МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ АГЕНТСТВО ПО ОБРАЗОВАНИЮ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ
ВСЕРОССИЙСКОГО ЗАОЧНОГО ФИНАНСОВО-ЭКОНОМИЧЕСКОГО ИНСТИТУТА
КАФЕДРА ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МЕТОДОВ И МОДЕЛЕЙ

Контрольная работа

по дисциплине: Экономико-математические методы и прикладные модели

вариант №8

Задача 1.

Постановка задачи.

Имеется два вида корма I и II, содержащие питательные вещества (витамины) S_1, S_2 и S_3. Содержание числа единиц питательных веществ в 1 кг каждого вида корма и необходимый минимум питательных веществ приведены в таблице

Питательное вещество (витамин)	**Необходимый минимум питательных веществ**	**Число единиц питательных веществ в 1 кг корма**	
		I	II
S_1	9	3	1
S_2	8	1	2
S_3	12	1	6

Стоимость 1 кг корма I и II соответственно равна 4 и 6 ден. ед.

Необходимо составить дневной рацион, имеющий минимальную стоимость, в котором содержание питательных веществ каждого вида было бы не менее установленного предела.

Построить экономико-математическую модель задачи, дать необходимые комментарии к ее элементам и получить решение графическим методом. Что произойдет, если решать задачу на максимум и почему?

Решение задачи.

Введем следующие обозначения:

x_1 – количество килограмм корма I типа

x_2 – количество килограмм корма II типа

Целевая функция, которую необходимо минимизировать, имеет вид:

$$f(\overline{X}) = 4x_1 + 6x_2 \to \min$$

Ограничения задачи:

$3x_1 + 1x_2 \geq 9$

$1x_1 + 2x_2 \geq 8$

$1x_1 + 6x_2 \geq 12$

Прямая первого ограничения (по минимальному количеству витамина S_1) $3x_1 + 1x_2 \geq 9$ проходит через две точки: (0;9) и (3;0). ОДР данного неравенства является верхняя полуплоскость.

Вторая прямая по второму витамину $1x_1 + 2x_2 \geq 8$ проходит через точки (0;4) и (8;0). ОДР этого неравенства является соответствующая верхняя полуплоскость.

Третья прямая будет проходить через точки (12;0) и (0;2). Решением также будет являться верхняя полуплоскость.

В результате получим область допустимых решений, соответствующую незамкнутому многоугольнику ABCD (рис. 1).

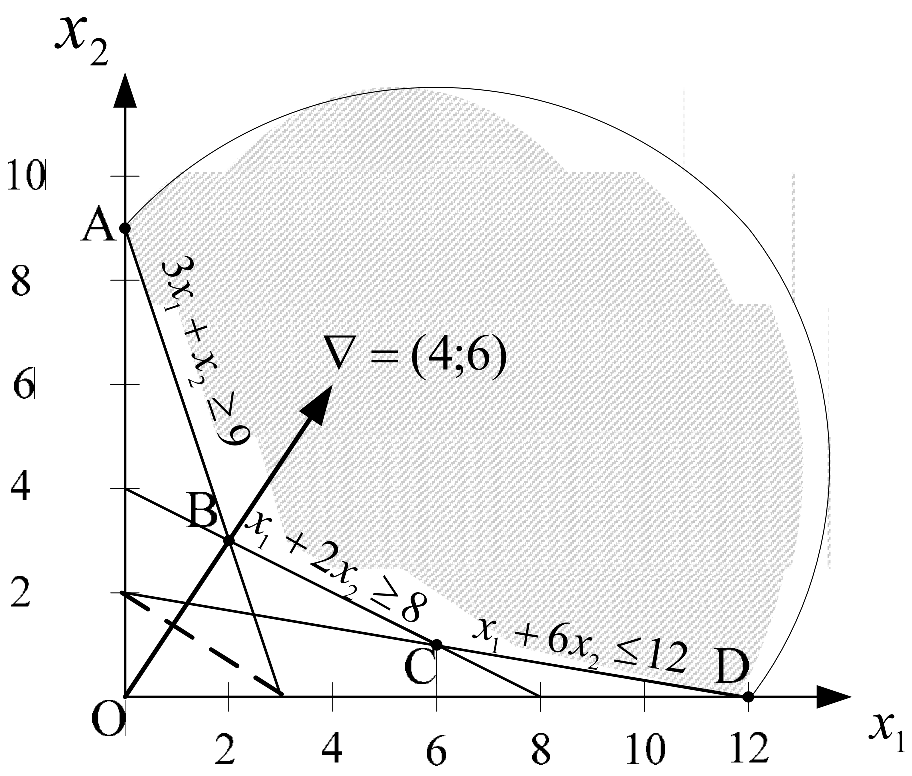

Рис. 1. Заштрихована область допустимых решений функции

Для определения направления движения к оптимуму построим вектор-градиент. Его координаты равны частным производным целевой функции:

$$\nabla = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} = c_1; \frac{\partial f}{\partial x_2} = c_2 \right) = (4;6).$$

Построим линию уровня $4x_1 + 6x_2 = a$ для a=12 ($x_1 = 3$, $x_2 = 0$; $x_1 = 0$, $x_2 = 2$). При движении этой прямой в направлении противоположном направлению вектора-градиента предельной точкой (точкой минимума) является точка В. Определим ее координаты. Для этого составим систему из уравнений двух прямых, к которым принадлежит эта точка:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 = 9 \\ x_1 + 2x_2 = 8 \,\big|\cdot 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\begin{array}{l} 3x_1 + x_2 = 9 \\ \underline{3x_1 + 6x_2 = 24} \end{array} \end{cases}$$

$$\begin{array}{l} -5x_2 = -15 \\ x_2 = 3 \\ x_1 = (9-3)/3 \\ x_1 = 2 \end{array}$$

Тогда значение функции в этой точке:

$$f(x) = 4 \cdot 2 + 6 \cdot 3 = 8 + 18 = 26.$$

Значит, решением исходной задачи линейного программирования будет: $\min f(\overline{X}) = 26$ ден. ед., который достигается при $x_1 = 2$ и $x_2 = 3$.

В случае максимизации движение перпендикуляра вектора-градиента будет происходить в противоположном направлении, тогда он не сможет покинуть область допустимых решений. Это будет означать, что максимум целевой функции не может быть достигнут.

Задача 2.

Постановка задачи.

На основании информации, приведенной в таблице, решается задача оптимального использования ресурсов на максимум выручки от реализации готовой продукции.

Тип сырья	**Нормы расхода сырья на ед. продукции**			**Запасы сырья**
	I вид	II вид	III вид	
I	1	2	1	430
II	3	0	2	460
III	1	4	0	420
Цена изделия	3	2	5	

Требуется:

1) Сформулировать прямую оптимизационную задачу на максимум выручки от реализации готовой продукции, получить оптимальный план выпуска продукции.

2) Сформулировать двойственную задачу и найти ее оптимальный план с помощью теорем двойственности.

3) Пояснить нулевые значения переменных в оптимальном плане.

4) На основе свойств двойственных оценок и теорем двойственности:

- проанализировать использование ресурсов в оптимальном плане исходной задачи;

- определить, как изменятся выручка от реализации продукции и план ее выпуска, если запас сырья I вида увеличить на 10ед., а II - уменьшить на 80ед;

- оценить целесообразность включения в план изделия четвертого вида ценой 7у.е., если нормы затрат сырья 2, 4 и 3ед.

Решение задачи.

1) Решим прямую оптимизационную задачу.

Введем следующие обозначения:

x_1 – количество единиц продукции типа I

x_2 – количество единиц продукции II

x_3 – количество единиц продукции III

Целевая функция будет иметь вид:

$$f(\overline{X}) = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \max$$

Ограничения задачи:

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \le 430$$

$$3x_1 + 2x_3 \le 460$$

$$x_1 + 4x_2 \le 420$$

$$x_1, x_2, x_3 \ge 0$$

Для решения этой прямой оптимизационной задачи воспользуемся табличным процессором MS Excel, в частности надстройкой Поиск решения.

На рабочем листе MS Excel введем исходные данные задачи (рис. 2).

	A	B	C	D	E	F
1			типы продукции			
2		x1	x2	x3		
3	кол-во единиц продукции					
4	коэф. в целевой функции	3	2	5	0	
5						
6			ограничения			
7	I тип сырья	1	2	1	0	430
8	II тип сырья	3	0	2	0	460
9	III тип сырья	1	4	0	0	420
10						

Рис. 2. Ввод исходных данных задачи

В ячейку E4 вставляем функцию СУММПРОИЗВ. В окне Аргументы функции заполняем строки Массив 1 и Массив 2 как указано на рис. 3. Массив, который не содержит значений и подлежит расчету указываем через абсолютную ссылку, а массив с коэффициентами – через относительную. Это делается для того, чтобы можно было скопировать данную функцию для других строк, с заменой только значений коэффициентов.

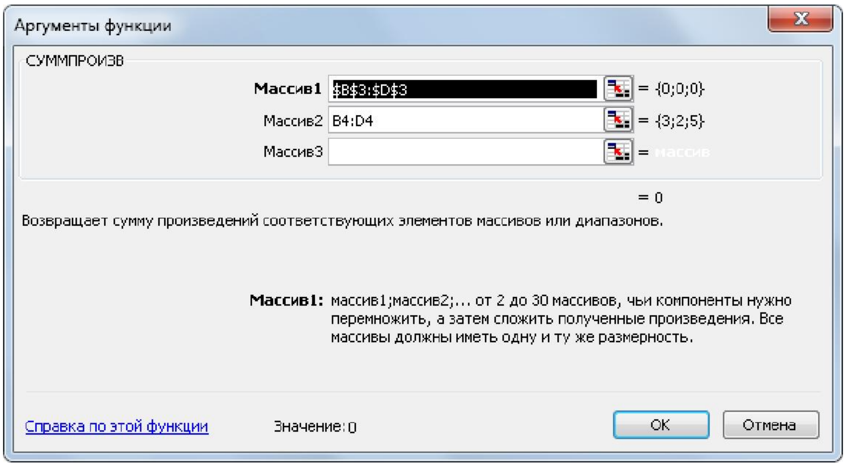

Рис. 3. Ввод аргументов функции

Копируем данную функцию для ячеек E7:E9.

Теперь приступаем к поиску оптимального решения. Для этого входим в меню Сервис → Поиск решения. Появившееся окне заполняем как указано на рисунке 4.

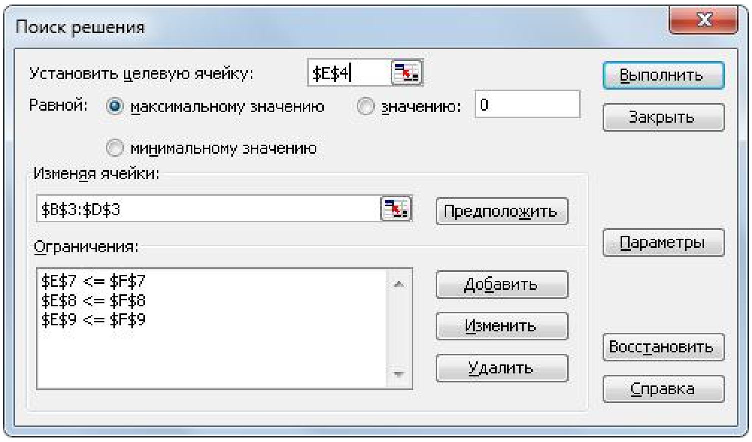

Рис. 4. Указание данных в окне Поиск решения

Нажимаем кнопку Параметры и указываем параметры решаемой задачи: линейная модель и неотрицательные значения (рис. 5).

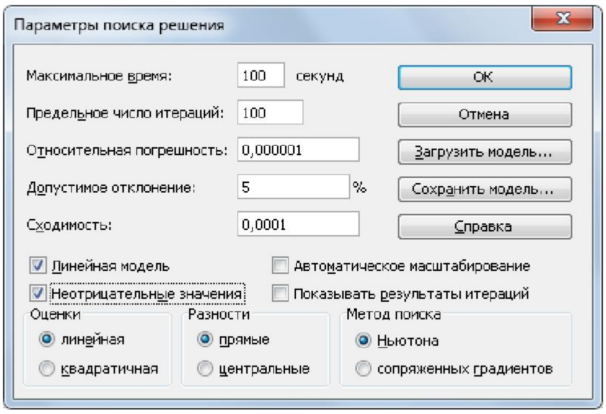

Рис. 5. Параметры поиска решения

Нажимаем кнопку Выполнить и получаем оптимальное решение данной задачи (рис. 6). Исходя из него, видно, что максимум целевой функции $\max f(\overline{X}) = 1350$ и он достигается $x_1 = 0$, $x_2 = 100$ и $x_3 = 230$.

	A	B	C	D	E	F
1			типы продукции			
2		x1	x2	x3		
3	кол-во единиц продукции	0	100	230		
4	коэф. в целевой функции	3	2	5	1350	
5						
6			ограничения			
7	I тип сырья	1	2	1	430	430
8	II тип сырья	3	0	2	460	460
9	III тип сырья	1	4	0	400	420

Рис. 6. Результат решения задачи

2) Сформулируем двойственную задачу и найдем ее оптимальный план при помощи теорем двойственности.

Количество неизвестных в двойственной задаче будет равно количеству ограничений в прямой задаче – три:

y_1 – двойственная оценка сырья I

y_2 – двойственная оценка сырья II

y_3 – двойственная оценка сырья III

Целевая функция двойственной задачи будет формулироваться на минимум, при этом коэффициентами при неизвестных будут свободные члены из системы ограничений прямой задачи:

$$g(\overline{Y}) = 430y_1 + 460y_2 + 420y_3 \to \min$$

С экономической точки зрения задача будет подразумевать: найти такие «цены» ресурсов, чтобы общая оценка используемых ресурсов была минимальной.

Число ограничений в двойственной задаче будет равно числу неизвестных в прямой задаче. Матрица, составленная из коэффициентов левых частей ограничений двойственной задачи, будет являться транспонированной к аналогичной матрице прямой задачи. Правые же части в системе ограничений двойственной задачи являются коэффициентами при неизвестных в целевой функции прямой задачи.

$y_1 + 3y_2 + y_3 \le 3$ - ограничение по первому типу продукции

$2y_1 + 4y_3 \le 2$ - ограничение по второму типу продукции

$y_1 + 2y_2 \le 5$ - ограничение по третьему типу продукции

$y_1, y_2, y_3 \ge 0$

Воспользуемся второй теоремой двойственности.

$$y_i \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} a_{i,j} \cdot x_j - b_i \right) = 0 .$$

$y_1 \cdot (x_1 + 2 \cdot x_2 + x_3 - 430) = 0$

$y_2 \cdot (3 \cdot x_1 + 2 \cdot x_3 - 460) = 0$

$y_3 \cdot (x_1 + 4 \cdot x_2 - 420) = 0$

Подставим оптимальные значения x_j.

$y_1 \cdot (0 + 2 \cdot 100 + 230 - 430) = y_1 \cdot (430 - 430) = 0$

$y_2 \cdot (3 \cdot 0 + 2 \cdot 230 - 460) = y_2 \cdot (460 - 460) = 0$

$y_3 \cdot (0 + 4 \cdot 100 - 420) = y_3 \cdot (400 - 420) = 0$, откуда $y_3 = 0$.

Воспользуемся следующим соотношением этой же теоремы.

$$x_j \cdot \left(\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} \cdot y_i - c_j \right) = 0,$$

если $x_j > 0$, то $\sum_{i=1}^{m} a_{i,j} \cdot y_i = c_j$.

В прямой задаче $x_2, x_3 > 0$, поэтому второе и третье ограничения двойственной задачи обращаются в равенство. В результате получим систему:

$$\begin{cases} y_1 + 2y_2 = 5 \\ 2y_1 + 4y_3 = 2 \\ y_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 + 2y_2 + 0 = 5 \\ 2y_1 + 0 = 2 \\ y_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 + 2y_2 = 5 \\ y_1 = 1 \\ y_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_2 = 2 \\ y_1 = 1 \\ y_3 = 0 \end{cases}$$

Получены теневые цены сырья: для I типа $y_1 = 1$; для II типа сырья $y_2 = 2$ и для III типа $y_3 = 0$.

Проверим выполнение первой теоремы двойственности: $f(\overline{X}) = g(\overline{Y})$.

$g(\overline{Y}) = 430 \cdot 1 + 460 \cdot 2 + 420 \cdot 0 = 430 + 920 = 1350 = f(\overline{X})$

Оптимальный план двойственной задачи определен верно.

3) Поясним нулевые значения переменных в оптимальном плане.

В прямой задаче $x_1 = 0$, так как производство этого типа продукции не входит в оптимальный план выпуска продукции. Затраты на его производство - $1 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 1 \cdot 0 = 1 + 6 = 7$ ед., и они превышают цену единицы продукции - 3.

В двойственной задаче $y_3 = 0$, так как сырье III типа используется не полностью. Оно не влияет на план выпуска продукции, а значит, и не ограничивает рост целевой функции прямой задачи, поэтому данный тип сырья имеет нулевую двойственную оценку.

4) Проанализируем использование ресурсов в оптимальном плане исходной задачи.

Как видно из решения прямой задачи, сырье I и II типа используются полностью. Такие ресурсы принято называть дефицитными, так как от их количества зависит объем выпуска продукции, и они ограничивают целевую функцию. III тип сырья имеет двойственную оценку равной 0, так как этот тип ресурсов имеется в избытке, и не препятствует максимизации целевой функции.

Теперь определим, как изменятся выручка от реализации продукции и план ее выпуска, если запас сырья I вида увеличить на 10 ед., а II - уменьшить на 80 ед. Для этого решенную задачу скопируем на новый лист и пересчитаем с учетом изменения запасов сырья (рис. 7).

Отсюда следует, что увеличение запасов сырья первого типа и понижение запасов второго сырья приведет к падению выручки на 190 единиц. Новый оптимальный план выпуска будет: $x_1 = 0$, $x_2 = 105$ и $x_3 = 190$.

	A	B	C	D	E	F
1			типы продукции			
2		x1	x2	x3		
3	кол-во единиц продукции	0	105	190		
4	коэф. в целевой функции	3	2	5	1160	
5						
6			ограничения			
7	I тип сырья	1	2	1	400	440
8	II тип сырья	3	0	2	380	380
9	III тип сырья	1	4	0	420	420
10						

Рис. 7. Решение задачи при изменении запасов сырья I и II типов

Оценим, целесообразно ли включить в план изделия IV ценой 7у.е., на изготовление которого расходуется 2, 4 и 3 ед. соответствующего вида сырья.

Для решения данного вопроса воспользуемся соотношением:

$$\Delta_j = \sum a_{ij} y_i - c_j ,$$

при этом если $\Delta_j \leq 0$, то включение целесообразно, а если Δ_j>0, то нет.

Для нового изделия данный показатель будет:

$$\Delta_Г = 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 0 - 7 = 2 + 8 - 7 = 10 - 7 = 3 > 0$$

Следовательно, включение в план изделия IV нецелесообразно, так как затраты на его изготовление не покрываются получаемой от него выручкой.

Задача 3.

Постановка задачи.

Промышленная группа предприятий (холдинг) выпускает продукцию трех видов, при этом каждое из трех предприятий группы специализируется на выпуске продукции одного вида: первое предприятие специализируется на выпуске продукции первого вида, второе предприятие - продукции второго вида; третье предприятие - продукции третьего вида. Часть выпускаемой продукции потребляется предприятиями холдинга (идет на внутреннее потребление), остальная часть поставляется за его пределы (внешним потребителям, является конечным продуктом). Специалистами управляющей компании получены экономические оценки a_{ij} (i=1,2,3; j=1,2,3) элементов технологической матрицы A (норм расхода, коэффициентов прямых материальных затрат) и элементов y_i вектора конечной продукции Y.

Требуется:

1) Проверить продуктивность технологической матрицы $A=(a_{ij})$ (матрицы коэффициентов прямых материальных затрат).

2) Построить баланс (заполнить таблицу) производства и распределения продукции предприятий холдинга.

Предприятия (виды продукции)	Коэффициенты прямых затрат a_{ij}			Конечный продукт Y
	1	2	3	
1	0,0	0,4	0,1	160
2	0,4	0,1	0,0	180
3	0,3	0,0	0,1	150

Решение задачи.

1) Проверим продуктивность матрицы А:

$$A = \begin{pmatrix} 0{,}0 & 0{,}4 & 0{,}1 \\ 0{,}4 & 0{,}1 & 0{,}0 \\ 0{,}3 & 0{,}0 & 0{,}1 \end{pmatrix}.$$

Для этого найдем матрицу $B=(E-A)^{-1}$. Воспользуемся встроенными функциями MS Excel, в частности МОБР. В результате получим матрицу B (рис. 8).

	A	B	C	D	E	F
1						
2			0	0,4	0,1	
3		A	0,4	0,1	0	
4			0,3	0	0,1	
5						
6						
7			1	-0,4	-0,1	
8		E-A	-0,4	0,9	0	
9			-0,3	0	0,9	
10						
11						
12			1,268	0,563	0,141	
13		B	0,563	1,362	0,063	
14			0,423	0,188	1,158	
15						
16						

Рис. 8. Вычисление матрицы В

Так как все элементы матрицы коэффициентов полных затрат неотрицательны, значит матрица A продуктивна.

2) Для определения валового выпуска умножим матрицу Y на матрицу B. Для этого отметим диапазон ячеек для размещения матрицы X и применим формулу МУМНОЖ (рис. 9).

11								
12			1,268	0,563	0,141			160
13		B	0,563	1,362	0,063		Y	180
14			0,423	0,188	1,158			150
15								
16								
17								
18					325,35			
19				X	344,60			
20					275,12			
21								

Рис. 9. Перемножение матриц

Найдем поставки между предприятиями по формуле $x_{ij}=a_{ij}X_j$. Получим заполненную таблицу производства и распределения продукции предприятий холдинга.

Предприятия (виды продукции)	Потребляющие предприятия			Конечный продукт	Валовой продукт
	1	2	3		
1	0	130,14	32,54	160	322,68
2	137,84	34,46	0	180	352,3
3	82,54	0	27,51	150	260,05
Условно чистая продукция	102,3	187,7	200	490	
Валовой продукт	322,68	352,3	260,05		935,03

Задача 4.

Постановка задачи.

В течение девяти последовательных недель фиксировался спрос *Y(t)* (млн. р.) на кредитные ресурсы финансовой компании. Временной ряд *Y(t)* этого показателя приведен ниже в таблице.

Номер наблюдения (t = 1,2,…,9)								
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**
8	13	15	19	25	27	33	35	40

Требуется:

1) Проверить наличие аномальных наблюдений.

2) Построить линейную модель $\widehat{Y}(t) = a_0 + a_1 t$, параметры которой оценить МНК ($\widehat{Y}(t)$ - расчетные, смоделированные значения временного ряда).

3) Построить адаптивную модель Брауна $\widehat{Y}(t) = a_0 + a_1 k$ с параметром сглаживания α= 0,4 и α= 0,7; выбрать лучшее значение параметра сглаживания α.

4) Оценить адекватность построенных моделей, используя свойства независимости остаточной компоненты, случайности и соответствия нормальному закону распределения (при использовании R/S-критерия взять табулированные границы 2,7 - 3,7).

5) Оценить точность моделей на основе использования средней относительной ошибки аппроксимации.

6) По двум построенным моделям осуществить прогноз спроса на следующие две недели (доверительный интервал прогноза рассчитать при доверительной вероятности р = 70%).

7) Фактические значения показателя, результаты моделирования и прогнозирования представить графически.

Основные промежуточные результаты вычислений представить в таблицах.

Решение задачи.

1) Проверим наличие аномальных наблюдений.

Для этого используем критерий Ирвина:

$$\lambda_t = \frac{|y_t - y_{t-1}|}{\sigma_y};\ t = 2,3,...,n,$$

где $\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \overline{y})^2}{n-1}}$; $\overline{y} = \frac{\sum_{t=1}^{n} y_t}{n}$.

Табличное значение данного критерия для 9 наблюдений будет $\lambda_\alpha \approx 1{,}5$.

Заполним следующую таблицу.

Таблица 1

Проверка на наличие аномальных наблюдений

t	y_t	$y_t - \bar{y}$	$(y_t - \bar{y})^2$	$\|y_t - y_{t-1}\|$	λ_t
1	8	-15,89	252,46	-	-
2	13	-10,89	118,57	5	0,46
3	15	-8,89	79,01	2	0,18
4	19	-4,89	23,90	4	0,37
5	25	1,11	1,23	6	0,55
6	27	3,11	9,68	2	0,18
7	33	9,11	83,01	6	0,55
8	35	11,11	123,46	2	0,18
9	40	16,11	259,57	5	0,46
Сумма	**215**		**950,89**		
Сред. знач.	**23,89**				

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{950{,}89}{8}} = \sqrt{118{,}86} \approx 10{,}9$$

Все рассчитанные λ_t меньше табличного значения, значит аномальных наблюдений нет.

2) Построим линейную модель.

Для этого воспользуемся надстройкой MS Excel Пакет анализа.

Введем исходные данные и выберем в меню Сервис строку Анализ данных. В появившемся окне выделим строку Регрессия. Автоматически будет проведен анализ с использованием метода наименьших квадратов.

В окне Регрессия заполним данные как показано на рисунке 10.

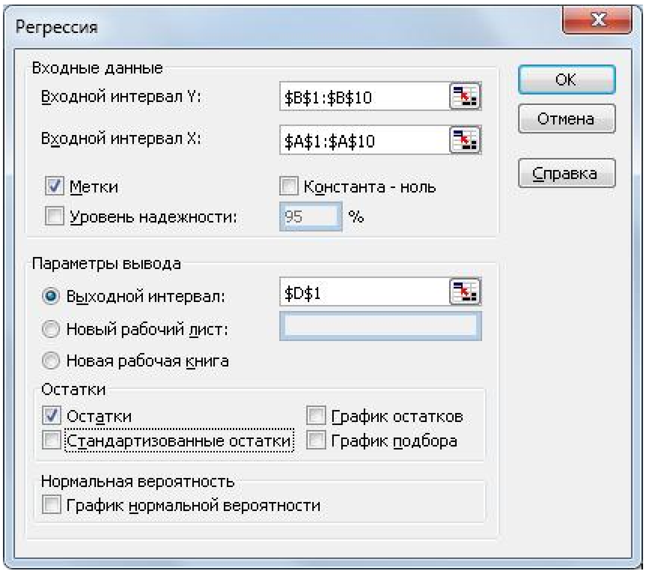

Рис. 10. Указание данных в окне Регрессия

Для построения линейной модели необходимо из полученных результатов взять коэффициенты уравнения регрессии (рис. 11).

ВЫВОД ИТОГОВ

Регрессионная статистика	
Множественный R	0,996406256
R-квадрат	0,992825427
Нормированный R-квадрат	0,991800487
Стандартная ошибка	0,987219922
Наблюдения	9

Дисперсионный анализ

	df	*SS*	*MS*	*F*	*Значимость F*
Регрессия	1	944,0666667	944,0666667	968,6677524	9,12922E-09
Остаток	7	6,822222222	0,974603175		
Итого	8	950,8888889			

	Коэффициенты	*Стандартная ошибка*	*t-статистика*	*P-Значение*	*Нижние 95%*	*Верхние 95%*	*Нижние 95,0%*	*Верхние 95,0%*
Y-пересечение	4,055555556	0,717198646	5,654717251	0,000770691	2,359650245	5,751460866	2,359650245	5,751460866
t	3,966666667	0,127449544	31,12342771	9,12922E-09	3,665296384	4,268036949	3,665296384	4,268036949

Рис. 11. Фрагмент итогов регрессионного анализа

Линейная модель зависимости спроса на кредитные ресурсы *Y(t)* от времени *t* имеет вид: $\hat{Y}(t) = 4{,}06 + 3{,}97t$.

3) Построим адаптивную модель Брауна с параметром сглаживания $\alpha = 0{,}4$ и $\alpha = 0{,}7$.

Начальные оценки параметров получим по первым пяти наблюдениям по формулам:

$$\hat{a}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}(y_i - \overline{y})(t_i - \overline{t})}{\sum_{i=1}^{n}(t_i - \overline{t})^2}; \ \hat{a}_0 = \overline{y} - \hat{a}_1\overline{t}$$

Промежуточные расчеты приведены в таблице.

Таблица 2

Оценка начальных параметров для построения адаптивной модели Брауна

i	***t***	y_i	$y_i - \bar{y}$	$t_i - \ddot{t}$	$(y_i - \bar{y})(t_i - \ddot{t})$	$(t_i - \ddot{t})^2$
1	1	8	-8	-2	16	4
2	2	13	-3	-1	3	1
3	3	15	-1	0	0	0
4	4	19	3	1	3	1
5	5	25	9	2	18	4
Сумма	**15**	**80**			**40**	**10**
Сред. знач.	**3**	**16**				

$\hat{a}_1 = \frac{40}{10} = 4; \quad \hat{a}_0 = 16 - 4 \cdot 3 = 4$.

Найдем прогноз на первый шаг: $\hat{y}_1 = \hat{a}_{0(0)} + \hat{a}_{1(0)} = 4 + 4 = 8$.

Величина отклонения будет: $e_1 = y_1 - \hat{y}_1 = 8 - 8 = 0$.

Корректируем параметры модели при $\alpha = 0{,}4$ и $\beta = 0{,}6$ по формулам:

$$a_{0(t)} = a_{0(t-1)} + a_{1(t-1)} + (1-\beta)^2 e_{(t)} = 4 + 4 + (1 - 0{,}6)^2 \cdot 0 = 8$$
$$a_{1(t)} = a_{1(t-1)} + (1-\beta)^2 e_{(t)} = 4 + 0{,}4^2 \cdot 0 = 4$$

Повторим данные действия для остальных наблюдений.

Таблица 3

Адаптивная модель Брауна при параметре сглаживания 0,4

t	y_t	a_0	a_1	$\hat{y}_t$	e_t	$\lvert e_t \rvert : y_t * 100\%$
0	-	4	4	-	-	-
1	8	8	4	8	0	0,00%
2	13	12,16	4,16	12	1	7,69%
3	15	16,11	3,95	16,32	-1,32	8,80%
4	19	19,89	3,78	20,06	-1,06	5,57%
5	25	23,88	3,99	23,67	1,33	5,33%
6	27	27,73	3,85	27,87	-0,87	3,24%
7	33	31,81	4,08	31,59	1,41	4,28%
8	35	35,75	3,94	35,89	-0,89	2,55%
9	40	39,74	3,99	39,69	0,31	0,79%
Сумма						**38,24%**
Сред. знач.						**4,25%**

Теперь построим адаптивную модель Брауна с параметром сглаживания $\alpha = 0,7$.

Промежуточные расчеты приведены в таблице 4.

Таблица 4

Адаптивная модель Брауна при параметре сглаживания 0,7

t	y_t	a_0	a_1	$\hat{y}_t$	e_t	$\|e_t\|:y_t*100\%$
0	-	4	4	-	-	-
1	8	8	4	8	0	0,00%
2	13	12,49	4,49	12	1	7,69%
3	15	16,01	3,52	16,98	-1,98	13,20%
4	19	19,27	3,26	19,53	-0,53	2,79%
5	25	23,74	4,47	22,53	2,47	9,88%
6	27	27,62	3,88	28,21	-1,21	4,48%
7	33	32,23	4,61	31,49	1,51	4,56%
8	35	35,94	3,71	36,85	-1,85	5,28%
9	40	39,82	3,88	39,65	0,35	0,87%
Сумма						**48,75%**
Сред. знач.						**5,42%**

Для выбора лучшей модели используем относительную ошибку аппроксимации:

$$E_{отн} = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}\frac{|e_t|}{y_t}\cdot 100\% .$$

Для $\alpha = 0,4$ $E_{отн} = 4,25\%$, а для $\alpha = 0,7$ $E_{отн} = 5,42\%$.

Первая модель лучше, так как средняя относительная ошибка аппроксимации при $\alpha = 0,4$ меньше, а ее малые величины свидетельствуют о хорошем качестве модели.

4) Оценим адекватность построенных моделей, используя свойства независимости остаточной компоненты, случайности и соответствия нормальному закону распределения (при использовании RS-критерия взять табулированные границы 2,7 - 3,7).

Оценим адекватность линейной модели $\hat{Y}(t) = 4,06 + 3,97t$.

Для проверки независимости уровней ряда остатков вычислим значение критерия Дарбина-Уотсона. Промежуточные расчеты приведены в таблице 5.

Таблица 5

Критерий Дарбина-Уотсона для линейной модели

t	y_t	$\hat{y}_t$	e_t	*точки пиков*	e_t^2	$e_t - e_{t-1}$	$(e_t - e_{t-1})^2$	$\lvert e_t \rvert : y_t*100\%$
1	8	8,02	-0,02	-	0,00	-	-	0,28%
2	13	11,99	1,01	1	1,02	1,03	1,07	7,78%
3	15	15,96	-0,96	1	0,91	-1,97	3,87	6,37%
4	19	19,92	-0,92	0	0,85	0,03	0,00	4,85%
5	25	23,89	1,11	1	1,23	2,03	4,13	4,44%
6	27	27,86	-0,86	1	0,73	-1,97	3,87	3,17%
7	33	31,82	1,18	1	1,39	2,03	4,13	3,57%
8	35	35,79	-0,79	1	0,62	-1,97	3,87	2,25%
9	40	39,76	0,24	-	0,06	1,03	1,07	0,61%
Сумма	**215**	**215,00**	**0,00**	**6**	**6,82**		**22,01**	**33,33%**
Сред. знач.	**23,89**		**0**					**3,70%**

$dw = 3,23$

$dw' = 4 - 3,23 = 0,77$

Примем критические табличные значения критерия равными $d_1 = 1,08$ и $d_2 = 1,36$. Так как расчетное значение меньше d_1, то делается вывод о наличии автокорреляции.

Проверку случайности проведем на основе критерия пиков: $p > [\overline{p} - 1,96\sqrt{\sigma_p^2}]$, где $\overline{p} = \frac{2}{3}(n-2)$ и $\sigma_p^2 = \frac{16n-29}{90}$.

Количество точек пиков равно $p = 6$, а правая часть уравнения равна 2 (целое число от 2,46). Таким образом, неравенство выполняется и модель по данному свойству адекватна.

Воспользуемся RS критерием, чтобы проверить соответствие нормальному закону распределения.

Размах вариации: $R = e_{\max} - e_{\min} = 1,2 - (-1) = 2,2$.

СКО: $s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} e_t^{\ 2}} = \sqrt{\frac{6,82}{8}} \approx \sqrt{0,85} \approx 0,9$

Критерий $RS = \frac{2,2}{0,9} = 2,33$. Это значение не попадает в интервал 2,7 – 3,7, значит, свойство нормальности распределения не выполняется.

Данная линейная модель является неадекватной.

Оценим адекватность адаптивной модели с параметром сглаживания 0,4.

При проверке независимости остаточной компоненты используем критерий Дарбина-Уотсона. Промежуточные расчеты в таблице 6.

Таблица 6

Критерий Дарбина-Уотсона для адаптивной модели с парметром сглаживания 0,4

t	y_t	$\hat{y}_t$	e_t	*точки пиков*	e_t^2	$e_t - e_{t-1}$	$(e_t - e_{t-1})^2$
1	8	8	0,00	-	0,00	-	-
2	13	12	1,00	1	1,00	1,00	1,00
3	15	16,32	-1,32	1	1,74	-2,32	5,38
4	19	20,06	-1,06	0	1,12	0,26	0,07
5	25	23,67	1,33	1	1,77	2,39	5,71
6	27	27,87	-0,87	1	0,76	-2,21	4,87
7	33	31,59	1,41	1	2,00	2,29	5,23
8	35	35,89	-0,89	1	0,80	-2,31	5,31
9	40	39,69	0,31	-	0,10	1,21	1,46
Сумма	**215**	**215,08**	**-0,08**	**6**	**9,29**		**29,03**
Сред. знач.	**23,89**		**-0,01**				

$dw = 3,12$

$dw' = 4 - 3,12 = 0,88$

Расчетное значение меньше d_1, делается вывод о наличии автокорреляции.

Проверку случайности проведем на основе критерия пиков. Результат получим тот же, что и при исследовании предыдущей модели, так как количество точек пиков такое же (6). Таким образом, неравенство выполняется и модель по данному свойству адекватна.

Воспользуемся *RS* критерием, чтобы проверить соответствие нормальному закону распределения.

Размах вариации: $R = e_{\max} - e_{\min} = 1{,}41 - (-1{,}32) = 2{,}73$.

СКО: $s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} e_t^{\,2}} = \sqrt{\frac{9{,}29}{8}} \approx \sqrt{1{,}61} \approx 1{,}08$

Критерий $RS = \frac{2{,}73}{1{,}08} \approx 2{,}53$. Это значение не попадает в интервал 2,7 – 3,7, значит, свойство нормальности распределения не выполняется.

Математическое ожидание ряда остатков близко к нулю.

Модель является неадекватной по двум из четырех признаков.

Оценим адекватность второй адаптивной модели с параметром сглаживания 0,7.

При проверке независимости остаточной компоненты используем критерий Дарбина-Уотсона. Промежуточные расчеты представлены в таблице 7.

Таблица 7

Критерий Дарбина-Уотсона для адаптивной модели с параметром сглаживания 0,7

t	y_t	$\hat{y}_t$	e_t	*точки пиков*	e_t^2	$e_t - e_{t-1}$	$(e_t - e_{t-1})^2$
1	8	8	0,00	-	0,00	-	-
2	13	12	1,00	1	1,00	1,00	1,00
3	15	16,98	-1,98	1	3,92	-2,98	8,88
4	19	19,53	-0,53	0	0,28	1,45	2,10
5	25	22,53	2,47	1	6,10	3,00	9,00
6	27	28,21	-1,21	1	1,47	-3,68	13,55
7	33	31,49	1,51	1	2,27	2,72	7,38
8	35	36,85	-1,85	1	3,41	-3,35	11,24
9	40	39,65	0,35	-	0,12	2,20	4,82
Сумма	**215**	**215,24**	**-0,24**	**6**	**18,56**		**57,96**
Сред. знач.	**23,89**		**-0,03**				

$dw = 3{,}12$

$dw' = 4 - 3{,}12 = 0{,}88$

Так как значение dw' меньше d_1, делается вывод о наличии автокорреляции.

Проверку случайности проведем на основе критерия пиков. Результат получим тот же, что и при исследовании предыдущей модели, так как количество точек пиков такое же (6). Таким образом, неравенство выполняется и модель по данному свойству адекватна.

Воспользуемся *RS* критерием, чтобы проверить соответствие нормальному закону распределения.

Размах вариации: $R = e_{\max} - e_{\min} = 2{,}47 - (-1{,}98) = 4{,}45$.

СКО: $s = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} e_t^{\,2}} = \sqrt{\frac{18{,}56}{8}} = \sqrt{2{,}32} \approx 1{,}52$

Критерий $RS = \frac{4{,}45}{1{,}52} = 2{,}93$. Это значение попадает в интервал 2,7 – 3,7, значит, свойство нормальности распределения выполняется.

Математическое ожидание ряда остатков близко к нулю.

Модель является неадекватной по критерию Дарбина-Уотсона.

5) Оценить точность моделей на основе использования средней относительной ошибки аппроксимации.

Рассчитаем среднюю относительную ошибку аппроксимации для линейной модели $\hat{Y}(t) = 4{,}06 + 3{,}97t$ взяв данные из ранее рассчитанной таблицы 5. Для адаптивных моделей данные возьмем из таблиц 3 и 4.

Линейная модель $\hat{Y}(t) = 4{,}06 + 3{,}97t$ - $E_{отн} = 3{,}7$

Адаптивная модель при $\alpha = 0{,}4$ - $E_{отн} = 4{,}25$

Адаптивная модель при $\alpha = 0{,}7$ - $E_{отн} = 5{,}42$

Исходя из этой оценки, наиболее точной является линейная модель. Адаптивные модели Брауна являются менее точной.

6) По двум построенным моделям осуществить прогноз спроса на следующие две недели (доверительный интервал прогноза рассчитать при доверительной вероятности p = 70%).

Построим интервальный прогноз для линейной модели.

Рассчитаем доверительный интервал при доверительной вероятности 70% и $\alpha = 0{,}3$, критерий Стьюдента при $\nu = n - 2 = 7$ равен 1,12.

Промежуточные расчеты приведены в таблице 8.

Таблица 8

i	*t*	*t - ẗ*	*(t - ẗ)²*
1	1	-4	16
2	2	-3	9
3	3	-2	4
4	4	-1	1
5	5	0	0
6	6	1	1
7	7	2	4
8	8	3	9
9	9	4	16
Сумма	**45**		**60**
Сред. знач.	**5**		

$$U(k) = S_e t_\alpha \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(n + k - \bar{t})^2}{\sum_{t=1}^{n} (t - \bar{t})^2}}$$

$$S_e = \sqrt{\frac{1}{n-2} \sum_{t=1}^{n} e_t^2} = \sqrt{\frac{1}{7} \cdot 6{,}82} \approx \sqrt{0{,}97} \approx 0{,}99$$

Для первой недели (k=1)

$$y_{10} = 4{,}06 + 3{,}97 \cdot 10 = 4{,}06 + 39{,}7 = 43{,}76$$

$$U(1) = 0{,}99 \cdot 1{,}12 \sqrt{1 + \frac{1}{9} + \frac{(9 + 1 - 5)^2}{60}} = 1{,}1088 \sqrt{\frac{10}{9} + \frac{25}{60}} = 1{,}1088 \sqrt{\frac{10}{9} + \frac{5}{12}} =$$

$$= 1{,}1088 \sqrt{\frac{40 + 15}{36}} = \frac{1{,}1088}{6} \sqrt{55} \approx \frac{1{,}1088 \cdot 7{,}42}{6} \approx 1{,}37$$

Для второй недели (k=2)

$$y_{11} = 4{,}06 + 3{,}97 \cdot 11 = 4{,}06 + 43{,}67 = 47{,}73$$

$$U(2) = 0{,}99 \cdot 1{,}12 \sqrt{1 + \frac{1}{9} + \frac{(9 + 2 - 5)^2}{60}} = 1{,}1088 \sqrt{\frac{10}{9} + \frac{36}{60}} = 1{,}1088 \sqrt{\frac{10}{9} + \frac{3}{5}} =$$

$$= 1{,}1088 \sqrt{\frac{50 + 27}{45}} = \frac{1{,}1088}{3} \sqrt{\frac{77}{5}} \approx \frac{1{,}1088 \cdot 3{,}92}{3} \approx 1{,}45$$

n + k	**U(k)**	**прогноз**	**верхняя граница**	**нижняя граница**
10	1,37	43,76	45,13	42,39
11	1,45	47,73	49,18	46,28

Построим интервальный прогноз для адаптивной модели.

Доверительный интервал рассчитывается по формуле:

$$U(\tau) = S_e t_\alpha \sqrt{\frac{\alpha[1+4(1-\alpha)+5(1-\alpha)^2+2\alpha(4-3\alpha)\tau+2\alpha^2\tau^2]}{(2-\alpha)^3}}$$

$$S_e = \sqrt{\frac{1}{n-2}\sum_{t=1}^{n} e_t^2} = \sqrt{\frac{1}{7}\cdot 9{,}29} = \sqrt{1{,}33} \approx 1{,}15$$

Для первой недели (τ=1)

$$y_{10} = 39{,}736 + 3{,}987 \cdot 1 = 39{,}736 + 3{,}987 \approx 43{,}72$$

$$U(1) = 1{,}15 \cdot 1{,}12\sqrt{\frac{0{,}3(1+4\cdot 0{,}7+5\cdot 0{,}49+0{,}6\cdot 3{,}1\cdot 1+2\cdot 0{,}09\cdot 1)}{1{,}7^3}} =$$

$$= 1{,}288\sqrt{\frac{0{,}3\cdot 8{,}29}{4{,}913}} = 1{,}288\sqrt{\frac{2{,}487}{4{,}913}} \approx 1{,}288\sqrt{0{,}506} \approx 1{,}288\cdot 0{,}711 \approx 0{,}92$$

Для второй недели (τ=2)

$$y_{11} = 39{,}736 + 3{,}987 \cdot 2 = 39{,}736 + 7{,}974 = 47{,}71$$

$$U(2) = 1{,}15 \cdot 1{,}12\sqrt{\frac{0{,}3(1+4\cdot 0{,}7+5\cdot 0{,}49+0{,}6\cdot 3{,}1\cdot 2+2\cdot 0{,}09\cdot 4)}{1{,}7^3}} =$$

$$= 1{,}288\sqrt{\frac{0{,}3\cdot 10{,}69}{4{,}913}} = 1{,}288\sqrt{\frac{3{,}207}{4{,}913}} \approx 1{,}288\sqrt{0{,}653} \approx 1{,}288\cdot 0{,}807 \approx 1{,}04$$

t + τ	**U(τ)**	**прогноз**	**верхняя граница**	**нижняя граница**
10	0,92	43,72	44,64	42,80
11	1,04	47,71	48,75	46,67

7) Фактические значения показателя, результаты моделирования и прогнозирования представить графически.

Рис. 12. Результаты моделирования и прогнозирования по линейной модели

Рис. 13. Результаты моделирования и прогнозирования по адаптивной модели

Список использованной литературы

1. Орлова И. В., Половников В. А. – Экономико-математические методы и модели: компьютерное моделирование: Учебное пособие. – М.: Вузовский учебник, 2007. – 365 с.

2. Орлова И. В. – Экономико-математические модели и методы. Практическое пособие по решению задач. – Москва, 2003.

3. Орлова И. В. – Экономико-математические методы и модели. Выполнение расчетов в среде Excel / Практикум: Учебное пособие для вузов. – М.: ЗАО «Финстатинформ», 2000. – 136 с.

4. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учебное пособие для вузов/ В. В. Федосеев, А. Н. Гармаш, Д. М. Дайитбегов и др.; Под редакцией В. В. Федосеева. – М.: ЮНИТИ, 2001. – 391 с.

5. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учебное пособие для вузов/ В. В. Федосеев, А. Н. Гармаш, Д. М. Дайитбегов и др.; Под редакцией В. В. Федосеева. – М.: ЮНИТИ, 1999. – 391 с.