
13	12.60	21.137	4.723	21.658

14	12.93	21.102	4.846	21.651
15	13.27	21.061	4.968	21.639
...
99	92,48	-0,322	7,432	7,439
100	95,38	-0,692	7,358	7,390
101	98,30	-1,062	7,281	7,358
102	101,24	-1,432	7,201	7,342
103	104,19	-1,801	7,120	7,344
104	107,13	-2,169	7,037	7,363
105	110,05	-2,537	6,951	7,400
106	112,94	-2,905	6,863	7,453
107	115,78	-3,271	6,773	7,522

В первом столбце таблицы находится направление единичного вектора z , а во втором, направление уже преобразованного вектора - вектора p . В последнем столбце содержится длина R вектора p . Из расчетов, приведенных в таблице видно, что расхождение в направлении вектора z и вектора p величина переменная, но в районе 12^0 и 102^0 эти направления совпадают. Кроме того, этим направлениям соответствуют максимальное и минимальное значение длины R . Таким образом, направления собственных векторов 12^0 и 102^0 соответственно, они ортогональны. Собственные значения равны приблизительно 21.658 и 7.342 соответственно.

Для двумерного случая можно получить простые формулы для расчета параметров эллипса погрешностей из матрицы N . Опираясь на выражение (2.26), запишем.

$$\begin{aligned} n_{11} z_1 + n_{12} z_2 &= \lambda z_1 \\ n_{21} z_1 + n_{22} z_2 &= \lambda z_2 \end{aligned} \quad (2.28).$$

или,

$$\begin{aligned} (n_{11} - \lambda) z_1 + n_{12} z_2 &= 0 \\ n_{21} z_1 + (n_{22} - \lambda) z_2 &= 0 \end{aligned}$$

или в матричном виде:

$$(N - \lambda E) z = 0$$

где $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ - нулевая матрица.

Формально получаем:

$$\begin{aligned} Z &= \frac{1}{\text{Det}(N - \lambda E)} \text{adj}(N - \lambda E) * 0 \\ \text{Det}(N - \lambda E) Z &= \text{adj}(N - \lambda E) * 0 \end{aligned}$$

следовательно, $\text{Det}(N - \lambda E) Z = 0$.

Так как Z произвольный вектор и, в общем случае не нулевой, то

$$\text{Det}(N - \lambda E) = 0$$

Запишем для двумерного случая:

$$\text{Det}(N - \lambda E) = \begin{vmatrix} n_{11} - \lambda & n_{12} \\ n_{21} & n_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(n_{11} - \lambda)(n_{22} - \lambda) - n_{21} n_{12} = 0$$

Это квадратное уравнение. Решая его относительно λ и, принимая во внимание, что $n_{21} = n_{12}$, так как матрица N симметрическая, получим:

$$\lambda_{1,2} = \frac{n_{11} + n_{22} \pm \sqrt{(n_{11} - n_{22})^2 + 4n_{12}^2}}{2} \quad (2.29)$$

Подставив значения из матрицы (2.27), получим $\lambda_1 = 21.659$ $\lambda_2 = 7.341$

Эти значения практически совпали с максимальным и минимальным значением из таблицы.

Определим ориентацию собственных векторов, соответствующих найденным собственным значениям. Считая λ известным, подставим это значение в (2.28) и разрешим эту систему относительно z_1 и z_2 , учитывая, что $z_1 = \cos(\Psi)$, $z_2 = \sin(\Psi)$.

Первое уравнение системы 2.28 будет выглядеть так:

$$n_{11} \cos(\Psi) + n_{12} \sin(\Psi) = \lambda \cos(\Psi)$$

Разделим первое левую и правую часть на $\cos(\Psi)$.

$$n_{11} + n_{12} \operatorname{tg}(\Psi) = \lambda$$

Откуда

$$\operatorname{tg}(\Psi) = \frac{\lambda - n_{11}}{n_{12}}. \quad (2.30)$$

$$\Psi = \arctg \frac{\lambda - n_{11}}{n_{12}} \quad (2.31).$$

Подставив числовые значения, получим $\Psi = 12.388^\circ$

Таким образом, фактически получено направление большой полуоси эллипса Ψ относительно норда. Если в (2.31) подставить другое значение λ то получим направление малой полуоси, но так как они ортогональны, то практически это не требуется.

Для отыскания полуосей необходимо извлечь квадратные корни из собственных чисел.

$$a = \sqrt{\lambda_1}, \quad b = \sqrt{\lambda_2} \quad (2.32)$$

Когда говорят об оценке точности, то обычно добавляют слова априорная или апостериорная.

Априорная - это оценка точности, выполненная по информации о погрешностях измерений полученной ранее. Как правило, такая информация о точности *измеряемых навигационных параметров* основывается на многочисленных статистических исследованиях, которые происходили до конкретной обсервации в каких-то осредненных условиях. Именно такая информация, как правило, содержится в ковариационной матрице погрешностей измерений используемой при расчете координат. В формуле (2.18) она обозначена как D . Если погрешности измерений статистически независимы, то внедиагональные элементы равны нулю и матрица имеет вид:

$$D = \begin{pmatrix} m_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & m_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3^2 \end{pmatrix}$$

Именно эти погрешности в соответствии с правилом переноса погрешностей и формируют априорную ковариационную матрицу определяемых параметров.

Процедура построения эллипса погрешностей по ковариационной матрице сводится к следующему:

- Рассчитываем собственные значения λ по формуле (2.29)
- Определяем угол ориентации Ψ по формуле (2.31)

- Рассчитываем полуоси по (2.32)

На рис. 2.5 показана связь между элементами ковариационной матрицы и эллипсом. Отрезок, заключенный между касательной к эллипсу параллельной оси Y и самой осью соответствует СКП по широте, или $m_\phi = \sqrt{n_{11}}$. Отрезок на оси Y , отсекаемый вертикальной касательной соответствует СКП по отшествию $m_w = \sqrt{n_{22}}$.

На рисунке также показана средняя квадратическая погрешность (СКП) обсервации M , которая рассчитывается, как корень квадратный из следа ковариационной матрицы либо с помощью полуосей эллипса:

$$M = \sqrt{n_{11} + n_{22}} = \sqrt{m_x^2 + m_y^2} = \sqrt{a^2 + b^2}$$

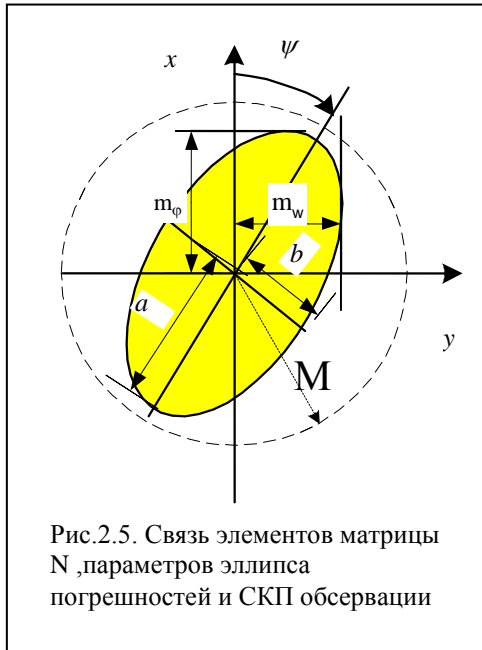


Рис.2.5. Связь элементов матрицы N параметров эллипса погрешностей и СКП обсервации

2.5 Апостериорная оценка точности рассчитанных координат

В априорной оценке использовалась информация о точности, полученная по результатам предыдущих измерений, а в апостериорной оценке участвуют текущие измерения, т.е. по которым была вычислена вероятнейшая точка.

Допустим, что ковариационная матрица погрешностей измерений D известна с точностью до постоянного множителя m^2 :

$$D = m^2 K, \quad D^{-1} = \frac{1}{m^2} K^{-1}, \quad K^{-1} = m^2 D^{-1},$$

где матрица K известна, а величина m^2 неизвестна.

Иными словами известны относительные, а не абсолютные значения матрицы D . С учетом этого рассмотрим систему нормальных уравнений:

$$A^T D^{-1} A \Delta X = A^T D^{-1} \Delta U$$

Подставив вместо D^{-1} выражение $\frac{K^{-1}}{m^2}$ получим:

$$\frac{1}{m^2} A^T K^{-1} A \Delta X = \frac{1}{m^2} A^T K^{-1} \Delta U$$

Величина m^2 (дисперсия наблюдения с единичным весом) сокращается и решение, в итоге, не зависит от абсолютной величины элементов ковариационной матрицы измерений D . Матрицу K^{-1} также называют "весовой" и обозначают через P , а m^2 - дисперсией наблюдения с единичным весом. Если m^2 не выносилась из D , то весовой будет просто D^{-1} .

Рассмотрим величину

$$M(V^T P V) = M(V^T m^2 D^{-1} V) = m^2 M(V^T D^{-1} V) \quad (2.33)$$

Она представляет собой обобщенную (взвешенную) остаточную сумму квадратов уклонений. Здесь M - операция взятия математического ожидания. Упрощенно ее можно рассматривать как отыскание среднего значения.

Рассмотрим выражение в последней скобке, то есть пока без операции взятия математического ожидания:

$$V^T D^{-1} V = V^T D^{-1} (\Delta U - A \Delta \hat{X}) = V^T D^{-1} \Delta U - V^T D^{-1} A \Delta \hat{X}$$

Последнее слагаемое равно 0. Это вытекает из условия (2.17) и видно из рисунка 2.6: векторы $V^T D^{-1}$ и $A \Delta \hat{X}$ ортогональны, а скалярное произведение таких векторов равно 0. Тогда $V^T D^{-1} V = V^T D^{-1} \Delta U$.

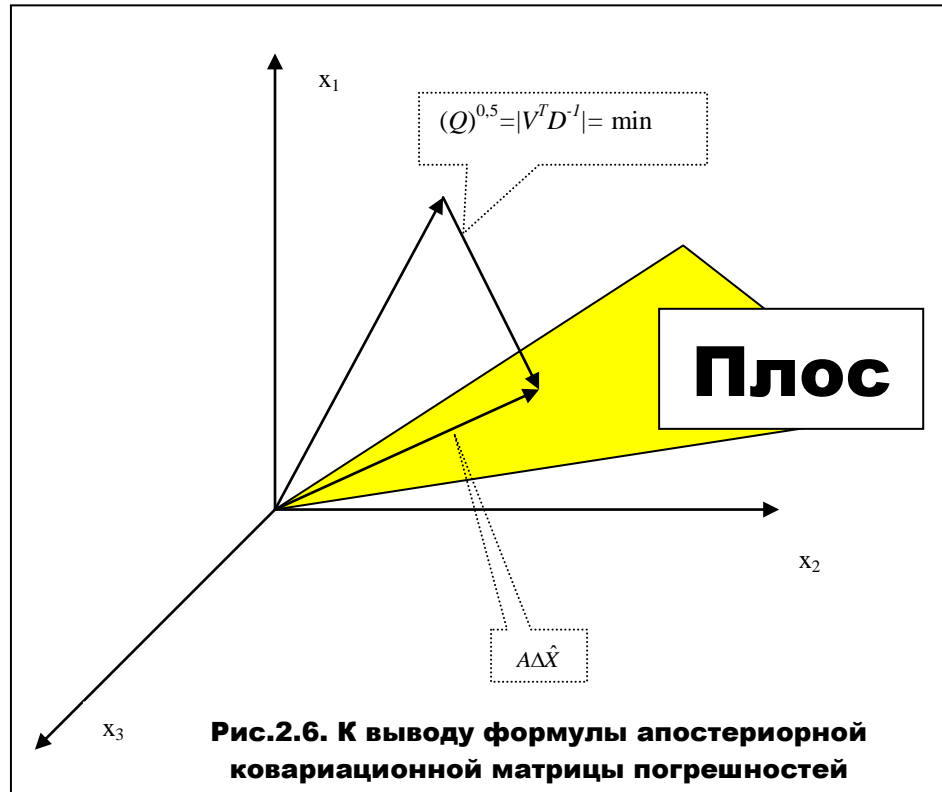


Рис.2.6. К выводу формулы апостериорной ковариационной матрицы погрешностей

Кроме этого:

$$V^T D^{-1} \Delta U = (\Delta U^T - \Delta \hat{X}^T A^T) D^{-1} \Delta U = \Delta U^T D^{-1} \Delta U - \Delta \hat{X}^T A^T D^{-1} \Delta U$$

Во втором слагаемом произведение $A^T D^{-1} \Delta U$ представляет собой правую часть системы нормальных уравнений (2.19), тогда вместо нее запишем левую $(A^T D^{-1} A) \Delta \hat{X}$, тогда окончательно получим:

$$V^T D^{-1} V = V^T D^{-1} \Delta U = \Delta U^T D^{-1} \Delta U - \Delta \hat{X}^T (A^T D^{-1} A) \Delta \hat{X} = \Delta U^T D^{-1} \Delta U - \Delta \hat{X}^T N^{-1} \Delta \hat{X} \quad (2.34)$$

По этой формуле можно посчитать значение квадратичного критерия (остаточную сумму квадратов невязок). Здесь ΔU - вектор, рассчитанный по исходным данным $U_o - U_c$ и первое слагаемое в правой части дает значение остаточной суммы в начальной (счислимой) точке, а второе слагаемое уменьшает это значение за счет смещения к оптимальной точке на величину $\Delta \hat{X}$.

С учетом взятия операции математического ожидания (2.33) справедливо следующее:

$$m^2 M(V^T D^{-1} V) = M(\Delta U^T D^{-1} \Delta U) - M(\Delta \hat{X}^T N^{-1} \Delta \hat{X}) \quad (2.35)$$

Распишем первое слагаемое:

$$\begin{aligned} M(\Delta U^T D^{-1} \Delta U) &= M[Tr(\Delta U^T D^{-1} \Delta U)] = M([Tr(\Delta U \Delta U^T D^{-1})]) = \\ &= Tr[M(\Delta U \Delta U^T D^{-1})] = Tr(DD^{-1}) = Tr(E) = n \end{aligned}$$

Правило $Tr(\Delta U^T \Delta U) = Tr(\Delta U \Delta U^T)$ легко проверяется простым перемножением матриц небольшой размерности.

Распишем второе слагаемое:

$$\begin{aligned} M(\Delta \hat{X}^T N^{-1} \Delta \hat{X}) &= M[Tr(\Delta \hat{X}^T N^{-1} \Delta \hat{X})] = M[Tr(\Delta \hat{X} \Delta \hat{X}^T N^{-1})] = \\ &= Tr[M(\Delta \hat{X} \Delta \hat{X}^T N^{-1})] = Tr(NN^{-1}) = Tr(E) = k \end{aligned}$$

С учетом (2.35) получим:

$$M(V^T P V) = m^2 (n - k)$$

Несмещенная оценка m^2 запишется выражением:

$$m^2 = \frac{V^T P V}{n - k}$$

Тогда апостериорную оценку ковариационной матрицы погрешности результатов получим следующим образом:

$$N' = (A^T D^{-1} A)^{-1} = (A^T \frac{1}{m^2} K^{-1} A)^{-1} = m^2 (A^T K^{-1} A)^{-1} = m^2 (A^T P A)^{-1} = \frac{V^T P V}{n - k} (A^T D^{-1} A)^{-1}$$

или апостериорная ковариационная матрица погрешностей координат рассчитывается через априорную матрицу так:

$$N' = \frac{V^T D^{-1} V}{n - k} N \quad (2.36)$$

Пример. Определить координаты места судна и поправку компаса по измерениям 4-х пеленгов. Расчитать элементы априорного и апостериорного эллипсов погрешностей координат, и средние квадратические погрешности обсервации.

Задачу решить на плоскости в прямоугольных координатах по информации представленной ниже, используя два последовательных приближения.

Окончательный ответ дать в географической системе координат.

Счислимые координаты: $x = 8,0$ (миль); $y = 4,4$ (миль)

Координаты ориентиров		Обсервованные пеленги ориентиров	СКП измерения пеленгов
x_{ai}	y_{ai}	Π^0	m^0
16,3	7,9	25,5	0,2
12,0	9,8	56,6	0,2
5,4	11,8	112,6	0,2
14,2	3,0	350,1	0,2

Решение:

Первая итерация:

1. Записываем навигационную функцию пеленга () с учетом поправки Z:

$$\Pi = \arctg \frac{x_a - x}{y_a - y} + Z$$

2. Рассчитываем производные на счислимые координаты $\frac{\partial \Pi}{\partial x}$, $\frac{\partial \Pi}{\partial y}$, $\frac{\partial \Pi}{\partial z}$, из которых составляем матрицу A.
3. По навигационной функции рассчитываем счислимые пеленги по счислимым координатам и координатам навигационных ориентиров, полагая поправку Z=0 на первой итерации
4. Вычисляем вектор свободных членов ΔU , а так же вектор $\Delta \hat{X}$ и вектор координат \hat{X}_o , и ковариационную матрицу погрешностей координат N.

Вычисления приведены ниже:

$$A = \begin{pmatrix} 0,0431353 & -0,102292 & 1 \\ 0,119575 & -0,088574 & 1 \\ 0,120286 & 0,0422627 & 1 \\ -0,0346535 & -0,153465 & 1 \end{pmatrix}$$

N₁

$$\Pi_{c1} = +0,399061, \Pi_{c2} = +0,933248, \Pi_{c3} = +1,908675, \Pi_{c4} = +6,061103$$

$$N = (A^T D^{-1} A)^{-1} = \begin{pmatrix} 0,00179264 & -0,00121763 & -0,000203249 \\ -0,00121763 & 0,00141187 & 0,000182218 \\ -0,000203249 & 0,000182218 & 2,94256e-005 \end{pmatrix}$$

$$\Delta U = \begin{pmatrix} \Pi_{o1} - \Pi_{c1} \\ \Pi_{o2} - \Pi_{c2} \\ \Pi_{o3} - \Pi_{c3} \\ \Pi_{o4} - \Pi_{c4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +0,045998 \\ +0,054609 \\ +0,056566 \\ +0,049294 \end{pmatrix}$$

$$\Delta \hat{X} = (A^T D^{-1} A)^{-1} A^T D^{-1} \Delta U = \begin{pmatrix} +0,028931 \\ +0,022326 \\ +0,051509 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +0,028931 \\ +0,022326 \\ +2,951268^0 \end{pmatrix}$$

$$\hat{X}_o = X_c + \Delta X = \begin{pmatrix} 8,0 \\ 4,4 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} +0,028931 \\ +0,022326 \\ +2,951268^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} +8,028931 \\ +4,022326 \\ +2,951268^0 \end{pmatrix}$$

Затем из априорной ковариационной матрицы N выбираем верхний левый блок N_I , который определяет точность координат x, y и по формулам (2.26)-(2.29), находим элементы априорного эллипса погрешностей обсервации и СКП M

Элементы априорного эллипса погрешностей обсервации из N' :

$$a=98,6 \text{ м}; b=35,6 \text{ м}; \psi=139,4^0; M=104,82 \text{ м}$$

Элементы апостериорного эллипса погрешностей обсервации из вернего левого блока матрицы (2.36):

$$a=149,3 \text{ м}; b=53,9 \text{ м}; \psi=139,4^0; M=149,30 \text{ м}$$

Вторая итерация:

1. Обсервованные координаты принимаем за счислимые, т.е. $X_c = \hat{X}_o$, и повторяем вычисления по формулам (2.20) и (2.26)-(2.29) с расчетом оценки точности координат.

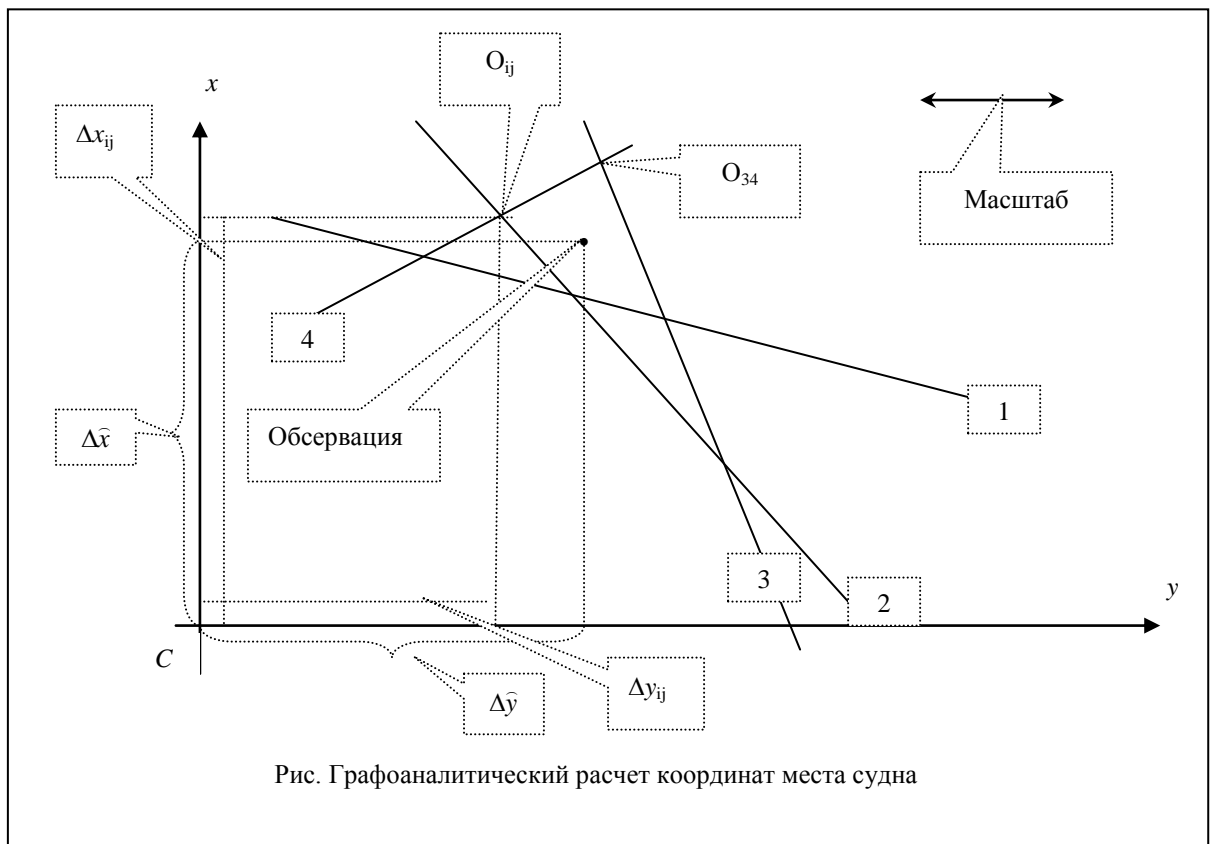
2. С учетом принятых обозначений, а именно $\Delta\hat{x} = \Delta\hat{\varphi}$, $\Delta\hat{y} = \Delta\hat{w}$, определяем географические координаты, при известных географических координатах счислимой точки $C(\varphi_c, \lambda_c)$:

$$\varphi_o = \varphi_c + \Delta\hat{\varphi}$$

$$\lambda_o = \lambda_c + \Delta\hat{w} \cos \varphi_m, \text{ где } \varphi_m = (\varphi_c + \varphi_o)/2 - \text{средняя широта.}$$

2.6 Графоаналитический расчет

1. На листе миллиметровой бумаги строим систему координат с началом в счислимой точке и выбираем масштаб для прокладки.



2. Производим прокладку линий положения, используя формулу $\Delta n_i = \frac{\Delta U_i}{g_i}$ и получаем фигуру погрешностей координат.
3. Определяем приращения координат каждой из вершин фигуры погрешностей $\Delta x_{ij}, \Delta y_{ij}$

4. Каждая точка пересечения двух линий положения O_{ij} имеет вес, который можно рассчитать по следующей формуле:

$$P_{ij} = \frac{1}{M_{ij}^2}, \text{ где } M_{ij} - \text{средняя квадратическая погрешность точки по двум линиям положения.}$$

5. Находим средневзвешенные значения приращений координат относительно счислимой точки:

$$\Delta \bar{x} = \frac{\sum P_{ij} \Delta x_{ij}}{\sum P_{ij}}, \quad \Delta \bar{y} = \frac{\sum P_{ij} \Delta y_{ij}}{\sum P_{ij}}$$

6. Находим наблюдаемые прямоугольные координаты, используя формулы (2.8), а так же географические координаты по формулам, приведенным во второй итерации.
7. Для сравнения ставим точку по первой итерации на диаграмму графоаналитического расчета.