ЛИСТ ДЛЯ ЗАМЕЧАНИЙ

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

В настоящее время существует достаточно большое количество научных дисциплин, посвященных проблеме принятия решений. К ним можно отнести математическое программирование, теорию игр, теорию статистических решений, теорию оптимального автоматического управления, исследование операций, системный анализ, экономическая кибернетика и другие. Все эти дисциплины занимаются рассмотрением одной и той же основной проблемы — научного анализа ряда возможных способов действия с целью нахождения такого из них, который в данных условиях был бы наилучшим. Иными словами, они занимаются рассмотрением проблемы принятия оптимальных решений, но применительно к объектам управления различной природы и в различных условиях их существования. В этом смысле их можно считать составными частями единой научной дисциплины, для обозначения которой применяется термин *теория принятия решений* (ТПР).

Одной из наиболее распространенных задач ТПР является *задача принятия решения* (ЗПР) *в условиях риска*. В таких ЗПР стоимости альтернативных решений обычно описываются вероятностными распределениями, а решение основывается на использовании критерия ожидаемого выигрыша, в соответствии с которым альтернативные решения сравниваются с точки зрения максимизации ожидаемой прибыли или минимизации ожидаемых затрат.

Целью данной работы является исследование ЗПР в условиях риска. Поставлена задача провести обзор вышеуказанной ЗПР и ее решения с помощью построения *обобщенного критерия* и *отношения доминирования по Парето*, показать на примерах практическое применение этих двух подходов.

1. ОБЩИЕ ПОНЯТИЯ

Операция — это организованная деятельность, объединенная единым замыслом, направленная на достижение определенной цели и имеющая характер повторяемости.

Примеры различных операций:

1. производственная деятельность отрасли промышленности, выпускающей некоторую продукцию;
2. отражение воздушного налета средствами системы противовоздушной обороны;
3. запуск группы искусственных спутников Земли для создания космической системы связи;
4. совокупность мероприятий, направленных на повышение надежности некоторого технического устройства.

Оперирующая сторона (ОС) — это совокупность лиц и технических устройств, которые стремятся в данной операции к достижению некоторой цели.

Так, в первом приведенном примере (с отраслью промышленности) оперирующей стороной являются лица, ответственные за принятие решений относительно деятельности предприятий, входящих в состав отрасли, то есть руководители фирм-изготовителей.

В операции могут участвовать одна или несколько ОС, преследующих различные, несовпадающие цели. Несовпадение целей ОС создает *конфликтную ситуацию*. Подобные операции называются *многосторонними*. Так, во втором приведенном выше примере операции ее исход зависит от деятельности двух сторон, преследующих противоположные цели: нападающей стороны, совершающей воздушный налет, и обороняющейся, отражающей налет.

Наряду с ОС в операции участвует *среда*, состояние которой также влияет на конечный результат операции, но не подчинено стремлению к какой-либо цели.

ОС не может воздействовать на среду и, как правило, не имеет полной информации о состоянии среды.

Для достижения цели ОС должна располагать некоторым запасом *ресурсов*, используя или расходуя которые она может добиваться достижения цели. В качестве ресурсов в зависимости от существа операции могут выступать: станки, запасы сырья, рабочая сила, денежные средства и другие.

Операция является *управляемым мероприятием.* ОС управляет операцией, выбирая те или иные способы использования ресурсов — *стратегии* (альтернативы, решения). Возможности ОС по управлению операцией всегда ограничены, так как ограничены, находящиеся в ее распоряжении, ресурсы. Этот факт проявляется в наличии *дисциплинирующих условий* — ограничений на выбор стратегий ОС. Стратегии, удовлетворяющие наложенным ограничениям, называются *допустимыми* (в смысле наложенных ограничений).

Реализация той или иной допустимой стратегии ОС обычно приводит к различным *исходам* операции. Чтобы сравнивать между собой качество различных стратегий, нужно иметь возможность оценивать соответствующие исходы операции. Исход операции оценивается с помощью некоторых *критериев оптимальности.* Критерий оптимальности является математическим выражением цели операции (математической моделью цели операции), позволяющим количественно оценить степень достижения этой цели. Стратегия, наилучшая в смысле выбранного критерия оптимальности, т. е. доставляющая ему требуемое экстремальное значение, называется *оптимальной стратегией.*

Следует отметить, что понятие оптимальная стратегия является не абсолютным, а относительным. Не существует оптимальной стратегии в целом, всякая оптимальная стратегия является наилучшей лишь в некотором узком смысле, определяемом критерием оптимальности. Одна и та же стратегия, оптимальная в смысле одного критерия, может оказаться не оптимальной и даже плохой в смысле другого критерия.

В достаточно простых ситуациях принятия решений удается ограничиться единственным критерием оптимальности. Соответствующие задачи принятия решений называются *однокритериальными* (скалярными). В противном случае имеют место *многокритериальные* (векторные) задачи.

Поскольку значение критерия оптимальности в любой операции зависит от каких-либо величин, описывающих свойства операции, используемые ресурсы и так далее, то критерий оптимальности часто называют также *функцией полезности.*

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ЗПР В УСЛОВИЯХ РИСКА

Для построения математической модели ЗПР в условиях риска зададим следующие три множества:

X — множество допустимых стратегий,

Y — множество возможных состояний среды,

A — множество возможных исходов.

(Всегда предполагается, что множество X содержит не менее двух стратегий — иначе надобность в принятии решения отпадает).

Так как исход полностью определяется выбором стратегии и состоянием среды, то каждой паре (x, y), где $x \in X, y \in Y$, соответствует определенный исход $a \in A$. Другими словами, существует функция $F : X \times Y \to A$, которая называется функцией реализации и каждой паре вида *(стратегия, состояние среды)* ставит в соответствие определяемый ею исход.

Набор объектов $< X, Y, A, F >$ составляет *реализационную структуру* ЗПР. Реализационная структура отражает связь выбираемых стратегий и состояний среды с исходами. Таким образом, здесь имеется *неопределенность стратегического типа*; она создается за счет воздействия среды на объект управления.

Реализационная структура ЗПР составляет ее первую компоненту. Вторая компонента ЗПР называется ее *оценочной структурой*. Если реализационная структура определяет возникающий результат, то оценочная структура указывает оценку этого результата с точки зрения ОС.

Формально функция реализации есть функция двух переменных x и y, но эти переменные входят в нее неравноправно, что является отражением неравноправия ОС и среды. ОС всегда имеет определенную цель, поэтому ее поведение носит целенаправленный характер; в свою очередь поведение среды может носить как целенаправленный, так и случайный характер.

Принятие решения в условиях риска характеризуется тем, что поведение среды носит случайный характер, причем в этой случайности имеются закономерности стохастического типа. В общем случае это проявляется в том, что существует некоторая *вероятностная мера*, в соответствии с которой возникают те или иные состояния среды. При этом принимающий решение имеет определенную информацию о вероятностях появления состояний среды, которая по своему характеру может быть разнообразной. Например, если имеется три возможных состояния среды A, B, C, то дополнительная информация о появлении этих состояний может заключаться, в сообщении о том, что состояние A является наименее вероятным, а состояние C — наиболее вероятным; или что вероятность B составляет более 50% и так далее.

Изучение математической модели ЗПР в условиях риска предполагает, кроме задания функции реализации, задание некоторой дополнительной информации о вероятностях состояний среды. Наиболее простой для анализа случай — когда эта дополнительная информация представлена в виде вероятностной меры на множестве состояний среды. Если множество состояний среды $Y = \{1, \ldots, m\}$ конечно, то вероятностная мера на нем может быть задана *вероятностным вектором*, то есть вектором $y = (y_1, \ldots, y_m)$, где $y_j \geqslant 0$ и $\sum\limits_{j=1}^{m} y_j = 1$ (здесь y_j есть вероятность наступления j-го состояния; $j = 1, \ldots, m$). Считаем, что оценочная структура ЗПР задается в виде оценочной функции.

Будем рассматривать ЗПР, в которых целевая функция (функция выигрыша) представлена в виде таблицы — матрицы исходов $|a_i^j|$ $(i = \overline{1, n}; j = \overline{1, m})$ и, кроме того, принимающему решение (игроку, ОС) известен вероятностный вектор $y = (y_1, \ldots, y_m)$. Такая ЗПР (называемая также игрой с природой) задается в виде таблицы 1.

Таблица 1 — Матрица выигрышей

Состояния среды Стратегии	y_1 1	$\ldots$ $\ldots$	y_j j	$\ldots$ $\ldots$	y_m m
1	a_1^1		a_1^j		a_1^m
$\vdots$					
i	a_i^1		a_i^j		a_i^m
$\vdots$					
n	a_n^1		a_n^j		a_n^m

Выбирая стратегию i, игрок знает, что он получит один из исходов $a_i^1, \ldots, a_i^m$ с вероятностями $y_1, \ldots, y_m$, соответственно. Таким образом, исходом для принимающего решение при выборе им стратегии i будет являться случайная величина

$$\xi_i = \begin{bmatrix} a_i^1, \ldots, a_i^m \\ \\ y_1, \ldots, y_m \end{bmatrix}.$$

2.1. Критерий ожидаемого выигрыша

Принятие решения в условиях риска сводится к сравнению между собой случайных величин ξ_i. Как известно из теории вероятностей, наиболее естественной числовой характеристикой случайной величины ξ_i является ее математическое ожидание, обозначаемое далее через $M\xi$. Если для ЗПР в условиях риска в качестве критерия для сравнения стратегий взять математическое ожидание соответствующей случайной величины (ожидаемый выигрыш), то оптимальной следует считать стратегию X^*, максимизирующую ожидаемый выигрыш F^*:

$$F^* = F(X^*) = \max_{1 \le k \le n} \sum_{l=1}^{m} a_l^k y_l.$$

Это правило выбора оптимальной стратегии называется *критерием ожидаемого выигрыша*.

Как известно из теории вероятностей, математическое ожидание $M\xi$ случайной величины ξ представляет собой число, к которому приближается среднее значение этой случайной величины при большом числе испытаний. Таким образом, в игре с природой ориентация на математическое ожидание выигрыша есть фактически ориентация на средний выигрыш, который получится при многократном повторении этой игры (в предположении, что условия игры не изменятся). Если в действительности игра повторяется многократно, то критерий среднего выигрыша можно считать оправданным. Однако при единичном испытании результатом операции будет конкретный выигрыш, способный значительно отклоняться от среднего выигрыша. Таким образом для ЗПР в условиях риска критерий ожидаемого выигрыша не является адекватным и должен быть трансформирован с учетом возможных отклонений случайной величины от ее среднего значения.

2.2. Мера отклонения от ожидаемого выигрыша

В теории вероятностей в качестве меры отклонения случайной величины от ее среднего значения (меры "разброса") обычно берется дисперсия $D\xi$ или среднеквадратичное отклонение $\sigma = \sqrt{D\xi}$. Напомним, что формально дисперсия определяется как математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее ожидаемого значения: $D\xi = M(\xi^2) - (M\xi)^2$.

Технически удобней здесь использовать среднеквадратичное отклонение σ, так как при изменении масштаба измерения σ изменяется пропорционально. Для ЗПР в условиях риска будем рассматривать в качестве показателя риска среднеквадратичное отклонение σ.

2.3. Обобщенный критерий оптимальности

Считая $M\xi$ за средний выигрыш, а σ за показатель риска, построим адекватный критерий сравнения стратегий.

Наиболее простым подходом является объединение указанных двух критериев в единый (обобщенный) критерий. Возьмем в качестве обобщенного критерия функцию

$$q(M, \sigma) = M - \lambda\sigma, \tag{1}$$

где λ — некоторая постоянная. Фактически критерий (1) представляет собой взвешенную сумму частных критериев M и σ с весовыми коэффициентами 1 и $-\lambda$. При $\lambda > 0$ оценка случайной величины с помощью обобщенного критерия (1) будет меньше, чем ее среднее значение, что является характерным для осторожной ОС, то есть ОС, не склонной к риску. Напротив, при $\lambda < 0$ оценка (1) будет больше, чем ее среднее значение, что характеризует ОС, склонную к риску. Наконец, при $\lambda = 0$ оценка (1) случайной величины совпадает с ее средним значением (то есть возможные отклонения случайной величины от ее среднего значения игнорируются) — это характеризует ОС, безразличную к риску. В качестве основного мы будем далее рассматривать случай, когда ОС не склонна к риску, то есть $\lambda > 0$.

При $\lambda > 0$ увеличение критерия q может происходить как за счет увеличения M, так и за счет уменьшения σ. Таким образом, для ОС, не склонной к риску, критерий (1) отражает стремление к увеличению ожидаемого выигрыша и уменьшению риска отклонения от него. При этом показатель λ характеризует субъективное отношение принимающего решение к риску: чем больше λ, тем в большей степени он не склонен рисковать. Таким образом, λ можно рассматривать как *субъективный показатель меры несклонности к риску* (субъективный показатель осторожности).

Чтобы сказать что-то конкретное, зная значение λ, рассмотрим неравенство Чебышева:

$$P(|\xi - M| \geq a) \leq \sigma^2/a^2,$$

где $a > 0$. Пусть ОС не склонна к риску. Так как оценкой случайной величины ξ служит число $M - \lambda\sigma$, то неблагоприятный исходя для ОС наступает тогда, когда $\xi < M - \lambda\sigma$. Оценим вероятность этого события. В этом случае выполняется $M - \xi > \lambda\sigma$, следовательно $|\xi - M| > \lambda\sigma$. В силу неравенства Чебышева вероятность последнего соотношения будет меньше, чем

$$D\xi/(\lambda\sigma)^2 = \sigma^2/(\lambda^2\sigma^2) = 1/\lambda^2.$$

Итак, вероятность того, что случайная величина ξ примет значение, меньшее ее оценки $M - \lambda\sigma$, не превосходит $1/\lambda^2$.

Для примера, положим $\lambda = 3$. Тогда вероятность того, что случайная величина не опустится ниже оценки $M - 3\lambda$, будет не менее $1 - 1/9$, то есть почти 90%. Такую степень риска можно считать невысокой, то есть значение $\lambda = 3$ соответствует достаточно большой степени осторожности.

Выясним теперь — как устанавливается предпочтение стратегий по обобщенному критерию (1). Будем считать, что ОС не склонна к риску ($\lambda > 0$). Как было установлено выше, в этом случае она стремится увеличить ожидаемый выигрыш и уменьшить риск, то есть критерий M будет здесь положительным, а критерий σ — отрицательным. Пусть (x_i) — некоторое множество стратегий, каждая из которых характеризуется парой показателей (M_i, σ_i). Зафиксируем две произвольные стратегии

$$x_{i_1} = (M_{i_1}, \sigma_{i_1}), \quad x_{i_2} = (M_{i_2}, \sigma_{i_2}).$$

Находим:

$$q(x_{i_1}) = M_{i_1} - \lambda\sigma_{i_1}, \quad q(x_{i_2}) = M_{i_2} - \lambda\sigma_{i_2}.$$

Возможны два случая.

а) Стратегии α_{i_1} и α_{i_2} *сравнимы по Парето.* Пусть, например, $x_{i_1} >^{Par} x_{i_2}$. Тогда $M_{i_1} \geq M_{i_2}$ и $\sigma_{i_1} \leq \sigma_{i_2}$ (причем хотя бы одно неравенство строгое), значит $M_{i_1} - \lambda\sigma_{i_1} > M_{i_2} - \lambda\sigma_{i_2}$. Таким образом, в этом случае независимо от меры несклонности ОС к риску (то есть от значения показателя $\lambda > 0$) стратегия x_{i_1} будет более предпочтительной, чем стратегия x_{i_2} (этот факт записывается в виде $x_{i_1} \succ x_{i_2}$).

б) Стратегии x_{i_1} и x_{i_2} несравнимы по Парето. Пусть, например, $M_{i_1} > M_{i_2}$, тогда $\sigma_{i_1} > \sigma_{i_2}$ (то есть больший ожидаемый выигрыш здесь всегда сопровождается большим риском). Условие $M_{i_1} - \lambda\sigma_{i_1} > M_{i_2} - \lambda\sigma_{i_2}$ равносильно тому, что $\lambda < (M_{i_1} - M_{i_2})/(\sigma_{i_1} - \sigma_{i_2})$. Таким образом, в этом случае

$$x_{i_1} \succ x_{i_2}, \qquad \lambda < (M_{i_1} - M_{i_2})/(\sigma_{i_1} - \sigma_{i_2}) \tag{2}$$

$$a_{i_2} \succ x_{i_1}, \qquad \lambda > (M_{i_1} - M_{i_2})/(\sigma_{i_1} - \sigma_{i_2}). \tag{3}$$

В многокритериальной ЗПР основная проблема при определении оптимальной стратегии состоит в выборе одной стратегии из множества оптимальных по Парето стратегий. Эта проблема легко решается (в случае конечного Парето-оптимального множества), если произведено полное ранжирование Парето-оптимальных стратегий по предпочтению. Так как любые две Парето-оптимальные стратегии не сравнимы по Парето, то для них выполнено условие а). В этом случае предпочтение между стратегиями x_{i_1} и x_{i_2} будет зависеть от того, выполнено ли условие (2) или условие (3). В то же время, предпочтения между Парето-оптимальными стратегиями будут носить единообразный характер, когда условие (2) или (3) выполнено для всех i_1, i_2, при которых стратегии x_{i_1}, x_{i_2} оптимальны по Парето. Формально это обстоятельство можно выразить следующим образом. Положим

$$\lambda^0 = \min\{(M_{i_1} - M_{i_2})/(\sigma_{i_1} - \sigma_{i_2})\}, \quad \lambda^* = \max\{(M_{i_1} - M_{i_2})/(\sigma_{i_1} - \sigma_{i_2})\},$$

где операторы min и max распространяются на такие пары индексов (i_1, i_2), для которых стратегии x_{i_1}, x_{i_2} оптимальны по Парето и $M_{i_1} > M_{i_2}$ (а, следовательно, $\sigma_{i_1} > \sigma i_2$). Назовем λ^0 *нижней границей* несклонности к риску, λ^* — *верхней границей* несклонности к риску (всегда выполняется $\lambda^0 < \lambda^*$). Но основании а), получаем для ОС, не склонной к риску, следующее правило.

Правило 1.

a) Если у ОС ее субъективный показатель несклонности к риску меньше нижней границы ($\lambda < \lambda^0$), то для него ранжирование множества Парето-оптимальных стратегий по обобщенному критерию q совпадает с ранжированием по показателю ожидаемого выигрыша M (то есть более предпочтительной будет та стратегия, для которой больше ожидаемый выигрыш);

b) Если у ОС ее субъективный показатель несклонности к риску больше верхней границы ($\lambda > \lambda^*$), то для него ранжирование множества Парето-оптимальных стратегий по обобщенному критерию q совпадает с ранжированием по показателю риска σ (более предпочтительной будет та стратегия, для которой меньше риск).

Таким образом, для ЗПР в условиях риска применение обобщенного критерия (1) сводит проблему нахождения оптимального решения к проблеме установления для принимающего решение его меры несклонности (или склонности) к риску. На вопрос о существовании этой меры многие психологи отвечают утвердительно; при этом предлагается определять показатель склонности (или несклонности) индивидуума к риску из наблюдений за тем, как этот индивидуум принимает решения в рискованных ситуациях — как естественных, так и искусственных.

Замечание 1. Основной недостаток критерия (1) состоит в том, что он базируется на предположении постоянства меры несклонности к риску для данного лица, принимающего решение. Вместе с тем, для большинства людей их мера склонности (или несклонности) к риску меняется в зависимости от величины ожидаемого выигрыша и степени риска. Однако для установления ранжирования стратегий достаточно знать не точное значение показателя λ, а некоторый содержащий его интервал.

2.4. Отношение доминирования по Парето

Рассмотрим теперь для ЗПР в условиях риска метод нахождения оптимального решения, основанный на отношении доминирования по Парето. Будем считать, что ОС не склонна к риску; тогда критерий ожидаемого выигрыша будет положительным, а критерий риска — отрицательным. Предположим, что требуется выбрать одну (оптимальную) стратегию из заданного множества допустимых стратегий (x_i), каждая из которых характеризуется парой показателей (M_i, σ_i). Изобразив на координатной плоскости точки с координатами (M_i, σ_i), получим рисунок 1. Содержательное условие

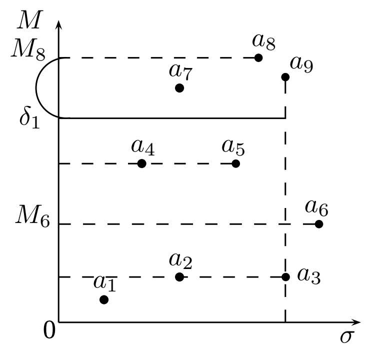

Рисунок 1 — Содержательное условие доминирование по Парето

доминирования по Парето $x_{i_1} >^{Par} x_{i_2}$ означает, что для стратегии x_{i_1} получается такой же (или больший) ожидаемый выигрыш, что и для стратегии x_{i_2}, но с меньшим (или таким же) риском. Например, $x_2 >^{Par} x_3, x_9 >^{Par} x_3, x_4 >^{Par} x_5, x_8 >^{Par} x_9$ и так далее. В данном примере множество Парето-оптимальных стратегий есть $\{x_1, x_4, x_7, x_8\}$; окончательный выбор оптимальной стратегии должен производиться из этого множества. Здесь есть два подхода: 1-й подход заключается в том, что рациональный анализ заканчивается указанием множества Парето-оптимальных стратегий и окончательный выбор оптимальной стратегии из этого множества производит сама ОС на основе неформальных дополнительных соображений. Рассмотрим теперь 2-й подход, когда производятся некоторые процедуры сужения множества Парето-оптимальных стратегий.

a) *Субоптимизация* связана с выбором одного критерия и назначением нижних границ по остальным критериям. Для нашей задачи возьмем критерий ожидаемого выигрыша, и тогда субоптимизация будет выполнена следующим образом: назначим нижнюю границу по критерию M и оптимизируем (в данном случае — минимизировать) критерий σ. Например, если взять в качестве нижней границы критерия ожидаемого выигрыша значение M_6 (рисунок 1), то оптимальной будет стратегия x_4, так как среди стратегий, удовлетворяющих условию $M_i \geq M_6$, она является наименее рискованной.

b) *Лексикографическая* оптимизация предполагает упорядочение критериев по относительной важности. Пусть, например, M — важнейший критерий. Так как максимальное значение по критерию M имеет единственная стратегия x_8, то она и будет являться оптимальной. Здесь наглядно проявляется недостаток метода лексикографической оптимизации: учет фактически одного (важнейшего) критерия. Указанный недостаток связан с необходимостью введения жесткого приоритета критериев и может быть снят за счет ослабления жесткости приоритетов следующим образом. Назначим некоторую уступку δ_1 по важнейшему критерию и на первом шаге отберем те стратегии, для которых оценка по первому (важнейшему) критерию отличается от максимальной оценки не более, чем на δ_1. После этого назначаем уступку δ_2 для второго по важности критерия и среди отобранных на первом шаге стратегий выбираем те, для которых оценка по второму критерию отличается от максимальной не более, чем на δ_2 и так далее.

Например, в рассматриваемом случае возьмем в качестве уступки по критерию ожидаемого выигрыша величину δ_1, указанную на рисунке 1. Тогда результатом выбора на первом шаге будут стратегии $\{x_7, x_8, x_9\}$. Среди них наилучшей по второму критерию является стратегия x_7 — она и будет оптимальной. Таким образом, несколько снизив требования по критерию M, мы значительно улучшили оценку по критерию σ (то есть некоторое уменьшение ожидаемого выигрыша привело к существенному снижению риска).

Замечание 2. Недостаток изложенного метода последовательных уступок состоит в необходимости получения дополнительной информации от принимающего решение о величине уступки по каждому критерию (кроме последнего).

3. ПРИМЕР ЗПР В УСЛОВИЯХ РИСКА

Фирма может выпускать продукцию одного из следующих шести видов: зонты (З), куртки (К), плащи (П), сумки (С), туфли (Т), шляпы (Ш). Глава фирмы должен принять решение, какой из этих видов продукции выпускать в течение предстоящего летнего сезона. Прибыль фирмы зависит от того, каким будет лето — дождливым, жарким или умеренным, и определяется таблицей 2. Выбор какого варианта производства будет оптимальным?

При отсутствии дополнительной информации о состояниях среды эта задача будет задачей выбора решения в условиях неопределенности, и ее решение возможно при принятии какой-либо гипотезы о поведении среды. Если ОС имеет информацию о вероятностях наступления дождливого, жаркого и умеренного лета, то указанная задача становится задачей принятия решения в условиях риска. В нашем случае необходимая дополнительная информация может быть взята из статистических данных (наблюдений за погодой в данной местности). Предположим, что вероятность дождливого, жаркого и умеренного лета равна, соответственно, $0.2; 0.5; 0.3$.

Таблица 2 — Стратегии и состояния среды

	Д	Ж	У
y_i	0,2	0,5	0,3
З	80	60	40
К	70	40	80
П	70	50	60
С	50	50	70
Т	75	50	50
Ш	65	75	60

Найдем ожидаемые выигрыши, соответствующие стратегиям З, К, П, С, Т, Ш. Имеем:

$$M_{\text{З}} = 80 \cdot 0,2 + 60 \cdot 0,5 + 40 \cdot 0,3 = 58;$$

$$M_{\text{С}} = 50 \cdot 0,2 + 50 \cdot 0,5 + 70 \cdot 0,3 = 56;$$

$$M_{\text{К}} = 70 \cdot 0,2 + 40 \cdot 0,5 + 80 \cdot 0,3 = 58;$$

$$M_{\text{Т}} = 75 \cdot 0,2 + 50 \cdot 0,5 + 50 \cdot 0,3 = 55;$$

$$M_{\text{П}} = 70 \cdot 0,2 + 50 \cdot 0,5 + 60 \cdot 0,3 = 57;$$

$$M_{\text{Ш}} = 35 \cdot 0,2 + 75 \cdot 0,5 + 60 \cdot 0,3 = 62,5.$$

Далее, определим дисперсии случайных величин $\xi_{\text{З}}, \xi_{\text{К}}, \xi_{\text{П}}, \xi_{\text{С}}, \xi_{\text{Т}}, \xi_{\text{Ш}}$, (здесь удобно использовать следующее свойство дисперсии: $D\xi = M\xi^2 - (M\xi)^2$).

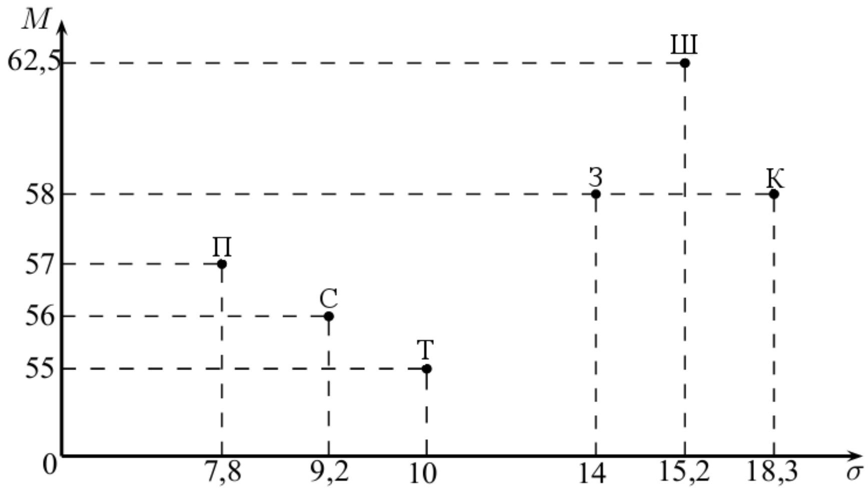

Рисунок 2 — Возможные стратегии

$$D\xi_{\text{З}} = 6400 \cdot 0,2 + 3600 \cdot 0,5 + 1600 \cdot 0,3 - (58)^2 = 196;$$

$$D\xi_{\text{С}} = 2500 \cdot 0,2 + 2500 \cdot 0,5 + 4900 \cdot 0,3 - (56)^2 = 84;$$

$$D\xi_{\text{К}} = 4900 \cdot 0,2 + 1600 \cdot 0,5 + 6400 \cdot 0,3 - (58)^2 = 336;$$

$$D\xi_{\text{Т}} = 5625 \cdot 0,2 + 2500 \cdot 0,5 + 2500 \cdot 0,3 - (55)^2 = 100;$$

$$D\xi_{\text{П}} = 4900 \cdot 0,2 + 2500 \cdot 0,5 + 3600 \cdot 0,3 - (57)^2 = 61;$$

$$D\xi_{\text{Ш}} = 1225 \cdot 0,2 + 5625 \cdot 0,5 + 3600 \cdot 0,3 - (62.5)^2 = 231,5.$$

Среднеквадратичные отклонения рассматриваемых случайных величин таковы:

$$\sigma_{\text{З}} = \sqrt{196} = 14; \quad \sigma_{\text{К}} = \sqrt{336} = 18,3; \quad \sigma_{\text{П}} = \sqrt{61} = 7,8;$$

$$\sigma_{\text{С}} = \sqrt{84} = 9,2; \quad \sigma_{\text{Т}} = \sqrt{100} = 10; \quad \sigma_{\text{Ш}} = \sqrt{231,5} = 15,2.$$

Составим таблицу значений критериев M и σ для каждой стратегии (таблица 3).

Таблица 3 — Значения критериев

	M	σ
З	58	14,0
К	58	18,3
П	57	7,8
С	56	9,2
Т	55	10,0
Ш	62,5	15,2

Представив рассматриваемые стратегии точками на координатной плоскости переменных (M, σ), получим рисунок 2, из которого находим Парето-оптимальное множество З, П, Ш. Окончательный выбор оптимальной стратегии должен производиться из этого множества. Сужение Парето-оптимального множества (в идеале - до одного элемента) может быть произведено только при наличии дополнительной информации о соотношении критериев M и σ.

Найдем оптимальное решение при помощи обобщенного критерия q вида (1). Здесь

$$q(\text{З}) = 58 - 14\lambda, \quad q(\text{С}) = 56 - 9,2\lambda, \quad q(\text{К}) = 58 - 18,3\lambda,$$

$$q(\text{Т}) = 55 - 10\lambda, \quad q(\text{П}) = 57 - 7,8\lambda, \quad q(\text{Ш}) = 62,5 - 15,2\lambda.$$

Для установления ранжирования Парето-оптимального множества З, П, Ш по обобщенному критерию q найдем вначале нижнюю и верхнюю границы меры несклонности к риску. Имеем:

$$\frac{M_{\text{З}} - M_{\text{П}}}{\sigma_{\text{З}} - \sigma_{\text{П}}} = \frac{58 - 57}{14 - 7,8} = 0,16; \qquad \frac{M_{\text{Ш}} - M_{\text{З}}}{\sigma_{\text{Ш}} - \sigma_{\text{З}}} = \frac{62,5 - 58}{15,2 - 14,0} \simeq 3,8;$$

$$\frac{M_{\text{Ш}} - M_{\text{П}}}{\sigma_{\text{Ш}} - \sigma_{\text{П}}} = \frac{62,5 - 57}{15,2 - 7,8} = 0,74.$$

Отсюда

$$\lambda^0 = \min(0,16; 3; 8; 0,74) = 0,16, \qquad \lambda^* = \max(0,16; 3; 8; 0,74) = 3,8.$$

Таким образом, интервал $(0, +\infty)$ разбивается на три интервала:

(0; 0,16) — зона малой несклонности к риску (зона малой осторожности);

[0,16; 3,8] — зона неопределенности;

$(3,8; +\infty)$ — зона большой несклонности к риску (зона большой осторожности).

Согласно правилу 1 получаем:

1) Если для ОС ее мера несклонности к риску $0 \leq \lambda < 0,16$, то для него ранжирование множества Парето-оптимальных стратегий совпадет с их ранжированием по величине ожидаемого выигрыша: Ш $\succ$ З $\succ$ П; при этом оптимальной будет стратегия Ш;

2) Если для принимающего решение его мера несклонности к риску $\lambda > 3,8$, то для него ранжирование множества Парето-оптимальных стратегий совпадет с их ранжированием по показателю риска: П $\succ$ З $\succ$ Ш; при этом оптимальной будет стратегия П.

Рассмотрим теперь случай, когда мера несклонности ОС к риску попадает в зону неопределенности. Возьмем, например, $\lambda = 2$. Тогда

$$q(\text{З}) = 58 - 14 \cdot 2 = 30;$$

$$q(\text{П}) = 57 - 7.8 \cdot 2 = 41,4;$$

$$q(\text{Ш}) = 62,5 - 15.2 \cdot 2 = 32,1.$$

Получаем ранжирование П $\succ$ Ш $\succ$ З. Таким образом, в этом случае предпочтение для пары (З, Ш) определяется по величине ожидаемого выигрыша, а для пары (П, Ш) — по величине риска.

Найдем оптимальную стратегию на основе доминирования по Парето методом субоптимизации. Положим нижнюю грань равной 57,5. Стратегии $\{\text{З}, \text{Ш}, \text{К}\}$ превосходят по величине ожидаемого выигрыша нижнюю грань. Наименее рискованной из них является стратегия З, она и будет оптимальной.

Найдем оптимальную стратегию на основе доминирования по Парето методом лексикографической оптимизации. Примем за главный критерий σ и выберем стратегию с его минимальным значением — это стратегия П. Назначим уступку $\delta_1 = 3$. Тогда результатом выбора на первом шаге будут стратегии $\{\text{П}, \text{С}, \text{Т}\}$. Выберем из них оптимальную по критерию M — ею является стратегия П. Таким образом, стратегия П является оптимальной в рассматриваемой задаче.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Задачи принятия решений в условиях риска являются актуальной тематикой в настоящее время, поскольку в терминах этих задач можно формулировать очень распространенные ситуации принятия решения, особенно в экономической сфере. Решение подобных задач требует использования теории вероятностей. Минимальный необходимый набор данных, необходимый для поиска оптимальной стратегии, включает в себя множество всех возможных стратегий, конечных исходов и состояний среды. В зависимости от метода решения задачи требуется задание некоторых субъективных оценок, например, субъективный показатель меры несклонности к риску λ или уступка δ.