На правах рукописи

Чиж Екатерина Александровна

УДК 517.95

РЕЗОНАНСНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ И ВАРИАЦИОННЫЕ НЕРАВЕНСТВА ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА С РАЗРЫВНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ БЕЗ УСЛОВИЯ ЛАНДЕСМАНА–ЛАЗЕРА

01.01.02 – дифференциальные уравнения

АВТОРЕФЕРАТ
диссертации на соискание ученой степени кандидата физико-математических наук

ЕКАТЕРИНБУРГ – 2005

Работа выполнена в Челябинском государственном университете на кафедре вычислительной математики

Научный руководитель	доктор физико-математических наук, профессор В.Н. Павленко
Официальные оппоненты	доктор физико-математических наук, доцент А.Р. Данилин
	доктор физико-математических наук, профессор М.М. Кипнис
Ведущая организация	Южно-Уральский государственный университет

Защита состоится "...."............... 2005 года в ... ч. ... мин. на заседании диссертационного совета К 212.286.01 по присуждению ученой степени кандидата физико-математических наук при Уральском государственном университете им. А.М. Горького по адресу:

620083, Екатеринбург, просп. Ленина, 51, комн. 248.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке Уральского государственного университета им. А.М. Горького.

Автореферат разослан "...."................... 2005г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических
наук, профессор В.Г. Пименов

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Объект исследования. Диссертация посвящена изучению резонансных уравнений и вариационных неравенств эллиптического типа с разрывными нелинейностями.

Пусть Ω – ограниченная область в $\mathbb{R}^m$ с границей $\partial\Omega$ класса $\mathbf{C}^{2,\mu}$, $0 < \mu \leq 1$,

$$Au(x) \equiv -\sum_{i,j=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big) + a_0(x)u(x) \tag{0.1}$$

– равномерно эллиптический дифференциальный оператор на $\overline{\Omega}$, с коэффициентами $a_{ij} \in \mathbf{C}^{1,\mu}(\overline{\Omega})$, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ на $\overline{\Omega}$ $(1 \leq i,j \leq m)$, $a_0 \in \mathbf{C}^{0,\mu}(\overline{\Omega})$, $a_0(x) \geq 0$ на $\overline{\Omega}$. Всюду в диссертации λ_1– наименьшее собственное значение оператора A с граничным условием $u|_{\partial\Omega} = 0$.

Основные результаты диссертации относятся к проблеме существования сильных и полуправильных решений следующих резонансных задач:

1. *Задача Дирихле*

$$Au(x) - f(x,u) = h(x),\ x \in \Omega \tag{0.2}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{0.3}$$

где $h \in \mathbf{L}^q(\Omega)$, $q > m$, нелинейность f имеет вид:
$f(x,\xi) = \lambda_1\xi - g(x,\xi)\ \ \forall\, x \in \Omega,\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}$. Функция g удовлетворяет следующим ограничениям:

(g1) $g\ :\ \Omega\ \times\ \mathbb{R}\ \rightarrow\ \mathbb{R}$ борелева $(\mathrm{mod}\ 0)$[1], т.е. существует борелева функция $\widetilde{g} : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, которая отличается от g лишь на подмножестве $l \subset \Omega \times \mathbb{R}$, проекция которого на Ω имеет меру нуль;

(g2) для почти всех $x \in \Omega$ функция $g(x,\cdot)$ может иметь на $\mathbb{R}$ разрывы только первого рода, $g(x,\xi) \in [g_-(x,\xi), g_+(x,\xi)]\ \forall \xi \in \mathbb{R}$, где

$$g_-(x,\xi) = \liminf_{\eta\to\xi} g(x,\eta),\ \ g_+(x,\xi) = \limsup_{\eta\to\xi} g(x,\eta);$$

(g3) существуют константа $C_1 > 0$ и функция $C_2 \in \mathbf{L}^q(\Omega)$ $(q > m)$ такие, что $|g(x,\xi)| \leq C_1|\xi| + C_2(x)\ \forall\, \xi \in \mathbb{R}$ и п. в. $x \in \Omega$.

Сильным решением задачи (0.2)–(0.3) называется функция
$u \in \mathbf{W}_q^2(\Omega) \cap \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_q^1(\Omega)$, удовлетворяющая для почти всех $x \in \Omega$ уравнению (0.2). Сильное решение u задачи (0.2)–(0.3) называют *полуправильным*, если для почти всех $x \in \Omega$ значения $u(x)$ является точкой непрерывности сечения $f(x,\cdot)$.

2. *Задача о вариационном неравенстве.* Пусть множество K задается следующим образом:

$$K = \{v \in \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^1(\Omega) \mid v(x) \geq \psi(x) \text{ почти всюду на } \Omega\},$$

где $\psi \in \mathbf{C}^2(\overline{\Omega})$, $\psi|_{\partial\Omega} \leq 0$. Требуется найти функцию $u \in K$ такую, что при любом $v \in K$

$$\sum_{i,j=1}^{m} \int_\Omega a_{ij}(x)u_{x_i}(v-u)_{x_j}dx + \int_\Omega (a_0(x)-\lambda_1)u(x)(v-u)(x)dx +$$

$$+\int_\Omega p(x,u)(v-u)(x)dx \geq 0, \tag{0.4}$$

[1] Красносельский М.А., Покровский А.В. Системы с гистерезисом – М.: Наука, 1983.– 272с.

где $a_{ij}(x)$ $(1 \le i, j \le m)$ и $a_0(x)$ – коэффициенты равномерно эллиптического дифференциального оператора A, задаваемого равенством (0.1); нелинейность $p(x,\xi)$ удовлетворяет следующим условиям:

(p1) $p : D \to \mathbb{R}$ – борелева (mod 0), где $D = \{(x,\xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid \xi \ge \psi(x)\}$;

(p2) для почти всех $x \in \Omega$ функция $p(x,\xi)$ может иметь на $[\psi(x), +\infty)$ разрывы только первого рода, непрерывна при $\xi = \psi(x)$ и

$$p(x,\xi) \in [p_-(x,\xi), p_+(x,\xi)] \quad \forall \xi \in [\psi(x), +\infty),$$

где $p_-(x,\xi) = \liminf\limits_{\eta \to \xi} p(x,\eta), \quad p_+(x,\xi) = \limsup\limits_{\eta \to \xi} p(x,\eta)$;

(p3) $\exists\, C \in \mathbf{L}^q(\Omega)$ $(q > m)$ такая, что $|p(x,\xi)| \le C(x)$ для п. в. $x \in \Omega$ и $\forall\, \xi \in [\psi(x), +\infty)$.

Функция $u \in K$, удовлетворяющая (0.4) при любом $v \in K$ называется *сильным решением* (0.4).

Актуальность темы. В последние годы наблюдается большой интерес к исследованию краевых задач с разрывными нелинейностями. Это продиктовано потребностями гидродинамики, теплофизики и других наук, где появился ряд прикладных задач, математические модели которых содержат разрывные нелинейности, с одной стороны, и внутренними потребностями развития теории нелинейных уравнений в частных производных с другой. Необходимость разработки теории краевых задач с разрывными по фазовой переменной нелинейностями была отмечена еще в 1967 г. в совместной монографии[2] О.А. Ладыженской, В.А. Солонникова и Н.Н. Уральцевой. Интенсивное изучение таких задач началось в 70-ые годы прошлого столетия. Важные результаты о разрешимости краевых задач для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями были получены в работах М.А. Красносельского и А.В. Покровского, K.-C. Chang, C.A. Stuart и J.F. Toland, В.Н. Павленко и других авторов, при этом исследовался так называемый *нерезонансный случай*, когда рассматриваемая задача (0.2)–(0.3) имеет решение при любой правой части $h \in \mathbf{L}^q(\Omega)$. В 70-ые же годы появились первые работы, посвященные изучению задачи (0.2)–(0.3) с непрерывной по ξ нелинейностью в *резонансном* случае. При этом под резонансом понималась ситуация, когда существует предел $\lim\limits_{|\xi| \to \infty} f(x,\xi)/\xi$, который почти всюду на Ω совпадает с одним из собственных значений λ_k оператора A с граничным условием (0.3).

Систематическое исследование резонансных краевых задач эллиптического типа началось с основополагающей работы[3] Е. Ландесмана и А. Лазера в 1970 г. В этой работе для разрешимости задачи (0.2)–(0.3) на функции f и h впервые было наложено ограничение, которое впоследствии стали называть условием Ландесмана–Лазера. В дальнейшем появилось большое число статей о существовании решений резонансных эллиптических краевых задач, в которых авторы накладывали на нелинейность и правую часть уравнения неравенства типа Ландесмана–Лазера или условия их обобщающие. Укажем, например, на работы P. Rabinowitz, A. Ambrosetti, G. Mancini, H. Berestycki и D.G. de Figueiredo для уравнений с непрерывными или гладкими нелинейностями, и на работы P.J. McKenna, N. Basile, M. Mininni, I. Massabo, K.–C. Chang, В.Н. Павленко и В.В. Винокура для уравнений с разрывными нелинейностями. Сформулируем условия типа Ландесмана–Лазера, в предположении, что нелинейность f в уравнении (0.2) задается равенством: $f(x,\xi) = \lambda_1 \xi - g(x,\xi)$, где функция g удовлетворяет условиям **(g1)**–**(g3)** и существуют

$$g^+(x) = \lim_{\xi \to +\infty} g(x,\xi), \quad g^-(x) = \lim_{\xi \to -\infty} g(x,\xi).$$

[2]Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа – М.: Наука, 1967. – 736с.

[3]Landesman E., Lazer A. Nonlinear perturbations of linear elliptic boundary value problems at resonance // J.Math. and Mech. – 1970. – V.19, N3. – P.609-623.

В этом случае условия типа Ландесмана–Лазера имеют вид: функции g и h удовлетворяют либо неравенству

$$\int_\Omega g^+(x)\varphi(x)dx < \int_\Omega h(x)\varphi(x)dx < \int_\Omega g^-(x)\varphi(x)dx, \tag{0.5}$$

либо неравенству

$$\int_\Omega g^-(x)\varphi(x)dx < \int_\Omega h(x)\varphi(x)dx < \int_\Omega g^+(x)\varphi(x)dx \tag{0.6}$$

где φ – произвольная положительная собственная функция, соответствующая λ_1.

Изучению некоэрцитивных вариационных неравенств с непрерывными и многозначными нелинейностями также посвящено значительное число работ. Укажем на статью S. Adly, D. Goeleven и M. Thera[4], где приводится достаточно полная библиография по этой тематике. В этой же работе получены теоремы существования для некоэрцитивных вариационных неравенств в операторном виде, которые затем применяются для исследования разрешимости эллиптических уравнений и вариационных неравенств с непрерывными нелинейностями в резонансном случае (устанавливаются результаты типа Ландесмана–Лазера).

Значительный интерес представляют резонансные краевые задачи и вариационные неравенства эллиптического типа, для которых не выполняются ни условия Ландесмана–Лазера, ни их известные обобщения. Исследованию задачи (0.2)–(0.3) в этом случае посвящены, например, работы D. G. de Figueiredo и W. M. Ni[5], R. Iannacci, M.N. Nkashama и J.R. Ward[6] , J.-P. Gossez и P. Omari[7] и других авторов. В перечисленных работах относительно нелинейности $f(x,\xi)$ в задаче (0.2)–(0.3) предполагается, что $f(x,\xi) = \lambda_1\xi - g(x,\xi)$, где g – каратеодориева функция (т.е. $g(x,\xi)$ измерима на Ω при любом фиксированном $\xi \in \mathbb{R}$ и непрерывна по ξ при почти всех $x \in \Omega$), удовлетворяющая условию **(g3)**. Условия Ландесмана–Лазера заменяются в них следующими ограничениями:

1. либо

$$g(x,\xi)\cdot\xi \le 0 \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R} \text{ и п.в. } x \in \Omega, \tag{0.7}$$

либо

$$g(x,\xi)\cdot\xi \ge 0 \quad \forall\, \xi \in \mathbb{R} \text{ и п.в. } x \in \Omega; \tag{0.8}$$

2. функция h удовлетворяет "условию ортогональности":

$$\int_\Omega h\varphi dx = 0, \tag{0.9}$$

для произвольной собственной функции $\varphi(x)$ дифференциального оператора A с граничным условием (0.3), соответствующей λ_1. Проблема же существования сильных и полуправильных решений резонансной задачи (0.2)–(0.3) и вариационного неравенства (0.4) в ситуации, когда условия типа Ландесмана–Лазера и их обобщения не выполняются, а нелинейность разрывна по фазовой переменной мало изучена. В связи с этим получение новых условий разрешимости таких задач является актуальным.

Цель работы. Получение новых теорем существования для резонансных краевых задач и вариационных неравенств эллиптического типа с разрывными нелинейностями в ситуации, когда не выполняются ни условия Ландесмана–Лазера, ни их известные обобщения.

[4] Adly S., Goeleven D. and Thera M. Recession mappings and noncoercive variational inequalities // Nonlinear Anal.–1996.–V. 26, N9.–P.1573–1603.

[5] D.G. de Figueiredo, W.N. Ni. Perturbations of second order linear elliptic problems by nonlinearities without Landesman-Lazer condition // Nonlinear Anal. TMA –1979–V.3.–P. 629-634.

[6] Iannacci R., Nkashama M.N., Ward J.R. Nonlinear second order elliptic partial differential equations at resonance // Trans. Am. Math. Soc.–1989–v.311,N2–P.711–726.

[7] Gossez J.-P., Omari P. Non-ordered lower and upper solutions in semilinear elliptic problems // Comm. P.D.E. - 1994. – v.19, N 7-8. – P. 1163-1184.

Методы исследования. В диссертации к рассматриваемому классу задач применяется теория топологической степени для многозначных компактных векторных полей и вариационный метод; используются методы и результаты теории уравнений с частными производными, теории функций и нелинейного функционального анализа.

Научная новизна. В работе получены новые теоремы существования сильных и полуправильных решений задачи (0.2)–(0.3) и сильных решений вариационного неравенства (0.4) с разрывными нелинейностями в резонансном случае.

По сравнению с близкими работами В.Н. Павленко и В.В. Винокура[8,9] для резонансной задачи (0.2)–(0.3) с разрывной нелинейностью в диссертации не предполагается выполнение неравенств Ландесмана–Лазера и условий, обобщающих их. Кроме того, полученные в диссертации теоремы усиливают указанные результаты D. G. de Figueiredo и W. M. Ni, R. Iannacci, M.N. Nkashama и J.R. Ward, J.-P. Gossez и P. Omari в случае, когда неравенства Ландесмана–Лазера и их обобщения не выполняются, по трем направлениям :

1. непрерывность нелинейности g по фазовой переменной не предполагается;
2. не требуется выполнения "условия ортогональности"(0.9);
3. нелинейность $g(x,\xi)$ не обязана менять знак при переходе через точку $\xi = 0$ при п.в. $x \in \Omega$, как это требуется в условиях (0.7) и (0.8).

Таким образом, даже для случая непрерывной по ξ нелинейности доказанные в диссертации теоремы являются новыми.

Для вариационного неравенства (0.4) в резонансном случае по сравнению с работами других авторов не предполагается непрерывность нелинейности по фазовой переменной, а также выполнения неравенств типа Ландесмана–Лазера.

Практическая значимость. Основные результаты диссертационной работы имеют теоретическое значение. Полученные результаты могут быть применены для исследования известных и новых классов эллиптических резонансных краевых задач с разрывными нелинейностями.

Апробация работы.

Основные результаты докладывались и обсуждались на XXII Конференции молодых ученых механико-математического факультета
МГУ им. М.В. Ломоносова в Москве (2000 г.), на летних научных школах им. С.Б. Стечкина в Миассе (2000, 2001, 2003 и 2004 гг.), на VII конференции, посвященной памяти академика А.Н. Тихонова в связи с 95-летием со дня рождения в Москве (2001 г.), на XXIV Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова в Москве (2001 г.), на Всероссийских научных конференциях в Екатеринбурге(2001 г. и 2004 г.), на Международной конференции "Nonlinear partial differential equations"в Алуште (2003 г.), на XII Саратовской зимней школе (2004 г.), на научных семинарах кафедры вычислительной математики математического факультета Челябинского государственного университета.

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в работах [1]–[14], список которых приводится в конце автореферата. В совместных работах научному руководителю В.Н. Павленко принадлежат постановки задач, диссертанту – доказательства основных результатов.

Структура и объем работы. Диссертация состоит из введения, трех глав и списка литературы. Работа содержит 118 страниц, включая библиографический список из 88 наименований.

СОДЕРЖАНИЕ РАБОТЫ

Во введении приводится постановка задачи, обоснование ее актуальности, сделан краткий обзор результатов, полученных другими авторами в данной области. Излагаются основные результаты диссертации и приводится сравнительный анализ их новизны.

[8] Павленко В.Н., Винокур В.В. Резонансные краевые задачи для уравнений эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Известия вузов. Математика. – 2001. – N 5. – С. 43-58.

[9] Павленко В.Н., Винокур В.В. Теоремы существования для уравнений с некоэрцитивными разрывными операторами // Укр. матем. журн. – 2002. – т. 54. – N 3. – С. 349-363.

В первой главе приводятся необходимые сведения из теории топологической степени для многозначных компактных векторных полей, о вариационном методе для уравнений с разрывными операторами, напоминаются понятие секвенциального замыкания для локально ограниченного оператора и определения функциональных пространств, встречающихся в работе.

Вторая глава содержит шесть параграфов.

В первом параграфе приводятся вспомогательные леммы, в том числе, о свойствах решений задачи

$$Au(x) - \lambda_1 u(x) + p_+(x)u^+(x) - p_-(x)u^-(x) = 0,\ x \in \Omega$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0,$$

где $p_\pm$– функции из $\mathbf{L}^q(\Omega)$, удовлетворяющие определенным ограничениям на рост, а $u^+(x) = max\{u(x), 0\}$, $u^-(x) = max\{-u(x), 0\}$. Данные леммы используются затем в пятом параграфе этой главы при доказательстве основных результатов.

Во втором параграфе приводится постановка эллиптической краевой задачи (0.2)–(0.3) с разрывной нелинейностью, вводятся основные определения и обозначения.

Определение. Говорят, что нелинейность $g : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ в уравнении (0.2) удовлетворяет сильному **(A)**–*условию* (сильному **(A1)**–*условию*), если существует не более чем счетное семейство поверхностей $\{S_i,\ i \in I\}$, $S_i = \{(x, \xi) \in \Omega \times \mathbb{R} \mid \xi = \psi_i(x)\}$, $\psi_i \in \mathbf{W}^2_{1,loc}(\Omega)$ таких, что для почти всех $x \in \Omega$ неравенство $g_+(x, \xi) \neq g_-(x, \xi)$ влечет существование $i \in I$, для которого точка $(x, \xi) \in S_i$ и

$$\big(L\psi_i(x) + g_-(x, \psi_i(x)) - h(x)\big)\big(L\psi_i(x) + g_+(x, \psi_i(x)) - h(x)\big) > 0$$

$$\Big(\text{либо } \big(L\psi_i(x) + g_-(x, \psi_i(x)) - h(x)\big)\big(L\psi_i(x) + g_+(x, \psi_i(x)) - h(x)\big) > 0,$$
$$\text{либо } L\psi_i(x) + g(x, \psi_i(x)) = h(x) \text{ соответственно } \Big).$$

Здесь $Lu = Au - \lambda_1 u$, $g_-(x, \xi) = \liminf\limits_{\eta \to \xi} g(x, \eta)$, $g_+(x, \xi) = \limsup\limits_{\eta \to \xi} g(x, \eta)$.

Обозначим $\Omega_1 = \Omega_1(r_1) = \{x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) < r_1\}$, а $\Omega_2 = (\Omega \setminus \Omega_1)$, где r_1 – некоторое положительное число, а $d(x, \partial\Omega)$– расстояние от точки x до границы $\partial\Omega$ в $\mathbb{R}^m$.

Определение. Будем говорить, что для нелинейности g и функции h в уравнении (0.2) выполнено условие **(gh1)** (условие **(gh2)**), если существуют числа $r_1 > 0$ и $r_2 \geq 0$ такие, что верно неравенство

$$\int\limits_{\Omega_1} \sup_{\xi<0} g(x,\xi)\varphi(x)dx + \int\limits_{\Omega_2} \sup_{\xi<-r_2} g(x,\xi)\varphi(x)dx \leq \int_\Omega h(x)\varphi(x)dx \leq$$

$$\leq \int\limits_{\Omega_1} \inf_{\xi>0} g(x,\xi)\varphi(x)dx + \int\limits_{\Omega_2} \inf_{\xi>r_2} g(x,\xi)\varphi(x)dx$$

$$\Big(\int\limits_{\Omega_1} \sup_{\xi>0} g(x,\xi)\varphi(x)dx + \int\limits_{\Omega_2} \sup_{\xi>r_2} g(x,\xi)\varphi(x)dx \leq \int_\Omega h(x)\varphi(x)dx \leq$$

$$\leq \int\limits_{\Omega_1} \inf_{\xi<0} g(x,\xi)\varphi(x)dx + \int\limits_{\Omega_2} \inf_{\xi<-r_2} g(x,\xi)\varphi(x)dx\Big),$$

где $\varphi(x)$ – произвольная положительная собственная функция дифференциального оператора A с граничным условием $u|_{\partial\Omega} = 0$, соответствующая λ_1.

Определение. *Обобщенным решением задачи* (0.2)–(0.3) будем называть функцию $u \in \mathbf{W}^2_q(\Omega) \cap \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}^1_q(\Omega)$, удовлетворяющую для почти всех $x \in \Omega$ включению

$$-Au(x) + \lambda_1 u(x) + h(x) \in [g_-(x, u(x)), g_+(x, u(x))].$$

В третьем параграфе формулируются теоремы существования для резонансной задачи (0.2)–(0.3) с разрывной нелинейностью. Первая теорема охватывает случай резонанса слева от λ_1:

Теорема 2.3.1. *Предположим, что*

1. *функция $g(x,\xi)$ удовлетворяет условиям* **(g1)**– **(g3)**;
2. $\liminf\limits_{\xi \to \pm\infty} \frac{g(x,\xi)}{\xi} \geq 0$ *п. в. на* Ω;
3. *для функций g и $h \in \mathbf{L}^q(\Omega)$ $(q > m)$ выполнено условие* **(gh1)**.

Тогда задача (0.2)–(0.3) имеет обобщенное решение. Это решение является сильным (полуправильным), если дополнительно для уравнения (0.2) выполнено сильное **(A1)**–*условие (сильное* **(A)**–*условие).*

Остальные две теоремы и следствие относятся к случаю резонанса справа от λ_1. Приведем формулировку одного из этих результатов.

Теорема 2.3.2. *Предположим, что*

1. *функция $g(x,\xi)$ удовлетворяет условиям* **(g1)**– **(g3)** *и* $\limsup\limits_{\xi \to \pm\infty} \frac{g(x,\xi)}{\xi} \leq 0$ *п. в. на* Ω;
2. *(нерезонансное условие для λ_2) существуют функции $\Gamma_\pm \in \mathbf{L}^q(\Omega)$ $(q > m)$ такие, что для п. в. $x \in \Omega$ имеют место неравенства $0 \leq \Gamma_\pm(x) \leq \alpha = \lambda_2 - \lambda_1$,* $\liminf\limits_{\xi \to \pm\infty} \frac{g(x,\xi)}{\xi} \geq -\Gamma_\pm(x)$ *и*
$$\int_{w>0} (\alpha - \Gamma_+(x)) w^2(x) dx + \int_{w<0} (\alpha - \Gamma_-(x)) w^2(x) dx > 0,$$
где $w(x)$ – произвольная собственная функция оператора A с граничным условием (0.3), соответствующая второму собственному значению λ_2.
3. *для функций g и $h \in \mathbf{L}^q(\Omega)$ $(q > m)$ выполнено условие* **(gh2)**.

Тогда задача (0.2)–(0.3) имеет обобщенное решение. Это решение является сильным (полуправильным), если дополнительно для уравнения (0.2) выполнено сильное **(A1)**–*условие (сильное* **(A)**–*условие).*

В четвертом параграфе второй главы приводится операторная постановка задачи (0.2)–(0.3). Для этого рассматривается E – банахово пространство функций из $\mathbf{C}^1(\overline{\Omega})$, равных нулю на $\partial\Omega$, фиксируется ν – произвольное действительное число такое, что $\lambda_1 + \nu$ не принадлежит спектру оператора A с граничным условием (0.3) и строится вспомогательное многозначное отображение ϕ_ν, неподвижные точки которого являются обобщенными решениями задачи (0.2)–(0.3). Далее, используя свойства топологической степени многозначных векторных полей показывается, что для доказательства существования обобщенного решения задачи (0.2)–(0.3) достаточно установить равномерную по $t \in [0,1]$ ограниченность в E решений включений

$$-Au(x) + \lambda_1 u(x) + (1-t)\nu u(x) + th(x) \in t[g_-(x, u(x)), g_+(x, u(x))] \qquad (0.10)$$

для почти всех $x \in \Omega$. Кроме того, в четвертом параграфе показывается, что при выполнении сильного **(A1)**–условия любое обобщенное решение задачи (0.2)–(0.3) является сильным решением, а при выполнении сильного **(A)**–условия – полуправильным.

Пятый параграф посвящен доказательству теорем 2.3.1 – 2.3.3. Доказательства проводятся методом от противного: предполагая наличие неограниченной последовательности решений семейства включений (0.10), мы приходим к противоречию с условиями теорем.

В шестом параграфе приводятся примеры резонансных эллиптических краевых задач с разрывными нелинейностями, иллюстрирующие отличия результатов, полученных во второй главе диссертации, от результатов типа Ландесмана–Лазера и от упомянутых работ D. G. de Figueiredo и W. M. Ni, R. Iannacci, M.N. Nkashama и J.R. Ward, J.-P. Gossez и P. Omari.

Третья глава диссертации посвящена резонансным эллиптическим вариационным неравенствам с разрывными нелинейностями. В диссертации используется следующий подход к доказательству существования сильного решения (0.4): исходное вариационное неравенство (0.4) заменяется резонансной эллиптической краевой задачей с разрывной нелинейностью, каждое сильное решение которой является решением (0.4). Такая схема сведения вариационного неравенства к краевой задаче впервые была применена K.-C. Chang[10] для классической задачи с препятствием. Отметим, что для полученной при таком переходе эллиптической краевой задачи имеет место резонанс слева от λ_1 и, следовательно, ее разрешимость можно установить с помощью теоремы 2.3.1. Именно таким способом доказываются первые две теоремы данной главы (теоремы 3.1.1 и 3.1.2) о существовании сильного решения вариационного неравенства (0.4). Однако, непосредственное применение к полученной эллиптической краевой задаче метода регуляризации в сочетании с вариационным подходом позволяет установить существование сильного решения данной задачи при более слабых ограничениях. Такой способ применяется при доказательстве теоремы 3.1.3.

В первом параграфе приводится постановка задачи (0.4) и формулируются 3 теоремы о существовании ее решения, вводятся основные определения и обозначения.

Определение. Говорят, что нелинейность $p : D \to \mathbb{R}$ по отношению к оператору $Lu = Au - \lambda_1 u$ удовлетворяет сильному **(A1)**–*условию*, если существует не более чем счетное семейство поверхностей $\{S_i,\ i \in I\}$, $S_i = \{(x,\xi) \in D \mid \xi = \psi_i(x)\}$, $\psi_i \in \mathbf{W}^2_{1,loc}(\Omega)$ таких, что для почти всех $x \in \Omega$ неравенство $p_+(x,\xi) \neq p_-(x,\xi)$ влечет существование $i \in I$, для которого точка $(x,\xi) \in S_i$ и либо

$$\big(L\psi_i(x) + p_-(x,\psi_i(x))\big)\big(L\psi_i(x) + p_+(x,\psi_i(x))\big) > 0,$$

$$\text{либо}\ \ L\psi_i(x) + p(x,\psi_i(x)) = 0.$$

Обозначим, как и раньше, $\Omega_1 = \Omega_1(r_1) = \{x \in \Omega \mid d(x,\partial\Omega) < r_1\}$, а $\Omega_2 = (\Omega \setminus \Omega_1)$, где r_1 – некоторое положительное число, а $d(x,\partial\Omega)$– расстояние от точки x до границы $\partial\Omega$ в $\mathbb{R}^m$.

Пусть $M_1 = \sup\limits_{\overline{\Omega}} |\psi(x)|$, где ψ – функция, фигурирующая в определении множества K (см. стр. 2). Заметим, что такая константа M_1 существует, так как $\psi \in \mathbf{C}^2(\overline{\Omega})$. Приведем формулировку наиболее интересного из полученных в третьей главе результатов.

Теорема 3.1.3. *Предположим, что*

1. *выполнены условия* **(p1)**–**(p3)**;
2. *нелинейность* $p(x,\xi)$ *по отношению к оператору* $Lu = Au - \lambda_1 u$ *удовлетворяет сильному* **(A1)**– *условию;*
3. *существуют числа* $r_1 > 0$ *и* $r_2 \geq M_1$ *такие, что*
   (a) $\psi(x) \leq 0$ *для любого* $x \in \Omega_1$;

[10] Chang K.-C. Free boundary problems and the set-valued mappings // J. Different. Equat. – 1983. – V.49. – P. 1-28.

(b) выполняется неравенство

$$\int\limits_{\Omega_1} \inf_{\xi>0} p(x,\xi)\varphi(x)dx + \int\limits_{\Omega_2} \inf_{\xi>r_2} p(x,\xi)\varphi(x)dx \geq 0, \tag{0.11}$$

где $\varphi(x)$– произвольная положительная в Ω собственная функция оператора A с граничным условием (0.3), соответствующая λ_1.

Тогда существует сильное решение и вариационного неравенства (0.4), причем $u \in \mathbf{W}_q^2(\Omega)$.

Во втором параграфе вариационному неравенству (0.4) ставится в соответствие задача

$$Au + G(x,u) = 0,\ x \in \Omega \tag{0.12}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{0.13}$$

где

$$G(x,\xi) = \begin{cases} \min\{-A\psi(x),\ p(x,\psi(x)) - \lambda_1\psi(x)\}, & \text{при } \xi \leq \psi(x), \\ p(x,\xi) - \lambda_1\xi, & \text{при } \xi > \psi(x) \end{cases}$$

и доказываются вспомогательные леммы, в том числе о том, что сильное решение задачи (0.12)–(0.13) является решением исходного неравенства.

В третьем параграфе приведены доказательства теорем 3.1.1 и 3.1.2, которые заключаются в проверке выполнения условий теоремы 2.3.1 для резонансной краевой задачи (0.12)–(0.13).

Четвертый параграф посвящен доказательству теоремы 3.1.3. Здесь с помощью непосредственного применения метода регуляризации и вариационного подхода устанавливается, что задача (0.12)–(0.13) при наложенных в теореме 3.1.3 ограничениях имеет сильное решение.

В пятом параграфе приводится пример резонансного вариационного неравенства эллиптического типа с разрывной нелинейностью, для которого не выполняется условие Ландесмана–Лазера, но верны все условия теоремы 3.1.3.

В заключение, автор выражает глубокую благодарность своему научному руководителю, профессору В.Н. Павленко, за постановку задач и помощь в работе.

Публикации по теме диссертации

[1] Павленко В.Н., Чиж Е.А. Задача Дирихле для уравнения эллиптического типа с разрывной нелинейностью без условия Ландесмана -Лазера // Математическое моделирование в естественных и гуманитарных науках: Тез. докл. Воронежского зимнего симпозиума, посвящ. памяти М. А. Красносельского.– Воронеж: ВГУ, 2000. – С. 170.

[2] Павленко В.Н., Чиж Е.А. Слабо нелинейные операторные уравнения с разрывными нелинейностями // Дифференциальные и интегральные уравнения: Тез. докл. Междунар. конф. – Одесса: Астропринт, 2000. – С. 213.

[3] Павленко В.Н., Чиж Е.А. Регуляризация для уравнений с разрывными операторами // Обратные и некорректно поставленные задачи: Тез. докл. конф., посвящ. 95-летию со дня рождения А. Н. Тихонова. – Москва: МАКС Пресс, 2001. - С. 66.

[4] Павленко В.Н., Чиж Е.А. Регуляризация для уравнений с разрывными операторами // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: Тез. докл. Всерос. науч. конф. – Екатеринбург: Изд-во Урал. ун-та, 2001. – С. 50-51.

[5] Павленко В.Н., Чиж Е.А. Задача Дирихле для уравнения Лапласа с разрывной нелинейностью без условия Ландесмана -Лазера // Вестник Челяб. гос. ун-та. – Сер. 3. Математика. Механика. Информатика. – 2002. - №1(6). – С. 120-126.

[6] Павленко В.Н., Чиж Е.А. Регуляризация для уравнений с разрывными некоэрцитивными операторами // Вестн. Челяб. гос. ун-та. – Сер. 3. Математика. Механика. Информатика. – 2003. – №3(9). - С. 111-123.

[7] Pavlenko V., Chizh E. Elliptic boundary value problems at strong resonance with discontinuous nonlinearities // Nonlinear partial differential equations: Abstracts of International Conference – Alushta, 2003. – P. 155 -156.

[8] Павленко В.Н., Чиж Е.А. Сильно резонансные эллиптические вариационные неравенства с разрывными нелинейностями // Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 12-й Саратовской зимней школы – Саратов: ГосУНЦ "Колледж", 2004. – С. 196-197.

[9] Павленко В.Н., Чиж Е.А. О разрешимости некоэрцитивных эллиптических вариационных неравенств с разрывными нелинейностями // Алгоритмический анализ неустойчивых задач: Тез. докл. Всерос. науч. конф. –Екатеринбург, 2004. – С. 205-206.

[10] Павленко В.Н., Чиж Е.А. Теорема существования для одного класса сильно резонансных краевых задач эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Укр. мат. журн. – 2005. – Т. 57, № 1. – С. 102-110.

[11] Чиж Е.А. Задача Дирихле для уравнения Лапласа с разрывной нелинейностью без условия Ландесмана–Лазера. – В кн.: Труды XXII Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. – Москва: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2001. – С. 186-189.

[12] Чиж Е.А. О разрешимости уравнения с разрывным некоэрцитивным оператором. – В кн.: Труды XXIV Конференции молодых ученых механико-математического факультета МГУ имени М.В. Ломоносова. – Москва: Изд-во ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2002. – С. 187-189.

[13] Чиж Е.А. Регуляризация для уравнений с разрывными некоэрцитивными операторами // Конкурс грантов студентов, аспирантов и молодых ученых ВУЗОВ Челябинской области: сборник рефератов научно-исследовательских работ аспирантов – Челябинск: ЮУрГУ, 2003. – С. 16.

[14] Чиж Е.А. Сильно резонансные краевые задачи эллиптического типа с разрывными нелинейностями // Современные методы теории функций и смежные проблемы: Тез. докл. Воронежской зимней математической школы – Воронеж, 2005. – С. 246-247.

Подписано в печать . Формат 60×84 1/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 1,0.
Уч.-изд. л. 1,0. Тираж 100 экз. Заказ . Бесплатно.

ГОУВПО "Челябинский государственный университет"
454021 Челябинск, ул. Братьев Кашириных, 129

Полиграфический участок Издательского центра
Челябинского государственного университета
454021 Челябинск, ул. Молодогвардейцев, 57б