Лекція №3.

Теорема Остроградського – Гауса для електростатичного поля.

1. Потік вектора. 2. Теорема Гауса для електростатичного поля. 3. Локальне формулювання теореми Остроградського-Гауса. 4. Рівняння безперервності.

Видатний російський математик та механік українського походження Михайло Васильович Остроградський (1801-1861, походив із козацько-старшинського роду Остроградських.) сформулював теорему для довільних векторних полів. Незалежно від нього також теорема була сформульована для електростатичного поля німецьким астрономом, математиком та фізиком Карлом Фрідріхом Гаусом (1777-1855). Ця теорема дозволяє спростити обчислення характеристик поля заряджених систем складної форми.

Михайло Васильович
Остроградський

Карл Фрідріх
Гаусс

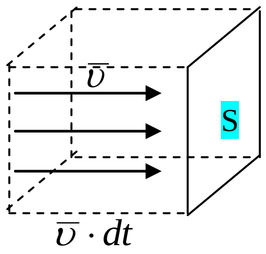
1. Потік вектора (ПВ).

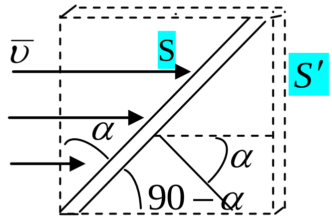
ПВ – це поняття одне з найважливіших в векторній алгебрі, наприклад: кажуть “потік вектора $\bar{\mathbf{A}}$” коли розглядають потік довільної векторної величини $\bar{\mathbf{A}}$ через довільну поверхню.

Оскільки **електричні та магнітні поля – векторн**і, то векторна алгебра широко використовується в математичному апараті електрики та магнетизму.

Вперше поняття ПВ було застосовано в гідродинаміці, тобто науці, що вивчає закони руху рідин. Почнемо і ми вивчення цього поняття з потоку рідини.

Виберемо серед потоку рідини малу площадку **S**, що буде перпендикулярною до вектора швидкості руху рідини $\bar{\upsilon}$.





$$S' = S \cdot \sin(90-\alpha) = S\cos\alpha$$

Знайдемо об’єм рідини, що протече через поверхню S за час dt при швидкості руху рідини υ:

$$dV = \upsilon\, S\, dt\,.$$

Коли площадка знаходиться під кутом α до потоку, то її ефективна площа зменшиться

$$S' = S \cdot \cos\alpha\,.$$

Тоді

$$dV = \upsilon \cdot S \cdot \cos\alpha \cdot dt\,.$$

За одиницю часу dt через S протече такий об’єм рідини dV/dt, який вміщується в паралепіпеді, з площею основи S та стороною υ*cos α:

$$\frac{dV}{dt} = \upsilon S \cos\alpha\,.$$

З векторної алгебри відомо, що скалярний добуток це: $(\bar{a} \cdot \bar{b}) = |a||b|\cos\alpha$.

Тому останню формулу запишемо в наступному вигляді:

$$\frac{dV}{dt} = (\bar{\upsilon} \cdot \bar{S})\,.$$

Що таке в останній формулі вектор $\bar{S}$?

Застосуємо термін “***вектор площадки”:***

$$\bar{S} = S \cdot \bar{n}\,.$$

Вектор площадки це такий вектор, модуль якого чисельно дорівнює площі вибраної площадки, а напрямок вектора $\bar{S}$ співпадає з напрямком нормалі до площадки $\bar{n}$.

При цьому $\bar{n}$ можна провести на дві сторони.

За позитивний напрямок вибирають той, що йде назовні із замкненої поверхні.

Сторона площадки, з якої виходить вектор $\bar{n}$ називається зовнішньою.

Коли поверхня, через яку треба обчислити потік, має складну форму, то її розбивають на елементарні ділянки dS. Тоді

$$\frac{dV}{dt} = \int \bar{\upsilon} \cdot dS .$$

Вираз $\bar{\upsilon} \cdot dS$ або $\int \bar{\upsilon} \cdot dS$ зустрічається в різноманітних галузях фізики. При цьому природа вектора $\bar{\upsilon}$ може бути самою різноманітною. Але вираз $\bar{\upsilon} \cdot dS$, або $\bar{A} \cdot dS$ в загальному випадку, є потік вектора $\bar{A}$ через площадку $d\bar{S}$.

$$\bar{\Phi}_{\upsilon} = \bar{\upsilon} \cdot \bar{S}$$

$$d\bar{\Phi}_{\upsilon} = \bar{\upsilon} \cdot d\bar{S}$$

$$\bar{\Phi}_{\upsilon} = \int \bar{\upsilon} \cdot d\bar{S}$$

$$\bar{\Phi}_{A} = \int \bar{A} \cdot d\bar{S} .$$

Для потоку вектора напруженості електростатичного поля:

$$\Phi_E = \int \bar{E} \cdot d\bar{S} ,$$

або у випадку замкненої поверхні:

$$\bar{\Phi}_E = \oint_s \bar{E} \cdot d\bar{S} = \oint_s E_n \cdot dS ,$$

де: E_n - проекція E на нормаль n до площадки S.

2. Теорема Гауса для електростатичного поля.

Дана теорема пов'язує потік вектора напруженості через замкнену поверхню з електричними зарядами, що знаходяться в об'ємі, обмеженому зазначеною поверхнею.

Отже, за визначенням, потік вектора напруженості електричного поля дорівнює числу ліній напруженості, що перетинають поверхню S.

Підрахуємо потік вектора $\vec{E}$ через довільну замкнуту поверхню S, що охоплює точковий заряд q (рис. 1). Оточимо заряд q сферою S_1.

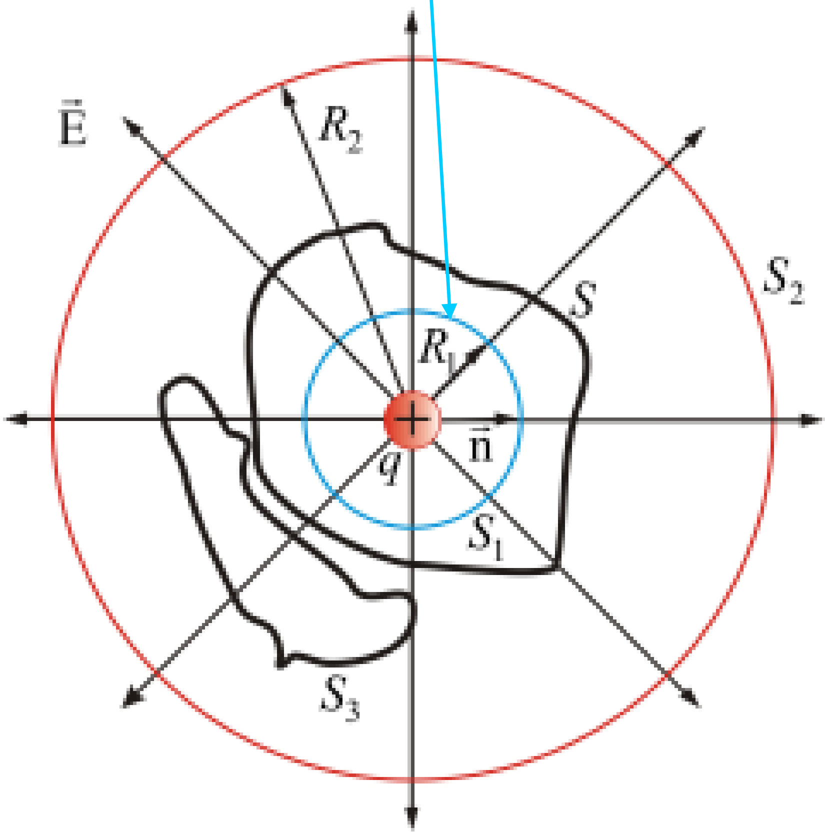


Рис. 1. До розрахунку потока вектора $\vec{E}$ через поверхні S, S_1, S_2 та S_3

У кожній точці поверхні S_1 проекція $\vec{E}$ на напрямок зовнішньої нормалі однакова і дорівнює:

$$E_n = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R_1^2}.$$

Тоді потік вектора напруженості електричного поля $\vec{\mathbf{E}}$ через S_1 дорівнюватиме:

$$\Phi_E = \oint_{S_1} E_n \mathrm{d}S = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_1^2} 4\pi R_1^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

Знайдемо потік вектора $\vec{\mathbf{E}}$ через сферу S_2, що має радіус R_2 (див. Рис. 1):

$$\Phi_E = \oint_{S_2} \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} \mathrm{d}S = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R_2^2} 4\pi R_2^2 = \frac{q}{\varepsilon_0}.$$

З неперервності ліній напруженості електричного поля $\vec{\mathbf{E}}$ виходить, що потік через *будь-яку довільну* поверхню S буде також дорівнювати цій же величині:

$$\Phi_E = \oint_S E_n \mathrm{d}S = \frac{q}{\varepsilon_0}$$ ***теорема Гаусса для одного заряда.***

Отриманий результат справедливий не тільки для одного заряду, а й для будь-якого числа довільно розташованих зарядів q_i, що знаходяться всередині об’єму, обмеженому поверхнею S.

Якщо в середині довільної замкненої поверхні S розташовані N точкових зарядів $q_1, q_2, \ldots q_n$, то результуючий потік Φ_E цієї системи зарядів можна обчислити з використанням принципу суперпозиції (для електростатичного поля):

$$\Phi_E = \oint_S \overline{E} \cdot d\overline{S} = \oint \sum_{i=1}^{N} \overline{E}_i d\overline{S} = \sum_{i=1}^{N} (\oint_S \overline{E}_i d\overline{S}) = \frac{1}{\varepsilon_0} \sum_{i=1}^{N} q_i \,.$$ ***теорема Гаусса для системи зарядів***

Потік вектора напруженості електричного поля через замкнену поверхню у вакуумі дорівнює алгебраїчній сумі всіх зарядів, розташованих усередині поверхні, поділеній на ε_0.

Необхідно нагадати, що при обчисленні потоку через замкнуту поверхню за позитивний напрямок вектора нормалі $\overline{n}$ слід вважати напрямок, спрямованим назовні. Тоді лінії напруженості, що виходять з об’єму, обмеженого даною поверхнею, створюють позитивний потік; лінії же, що входять в об’єм – негативний потік.

Якщо між розглядуваними сферами розташувати ще одну поверхню S_3, не охоплює заряд, то, як видно з Рис. 1, кожна лінія напруженості $\vec{E}$ буде двічі перетинати цю поверхню: один раз з негативного напрямку - увійде в поверхню S_3, другий раз - з позитивного напрямку - вийде з поверхні S_3. У результаті алгебраїчна сума ліній напруженості, що проходить через замкнуту поверхню S_3 буде дорівнює нулю, тобто повний потік, що проходить через S_3, дорівнює нулю.

Як це не дивно, але отриманий результат можна використовувати і для довільної замкненої поверхні S (пунктирна лінія), що оточує заряд q.

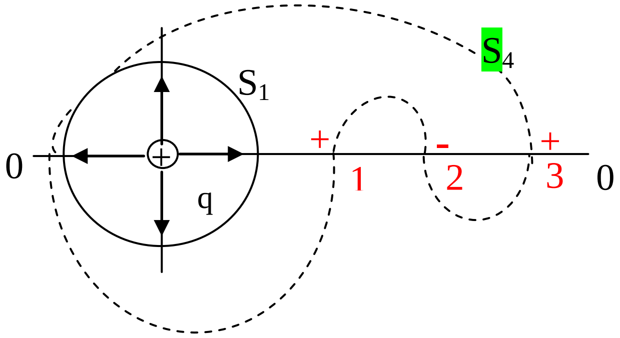


Рис.2.

Розглянемо лінію напруженості електричного поля $\vec{E}$, що йде по напрямку 0 – 0. В точці 1 лінія напруженості ***виходить*** з поверхні, тому потік вектора $\vec{E}$ має позитивне значення, бо вектор площадки тут позитивний. В точці 2 лінія напруженості ***входить*** в об’єм, тут вектор площадки негативний і, відповідно, потік вектора $\vec{E}$ - від’ємний . В точці 3 вектор лінії напруженості ***виходить*** з поверхні, тому знову потік вектора напруженості набуває позитивного знаку. Сумарний потік буде (+) + (–) +(+) = (+).

Тобто, три (непарні) перетини однієї і тієї замкнутої поверхні довільної форми еквівалентні одному перетину її.

В зв’язку з цим:

$$\overline{\Phi}_E = \oint_S E_n dS = \oint_S \overline{E} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad (1)$$

Якщо знехтуємо дискретною природою електричного заряду і будемо вважати його неперервним і розподіленим по об'єму з густиною $\rho = {dq}/{dV}$, то повний заряд в середині об'єму, обмеженому поверхнею S, можна обчислити, як

$$\sum_{i=1}^{N} q_i = \int_V \rho \cdot dV ,$$

що надає теоремі Гауса таку форму

$$\Phi = \oint_S \overline{E} \cdot d\overline{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \cdot dV . \tag{2}$$

Видно, що потік Ф зовсім не залежить від конкретного розділу заряду всередині S, а лише від його повної величини.

Формула (2) виконується для вакууму.

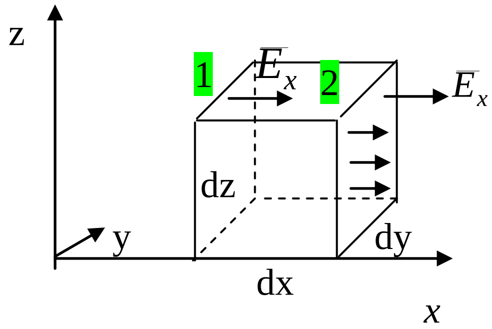
Необхідно звернути увагу на таку обставину: у той час як саме поле $\vec{E}$ залежить від конфігурації всіх зарядів, потік Φ_E крізь довільну замкнуту поверхню визначається тільки алгебраїчною сумою зарядів всередині поверхні S. Це означає, що ***якщо пересунути заряди***, то $\vec{E}$ ***зміниться усюди***, в тому числі і на поверхні S, але потік вектора напруженості поля $\overline{\Phi}_E$ через цю поверхню ***не зміниться***.

3. Локальне формулювання теореми Остроградського – Гауса.

Локальна, або диференційна форма теореми Остроградського – Гауса застосовується, коли заряд можна вважати безперервним і рівномірно розподіленим у просторі з густиною $\rho(x, y, z)$.

Розглянемо уточнення формули (2) $\Phi = \oint_S \overline{E} \cdot d\overline{S} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_V \rho \cdot dV$ з минулого параграфу.

Виділимо у просторі куб із сторонами *dx, dy, dz* в межах якого густина заряду має наступний розподіл: $\rho = \rho(x, y, z)$, тобто .



Виділимо грані 1 і 2 цього кубу. Нормалі до них направлені вдовж *x*. Обчислимо потоки вектора напруженості через ці грані з урахуванням того, що напруженість електричного поля $\vec{E}$ залежить від координати, тобто є функцією від неї: $\vec{E} = \vec{E}(x)$. При цьому зміна $\vec{E}$ вздовж осі *x* відбувається зі швидкістю $d\vec{E}_x/dx$:

$$\Phi_1 = -E_x(x)dS = -E_x(x)dydz$$

$$\Phi_2 = E(x+dx)dS = \left[E_x(x) + \frac{dE_x}{dx}dx \right] dydz$$

Результуючий потік через дві грані буде

$$\Phi_x = \Phi_1 + \Phi_2 = \frac{dE_x}{dx}dxdydz = \frac{dE_x}{dx}dV, \tag{3}$$

де $dV = dxdydz$ - елементарний об’єм, у якому зосереджено заряд $Q = \rho dV$.

Формули аналогічні (3) виведемо для напрямків y і z

$$\Phi_y = \frac{dE_y}{dy}dV$$

$$\Phi_z = \frac{dE_z}{dz}dV \tag{4}$$

Результуючий потік вектора E:

$$\varPhi = \left(\frac{dE_x}{dx} + \frac{dE_x}{dy} + \frac{dE_z}{dz} \right) dV \tag{5}$$

Раніше ми встановили (див. формулу (1)): $\Phi_E = \oint_S E_n dS = \oint_S \bar{E} \cdot d\vec{S} = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$.

Тому:

$$\Phi = \Phi_x + \Phi_y + \Phi_z = \left(\frac{d\mathrm{E}_x}{dx} + \frac{d\mathrm{E}_y}{dy} + \frac{d\mathrm{E}_z}{dz}\right) dV = \frac{q}{\varepsilon_0} = \rho \frac{dV}{\varepsilon_0}. \tag{6}$$

Права частина написана згідно з теоремою Остроградського – Гауса:

сумарний потік вектора напруженості поля дорівнює заряду в об'ємі.

Скоротимо вираз в формулі (6) на d*V:*

$$\frac{d\mathrm{E}_x}{dx} + \frac{d\mathrm{E}_y}{dy} + \frac{d\mathrm{E}_z}{dz} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}. \tag{7}$$

Можна скоротити запис т. Остроградського-Гауса і надати її в диференційній формі, якщо застосувати диференційний оператор $\overline{\nabla}$ (набла)

$$\nabla = \frac{d}{dx}\bar{i} + \frac{d}{dy}y + \frac{d}{dz}\bar{k}.$$

Скалярний добуток векторів $\overline{\nabla}$ і $\overline{\mathrm{E}}$ буде

$$\overline{\nabla} \cdot \overline{\mathrm{E}} = \frac{d\mathrm{E}_x}{dx} + \frac{d\mathrm{E}_y}{dy} + \frac{d\mathrm{E}_z}{dz} \tag{8}$$

Тоді з урахуванням формул (7) та (8) формула Остроградського-Гауса (1) матиме наступний вигляд:

$$\overline{\nabla} \cdot \overline{\mathrm{E}} = \frac{\rho}{\varepsilon_0},$$

Можна скористатись поняттям дивергенції (розтікання) довільного вектора $\vec{A}$:

$$div\vec{A} = \frac{dA_x}{dx} + \frac{dA_y}{dy} + \frac{dA_z}{dz}.$$

$$div\mathrm{E} = \rho/\varepsilon_0, \tag{9}$$

$div\,\overline{\mathrm{E}}$ – розтікання вектора $\overline{\mathrm{E}}$, що характеризує інтенсивність витоку вектора напруженості з околиць точки, в якій div обчислюється.

Дивергенція – математичне поняття, що застосовується для визначення процесів народження (генерації), знищення (рекомбінації) і збереження фізичних величин.

Згадаємо вираз для потоку вектора $\overline{E}$ (формула (1)):

$$\vec{\Phi}_{\mathrm{E}} = \oint_S \vec{\mathrm{E}} \cdot d\vec{S} = \frac{q}{\varepsilon_0}$$

Скористаємось виразом для визначення заряду q – джерела поля – при його рівномірному розподілі в певному об’ємі V:

$$q = \int_V \rho \cdot dV \qquad (10)$$

З формули (9): $div\,\vec{\mathrm{E}} = \rho/\varepsilon_0$ знайдемо:

$$\rho = \varepsilon_0\, div\, E \qquad (11)$$

Тоді, підставивши (11) в (10) отримаємо для потоку вектора напруженості електричного поля $\overline{\Phi}_{\mathrm{E}}$

$$\overline{\Phi}_{\mathrm{E}} = \oint_S \vec{\mathrm{E}} \cdot d\vec{S} = \int_V div\vec{E}\, dV\,, \qquad (12)$$

4. Рівняння безперервності.

Нехай S - замкнута поверхня, а вектори площадки $d\overline{S}$ усюди проведені за зовнішніми нормалями $\overline{n}$. Тоді потік вектора $\overline{j}$ крізь цю поверхню S дорівнює електричному струму I, що йде назовні з області, обмежений замкнутою поверхнею S. Отже, згідно закону збереження електричного заряду, сумарний електричний заряд q, що охоплюється поверхнею S, змінюється за час dt на $dq = - I\, dt$, звідки:

$$\frac{dq}{dt} = - I$$

Струм I в правій частині рівняння замінимо потоком вектора $\overline{j}$ крізь поверхню S. Тоді Закон збереження заряду в інтегральній формі можна записати у вигляді:

$$\frac{dq}{dt} = -\oint \vec{j}\, d\vec{S}$$

Якщо розподіл заряду в певному об'ємі V залежить від координати наступним чином: $\rho = \rho(x, y, z)$, то $q = \int \rho\, dV$ і закон збереження заряду можна представити у вигляді:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = -\oint_S \bar{j} d\bar{S}\,, \tag{13}$$

тобто зміна заряду в будь-якому об'ємі V може відбутись лише при втіканні, або витіканні струму густиною ĵ через замкнену поверхню S.

Змінимо ліву частину (13) користуючись тим, що диференціал може бути занесений під інтеграл:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho \cdot dV = \int_V \frac{d\rho}{dt} dV\,, \tag{14}$$

оскільки об'єм V з вміщеним у нього зарядом і площа S поверхні, що охоплює розглядуваний об'єм, не змінюються з часом, тобто: $V \neq V(\mathrm{t})$ і $S \neq S(t)$, то диференціал інтегралу дорівнює інтегралу від диференціалу.

Праву частина формули (13), $\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = -\oint_S \bar{j} d\bar{S}$ що відображає закон збереження заряду користуючись виразом теореми О.-Г для напруженості поля $\overline{\mathrm{E}}$ (див. формулу (12) $\Phi_{\mathrm{E}} = \oint_S \vec{\mathrm{E}} \cdot d\vec{S} = \int_V div\vec{E}\, dV$) можемо виразити через *div j*, тобто інтегрування вектора $\bar{j}$ по поверхні S замінимо інтегруванням $div\,\bar{j}$ по об'єму *V:*

$$\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = \int_V div\vec{j} \cdot dV. \tag{15}$$

Підставимо (14) і (15) в (13) і отримаємо Закон збереження заряду у вигляді:

$$\int_V \frac{d\rho}{dt} dV = -\int_V div\bar{j} \cdot dV\,, \tag{16}$$

або, якщо перенести праву частину рівняння вліво:

$$\int_V \left(\frac{d\rho}{dt} + div\bar{j}\right) dV = 0\,.$$

$$\int = 0, \text{ коли } \frac{d\rho}{dt} + div\bar{j} = 0,$$

де (нагадаємо):

$$div\bar{j} = \frac{dj_x}{dx} + \frac{dj_y}{dy} + \frac{dj_z}{dz}.$$

Таким чином, рівняння безперервності має вигляд:

$$\frac{d\rho}{dt} + divj = 0 \tag{17}$$

Інтерпретація рівняння безперервності.

Густина струму $\bar{J}$ - це рух зарядів. Рівняння безперервності свідчить, що якщо заряд витікає з об'єму (тобто дивергенція густини струму позитивна), тоді кількість заряду усередині об'єму зменшується (всередині об’єму наявне джерело заряду). У цьому випадку швидкість зміни густини заряду $\frac{d\rho}{dt}$ ***негативна***.

І навпаки, якщо заряд втікає в об’єм, то дивергенція густини струму буде негативною. Відповідно, всередині об’єму кількість заряду збільшуватиметься (всередині об’єму є стік зарядів). Тоді швидкість зміни густини заряду $\frac{d\rho}{dt}$ буде ***позитивною***.